ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT	JOURNAL
HERAUSGEGEBEN	RÉDIGÉ
VON	PAR

G. MITTAG-LEFFLER

10

MIT INHALTSVERZEICHNISS	AVEC LA TABLE DES MATIÈRES
DER BÄNDE 1—10	DES TOMES 1—10

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1887.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

ACTA MATHEMATICA, 10. 1887.

INHALT. — TABLE DES MATIÈRES.

zunächst Summen der zweiten Art und sagt dann, indem er zu der Untersuchung von Summen der ersten Art übergeht: »Diese Reihen haben mit den oben besprochenen das gemein, dass es sich dabei um eine Summe von grössten Ganzen handelt, wobei der Fortschritt zwischen den einzelnen Gliedern durch eine arithmetische Reihe bestimmt wird; aber während dort die Bruch*zähler* und darum auch die Brüche selbst eine arithmetische Progression bilden, so ist nun das letztere bei den Bruch*nennern* der Fall ohne Veränderung des Zählers und die Einzelbrüche sind reciproke Werte einer arithmetischen Progression oder mit anderen Worten — und hierin scheint gerade die Eigentümlichkeit dieser Art von Reihen zu bestehen — die Brüche, deren grösste Ganze zu summieren sind, bilden nicht eine arithmetische, sondern eine harmonische Reihe.» Die beiden Arten von Reihen unterscheiden sich eben dadurch, dass die Glieder der einen Art mit wachsender Stellenzahl zunehmen, während die der andern Art das entgegengesetzte Verhalten zeigen. Dass der hervorgehobene Unterschied nicht bloss äusserlicher Natur ist, sondern in der That das Wesen der Sache trifft, wird sich im Verlaufe der vorliegenden Arbeit ergeben. Demgemäss teilen wir dieselbe in zwei Abschnitte, und stellen an die Spitze eines jeden Abschnitts einen allgemeinen Satz, von denen der erste von LEJEUNE-DIRICHLET herrührt, während der zweite nach Analogie des DIRICHLET'schen Satzes gebildet ist.

Wir folgen der von GAUSS (*Theorematis arithmetici demonstratio nova,* GAUSS' Werke, Bd. 2, p. 3) eingeführten Bezeichnungsweise, nach der $[x]$ die unmittelbar unter x liegende ganze Zahl darstellt. Für den Fall, dass x eine ganze Zahl ist, definieren wir $[x] = x$. Die französischen Mathematiker gebrauchen statt der eckigen Klammern das Zeichen $E(x)$ (LEGENDRE, *Théorie des nombres,* p. 10: »l'entier le plus grand contenu dans la fraction x»).

I.

Über Summen von grössten Ganzen von Functionswerten, bei denen die Function mit wachsendem Argument fortwährend abnimmt.

§ 1.

Es sei $y = f(x)$ eine Function, welche immerfort abnimmt, während x von $x = \mu$ bis $x = p$ wächst. Dann hat die durch Umkehrung aus $y = f(x)$ entstehende Function $x = F(y)$ offenbar die Eigenschaft, gleichfalls immer abzunehmen, während y von $y = f(p)$ bis $y = f(\mu)$ wächst. Sind nun μ und p ganze Zahlen und setzt man zur Abkürzung $[f(\mu)] = \nu$, $[f(p)] = q$, so ist in der Reihe

$$\nu = [f(\mu)], \ [f(\mu + 1)], \ \ldots, \ [f(s)], \ \ldots, \ [f(p)] = q$$

jedes Glied grösser oder wenigstens nicht kleiner als das folgende. Nun entsteht die Frage: Welche Glieder der Reihe sind einer gegebenen zwischen ν und q liegenden ganzen Zahl t gleich? Es sei s der Zeiger desjenigen Gliedes, welches $\geqq t$ ist, während das folgende $< t$ ist. Dann gelten die Ungleichheiten

$$[f(s)] \geqq t, \qquad [f(s + 1)] < t,$$

oder

$$f(s) \geqq t, \qquad f(s + 1) < t.$$

Hieraus folgt kraft der über die Function $f(x)$ gemachten Voraussetzung

$$s \leqq F(t), \qquad s + 1 > F(t),$$

oder

$$s = [F(t)].$$

Ebenso findet man, dass der Wert $t + 1$ noch demjenigen Gliede zukommt, dessen Zeiger $s' = [F(t + 1)]$, dem folgenden aber nicht mehr, und es

ergibt sich, dass die Glieder, denen der Wert t zukommt, der doppelten Bedingung genügen müssen

$$s > [F(t+1)], \qquad s \leq [F(t)].$$

Für $t = \nu$ erhält die erste Bedingung die Gestalt $s \geq \mu$, für $t = q$ lautet die zweite Bedingung $s \leq p$.

In die Sprache der Geometrie übersetzt heisst dies: Wenn eine Curve $y = f(x)$ auf einer gewissen Strecke in Bezug auf die positive x-Axe fortwährend nach unten geneigt ist, so ist sie auch auf derselben Strecke in Bezug auf die positive Seite der y-Axe fortwährend nach unten geneigt. Zieht man durch die Punkte $x = \mu, \mu + 1, \ldots, p - 1, p$ Parallelen zur y-Axe, so wird die Anzahl der auf den von der Abscissenaxe und der Curve begrenzten Stücken dieser Parallelen liegenden Punkte mit ganzzahligen Coordinaten (Gitterpunkte) um so kleiner, je weiter sich die Parallelen von der y-Axe entfernen; wenigstens ist es unmöglich, dass eine Parallele, welche der Ordinatenaxe näher liegt, als eine andere, weniger Gitterpunkte enthält, als diese. Etwaige auf der Curve selbst liegende Punkte mit ganzzahligen Coordinaten sind natürlich zu den Gitterpunkten mitzurechnen. Die einzelnen Glieder der Reihe

$$[f(\mu)], \; [f(\mu+1)], \; \ldots, \; [f(s)], \; \ldots, \; [f(p)]$$

werden offenbar dargestellt durch die Anzahl der auf den entsprechenden Parallelen liegenden Gitterpunkte. Ein gegebener Wert t kommt denjenigen Gliedern zu, deren Zeiger s auf der Abscissenaxe zwischen den Durchschnittspunkten derselben mit den Geraden $x = F(t)$ und $x = F(t+1)$ liegen. Sollte $F(t)$ einen ganzzahligen Wert besitzen, so ist derselbe mitzurechnen, während ein ganzzahliger Wert für $F(t+1)$ auszuschliessen ist.

In dieser geometrischen Deutung leuchtet die Wahrheit der bis jetzt aufgestellten Behauptungen unmittelbar ein.

Betrachtet man jetzt die Summe

$$\sum_{\mu+1}^{p} [f(s)] \, \varphi(s),$$

wo $\varphi(s)$ eine ganz beliebige Function ist, so sieht man, dass derjenige

Teil der Summe, in welchem $[f(s)]$ einen und denselben Wert t hat, wenn $g < t < \nu$ ist, den Ausdruck hat

$$t\{\Psi[F(t)] - \Psi[F(t+1)]\},$$

wo $\Psi(s) = \sum_1^s \varphi(s)$ ist. Die Partialsummen, welche den Werten $t = \nu$ und $t = q$ entsprechen, haben resp. die Werte

$$\nu\{\Psi[F(\nu)] - \Psi(\mu)\}$$

und

$$q\{\Psi(p) - \Psi[F(q+1)]\}.$$

Bei der Addition aller dieser Partialsummen erscheint abgesehen von den beiden Gliedern $-\nu\Psi(\mu)$ und $q\Psi(p)$ jedes Glied $\Psi[F(s)]$ mit der positiven Einheit multipliziert; es ergibt sich also die Gleichung

$$(1) \qquad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s) = q\Psi(p) - \nu\Psi(\mu) + \sum_{q+1}^{\nu}\Psi[F(s)].$$

Setzt man in dieser Gleichung $\varphi(s) = 1$, so wird $\Psi(s) = s$, und es kommt

$$(2) \qquad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] = qp - \nu\mu + \sum_{q+1}^{\nu}[F(s)].$$

Addiert man in (1) und (2) auf beiden Seiten resp. die Ausdrücke

$$\sum_1^{\mu}[f(s)]\varphi(s) \quad \text{und} \quad \sum_1^{\mu}[f(s)],$$

so ergeben sich die weiteren Gleichungen

$$(3) \qquad \sum_1^{p}[f(s)]\varphi(s) = q\Psi(p) - \nu\Psi(\mu) + \sum_1^{\mu}[f(s)]\varphi(s) + \sum_{q+1}^{\nu}\Psi[F(s)];$$

$$(4) \qquad \sum_1^{p}[f(s)] = qp - \nu\mu + \sum_1^{\mu}[f(s)] + \sum_{q+1}^{\nu}[F(s)].$$

Konstruiert man die Curve $y = f(x)$ und zieht in den Entfernungen μ und p Parallelen zur y-Axe, in den Entfernungen $f(p)$ und $f(\mu)$ Parallelen zur x-Axe, so genügt der Anblick der Figur, um uns von der Richtigkeit der Gleichungen (2) und (4) zu überzeugen.

Wir haben diesen von DIRICHLET in der Abhandlung *Über ein die Division betreffendes Problem* (CRELLE's Journal Bd. 47, p. 151) bewiesenen Satz mit seinem Beweise hier reproduziert, weil derselbe für das folgende von so grosser Wichtigkeit ist.

§ 2.

Bezeichnet $f(m)$ die Anzahl, $g(m)$ die Summe der Divisoren der Zahl m, und setzt man

$$F(m) = f(1) + f(2) + \ldots + f(m),$$
$$G(m) = g(1) + g(2) + \ldots + g(m),$$

so hat man die bekannten Gleichungen

$$(1) \qquad F(m) = \sum_{s=1}^{s=m} \left[\frac{m}{s}\right],$$

$$(2) \qquad G(m) = \sum_{s=1}^{s=m} s\left[\frac{m}{s}\right].$$

Ist m eine ungerade Zahl und

$$\mathfrak{F}(m) = f(1) + f(3) + f(5) + \ldots + f(m),$$
$$\mathfrak{G}(m) = g(1) + g(3) + g(5) + \ldots + g(m),$$

so ist[1]

$$\mathfrak{F}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} \left[\frac{1}{2}\frac{m+2s-1}{2s-1}\right],$$

$$\mathfrak{G}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} (2s-1)\left[\frac{1}{2}\frac{m+2s-1}{2s-1}\right].$$

Man bezeichne mit $k(m)$ die Summe aus den ungeraden und den

[1] Cf. Acta Mathematica Bd. 9, p. 178, wo die Zeichen $F(m)$ und $G(m)$ an folgenden Stellen in $\mathfrak{F}(m)$ und $\mathfrak{G}(m)$ umzuändern sind: p. 178, Z. 5, 11, 14, 15, 18; p. 179, Z. 16; p. 180, Z. 17, 22, 24.

halben geraden Divisoren der Zahl m, mit $l(m)$ die Differenz aus den geraden und ungeraden Divisoren der Zahl m, und setze

$$K(m) = k(1) + k(2) + \ldots + k(m),$$
$$L(m) = l(1) + l(2) + \ldots + l(m).$$

Dann ist

$$K(m) = \sum_{s=1}^{s=m} s\left[\frac{m}{s}\right] - \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} s\left[\frac{m}{2s}\right],$$

$$L(m) = \sum_{s=1}^{s=m} (-1)^s s\left[\frac{m}{s}\right].$$

Bevor wir dazu übergehen, auf die eben besprochenen Functionen die allgemeinen Transformationsgleichungen des § 1 anzuwenden, wollen wir die Darstellungen des § 1 verallgemeinern.

Bedeutet $f_2(m)$ die Anzahl, $g_2(m)$ die Summe der quadratischen Teiler von m und ist

$$F_2(m) = f_2(1) + f_2(2) + \ldots + f_2(m),$$
$$G_2(m) = g_2(1) + g_2(2) + \ldots + g_2(m),$$

so ist

$$F_2(m) = \sum_{s=1}^{s=[\sqrt{m}]} \left[\frac{m}{s^2}\right],$$

$$G_2(m) = \sum_{s=1}^{s=[\sqrt{m}]} s^2\left[\frac{m}{s^2}\right],$$

und ist allgemein $F_a(m)$ die Anzahl, $G_a(m)$ die Summe sämtlicher Divisoren von der Form n^a aller Zahlen von 1 bis m, so gelten die Gleichungen

(3) $$F_a(m) = \sum_{s=1}^{s=\left[\sqrt[a]{m}\right]} \left[\frac{m}{s^a}\right],$$

(4) $$G_a(m) = \sum_{s=1}^{s=\left[\sqrt[a]{m}\right]} s^a\left[\frac{m}{s^a}\right];$$

ein zweiter Ausdruck für $F_a(m)$ ist der folgende

$$(5) \qquad F_a(m) = \sum_{s=1}^{s=m} \left[\frac{m^{\frac{1}{a}}}{s^{\frac{1}{a}}} \right].$$

Beide Darstellungen sind nur für $\alpha = 1$ identisch.

Die Gleichungen (3), (4) und (5) dieses sowie (1) des folgenden Paragraphen finden sich im 2. Bande der Acta Mathematica (*Sur quelques points de la théorie des nombres*, par R. LIPSCHITZ, p. 301 sqq.).

§ 3.

Wendet man auf den Ausdruck (3) die Gleichung (4) des § 1 an, so ergibt sich

$$(1) \qquad F_a(m) = -\mu\nu + \sum_{s=1}^{s=\mu} \left[\frac{m}{s^a} \right] + \sum_{s=1}^{s=\nu} \left[\frac{m^{\frac{1}{a}}}{s^{\frac{1}{a}}} \right],$$

wo μ eine beliebige zwischen 1 und $\left[m^{\frac{1}{a}} \right]$ liegende ganze Zahl und $\nu = \left[\frac{m}{\mu^a} \right]$ ist.

Es dürfte erwähnenswert sein, dass für $\mu = 1$ die Formel (1) in (5) des vorigen Paragraphen übergeht, indem für $\mu = 1$, $\nu = m$ und $\sum_{s=1}^{s=\mu} \left[\frac{m}{s^a} \right] = m$ wird. Umgekehrt kann man natürlich auch mit Hülfe der Transformationsgleichung von (5) zu (1) gelangen.

Setzt man in (1) $\mu = \left[m^{\frac{1}{1+a}} \right]$, so erhält man, wie LIPSCHITZ an der erwähnten Stelle nachgewiesen hat, die Gleichung

$$(2) \qquad F_a(m) = -\mu^2 + \sum_{s=1}^{s=\mu} \left[\frac{m}{s^a} \right] + \sum_{s=1}^{s=\mu} \left[\frac{m^{\frac{1}{a}}}{s^{\frac{1}{a}}} \right].$$

Die Formeln (1) und (2) nehmen für $\alpha = 1$ resp. die Gestalt an

$$F(m) = -\mu\nu + \sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m}{s}\right] + \sum_{s=1}^{s=\nu}\left[\frac{m}{s}\right], \tag{3}$$

$$F(m) = -\mu^2 + 2\sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m}{s}\right]. \tag{4}$$

In der letzten Gleichung ist $\mu = [\sqrt{m}]$.

Die Gleichung (3) hat zuerst DIRICHLET gefunden (v. die Abhandlung *Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie* Abhdlg. der Berl. Akad. 1849); die Gleichung (4) findet sich in einer schon genannten Abhandlung von ZELLER und im 2. Bande der Acta Mathematica (in der Note von CH. HERMITE p. 299).

Alle Formeln dieses Paragraphen lassen sich auch geometrisch beweisen. Der Kürze wegen möge der geometrische Beweis für die Gleichungen (3) und (4) genügen.

$y = \frac{m}{x}$ ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, welche die x- und y-Axe zu Asymptoten hat. Die Anzahl der in dem von den Asymptoten und der Hyperbel eingeschlossenen Flächenstücke liegenden Gitterpunkte ist augenscheinlich gleich $F(m)$. Denn die Anzahl der Gitterpunkte, welche auf der durch den Punkt ($x = 1$, $y = 0$) zur y-Axe gezogenen Parallele liegen, ist gleich $\left[\frac{m}{1}\right]$, auf der durch den Punkt ($x = 2$, $y = 0$) gehenden Parallele zur y-Axe liegen $\left[\frac{m}{2}\right]$ Gitterpunkte u. s. w., kurz, die Anzahl der Gitterpunkte ist $\left[\frac{m}{1}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{m}{m}\right]$, und dies ist gerade der Ausdruck für die Function $F(m)$. Die Zahl

$$\sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m}{s}\right]$$

wird dargestellt durch die Anzahl der Gitterpunkte, welche von der Abscissenaxe, den Ordinaten $x = 0$ und $x = \mu$ und der Hyperbel eingeschlos-

sen sind, wobei die auf der Geraden $x=\mu$ liegenden Punkte mit ganzzahligen Coordinaten natürlich mitzurechnen sind. Die Summe

$$\sum_{s=1}^{s=\nu}\left[\frac{m}{s}\right]$$

ist gleich der Anzahl der von der Ordinatenaxe, den Abscissen $y=0$ und $y=\nu$ und der Hyperbel eingeschlossenen Gitterpunkte, wobei die auf der Geraden $y=\nu$ liegenden Gitterpunkte wiederum mitzurechnen sind. Es liegt dies daran, dass man der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel auch die Form $x=\frac{m}{y}$ geben kann, wodurch x und y ihre Rollen vertauschen. $\mu\nu$ ist die Anzahl derjenigen Gitterpunkte, welche in dem von den Axen, der Ordinate $x=\mu$ und der Abscisse $y=\nu$ gebildeten Rechteck liegen, und diese Anzahl ist, wie man unmittelbar sieht, von der Anzahl der schon betrachteten Gitterpunkte abzuziehen, um jeden Gitterpunkt einmal und nur einmal zu erhalten. Dies ist aber der Inhalt der zu beweisenden Gleichung (3).

Um die Gleichung (4) geometrisch zu beweisen, ziehen wir die Geraden $x=\mu$ und $y=\mu$, deren Durchschnittspunkt innerhalb des von den Axen und der Curve begrenzten Flächenstücks liegen muss. Auf der Verbindungslinie des zuletzt genannten Punktes mit dem Coordinatenanfangspunkte liegen μ und nur μ Gitterpunkte, weil der Durchschnittspunkt dieser Verbindungslinie mit der Hyperbel die Coordinaten $x=\sqrt{m}$, $y=\sqrt{m}$ hat. Nachdem dies festgestellt ist, verhelfen ähnliche Betrachtungen wie die oben angestellten leicht zu dem gewünschten Beweise.

Will man nur einen Teil der Summe transformieren, so dient dazu die von Dirichlet (Crelle's Journal Bd. 47 p. 153) aufgestellte Gleichung

$$(5) \qquad \sum_{\mu+1}^{p}\left[\frac{m}{s}\right]=pq-\mu\nu+\sum_{q+1}^{\nu}\left[\frac{m}{s}\right],$$

welche man aus (2), § 1 erhält, indem man $f(s)=\frac{m}{s}$ setzt.

Die Gleichung (5) ist gleichfalls einer sehr anschaulichen geometrischen Deutung fähig.

§ 4.

Es möge jetzt der Ausdruck

$$G_\alpha(m) = \sum_{s=1}^{s=\left[\sqrt[\alpha]{m}\right]} s^\alpha \left[\frac{m}{s^\alpha}\right]$$

durch Anwendung der Gleichung (1) des § 1 transformiert werden. Zunächst ist klar, dass man die Summation bis $s = m$ ausdehnen darf, ohne den Wert der Summe zu ändern. Setzt man in (1), § 1

$$f(s) = \frac{m}{s^\alpha}, \qquad \varphi(s) = s^\alpha,$$

$$\mu = 1, \qquad p = m,$$

so wird $\nu = m$ und wenn $\alpha > 1$ ist, $q = 0$. Wir machen die Voraussetzung, dass α die Einheit übertrifft; dann ergibt sich

$$\sum_{s=2}^{s=m} s^\alpha \left[\frac{m}{s^\alpha}\right] = -m + \sum_{s=1}^{s=m} \psi\left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{s}}\right],$$

$$= -m + \sum_1^m \sum_1^{\left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{s}}\right]} s^\alpha,$$

oder

$$G_\alpha(m) = \sum_1^m \sum_1^{\left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{s}}\right]} s^\alpha$$

$$= 1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + \left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{1}}\right]^\alpha$$

$$+ 1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + \left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{2}}\right]^\alpha$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$+ \left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{m}}\right]^\alpha.$$

Beispiel $m = 7$, $a = 2$.

$$\sum_{s=1}^{s=7} s^2 \left[\frac{7}{s^2}\right] = 1 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = 11.$$

$$\sum_{s=1}^{s=7} \sum_{1}^{\left[\sqrt{\frac{7}{s}}\right]} s^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 11.$$

Bevor wir die Umformung für den Fall $a = 1$ ausführen, wollen wir die Transformationsgleichungen für den Fall hinschreiben, dass die Function $f(s)$ die Gestalt $\frac{m}{s}$ hat. Es ergeben sich die Relationen

$$(1) \qquad \sum_{\mu+1}^{p} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) = q\Psi(p) - \nu\Psi(\mu) + \sum_{q+1}^{\nu} \Psi\left[\frac{m}{s}\right],$$

$$(2) \qquad \sum_{1}^{p} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) = q\Psi(p) - \nu\Psi(\mu) + \sum_{1}^{\mu} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) + \sum_{q+1}^{\nu} \Psi\left[\frac{m}{s}\right];$$

für $p = m$ wird $q = 1$ und $q\Psi(p) = \Psi(m)$, also

$$(3) \qquad \sum_{1}^{m} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) = -\nu\Psi(\mu) + \sum_{1}^{\mu} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) + \sum_{1}^{\nu} \Psi\left[\frac{m}{s}\right].$$

Setzt man in (3) $\mu = 1$, so wird $\nu = m$, die beiden ersten Glieder der rechten Seite heben sich auf, und es kommt

$$(4) \qquad \sum_{1}^{m} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) = \sum_{1}^{m} \Psi\left[\frac{m}{s}\right].$$

Diese vier Formeln sind der Abhandlung Dirichlets *Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie* entnommen.

Wenn man in (4) $\varphi(s) = s$ setzt, so ergibt sich

$$\sum_{1}^{m} s\left[\frac{m}{s}\right] = \sum_{1}^{m} \sum_{1}^{\left[\frac{m}{s}\right]} s = \frac{1}{2}\sum_{1}^{m} \left\{\left[\frac{m}{s}\right]^2 + \left[\frac{m}{s}\right]\right\},$$

$$= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{\left[\frac{m}{2}\right]\left\{\left[\frac{m}{2}\right] + 1\right\}}{2} + \dots + \frac{\left[\frac{m}{m}\right]\left\{\left[\frac{m}{m}\right] + 1\right\}}{2}.$$

Die oben aufgestellte Formel behält also ihre Gültigkeit auch für $\alpha = 1$.

Wir hatten die Gleichung

$$\mathfrak{F}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right].$$

Aus

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{m+2x-1}{2x-1}$$

folgt

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{m+2y-1}{2y-1},$$

und hierauf beruht die Umformung

$$\mathfrak{F}(m) = -\mu\nu + \sum_{s=1}^{s=\mu} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right] + \sum_{s=1}^{s=\nu} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right],$$

wo μ eine beliebige zwischen 1 und $\frac{m+1}{2}$ liegende ganze Zahl und $\nu = \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2\mu-1}{2\mu-1}\right]$ ist.

Der Ausdruck

$$\mathfrak{G}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} (2s-1) \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right]$$

erhält durch Anwendung von (3), § 1 die Gestalt

$$\mathfrak{G}(m) = -\nu\mu^2 + \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 + \sum_{s=1}^{s=\mu} (2s-1) \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right] + \sum_{s=2}^{s=\nu} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right]^2,$$

indem für $\varphi(s) = 2s-1$, $\Psi(s) = s^2$ wird. Vereinigt man das zweite Glied der rechten Seite mit dem letzten, so ergibt sich

$$\mathfrak{G}(m) = -\nu\mu^2 + \sum_{s=1}^{s=\mu} (2s-1) \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right] + \sum_{s=1}^{s=\nu} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right]^2.$$

Für $\mu = 1$ wird $\nu = \frac{m+1}{2}$, die beiden ersten Glieder der rechten Seite zerstören sich, und man erhält die Gleichung

$$\mathfrak{G}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right]^2.$$

Beispiel $m = 13$.

$$\sum_{s=1}^{s=7} (2s-1)\left[\frac{1}{2}\frac{7+2s-1}{2s-1}\right] = 1\left[\frac{14}{2}\right] + 3\left[\frac{16}{6}\right] + 5\left[\frac{18}{10}\right] + 7\left[\frac{20}{14}\right] + 9\left[\frac{22}{18}\right]$$

$$+ 11\left[\frac{24}{22}\right] + 13\left[\frac{26}{26}\right] = 7 + 6 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 58.$$

$$\sum_{s=1}^{s=7} \left[\frac{1}{2}\,\frac{7+2s-1}{2s-1}\right]^2 = 7^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 58.$$

Es ist

$$K(m) = \sum_{s=1}^{s=m} s \cdot \left[\frac{m}{s}\right] - \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} s \cdot \left[\frac{m}{2s}\right].$$

Nun ist nach (5)

$$\sum_{s=1}^{s=m} s \cdot \left[\frac{m}{s}\right] = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=m} \left\{\left[\frac{m}{s}\right]^2 + \left[\frac{m}{s}\right]\right\},$$

ferner ist

$$\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} s \cdot \left[\frac{m}{2s}\right] = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} \left[\frac{m}{2s}\right]\left\{\left[\frac{m}{2s}\right] + 1\right\}.$$

Demnach ergibt sich die Darstellung

$$K(m) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=m} \left\{\left[\frac{m}{s}\right]^2 + \left[\frac{m}{s}\right]\right\} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} \left\{\left[\frac{m}{2s}\right]^2 + \left[\frac{m}{2s}\right]\right\},$$

der man auch folgende Gestalt geben kann.

$$K(m)=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{m}{1}\right]^2+\left[\frac{m}{1}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]^2+\left[\frac{m}{3}\right]+\left[\frac{m}{5}\right]^2+\left[\frac{m}{5}\right]+\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m+1}{2}\right]}\left\{\left[\frac{m}{2s-1}\right]^2+\left[\frac{m}{2s-1}\right]\right\}.$$

Beispiel $m=10$.

$$\left[\frac{10}{1}\right]+\left[\frac{10}{2}\right]+3\left[\frac{10}{3}\right]+2\left[\frac{10}{4}\right]+5\left[\frac{10}{5}\right]+3\left[\frac{10}{6}\right]+7\left[\frac{10}{7}\right]+4\left[\frac{10}{8}\right]$$

$$+9\left[\frac{10}{9}\right]+5\left[\frac{10}{10}\right]=66.$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{10}{1}\right]^2+\left[\frac{10}{1}\right]+\left[\frac{10}{3}\right]^2+\left[\frac{10}{3}\right]+\left[\frac{10}{5}\right]^2+\left[\frac{10}{5}\right]+\left[\frac{10}{7}\right]^2+\left[\frac{10}{7}\right]\right.$$

$$\left.+\left[\frac{10}{9}\right]^2+\left[\frac{10}{9}\right]\right\}=\frac{1}{2}.132=66.$$

Wir wollen jetzt den Ausdruck

$$L(m)=\sum_{s=1}^{s=m}(-1)^s.s\left[\frac{m}{s}\right]$$

mit Hülfe der Gleichung (4) umformen, indem wir $\varphi(s)=(-1)^s.s$ setzen.

Es ergibt sich sofort

$$\sum_{s=1}^{s=m}(-1)^s.s\left[\frac{m}{s}\right]=\sum_{s=1}^{s=m}\sum_{1}^{\left[\frac{m}{s}\right]}(-1)^s.s.$$

Nun ist

$$\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{s}\right]}(-1)^s.s=(-1)^{\left[\frac{m}{s}\right]}\left[\frac{\left[\frac{m}{s}\right]+1}{2}\right],$$

mithin

$$L(m)=\sum_{s=1}^{s=m}(-1)^{\left[\frac{m}{s}\right]}\left[\frac{\left[\frac{m}{s}\right]+1}{2}\right].$$

Beispiel $m = 7$.

$$L(7) = -\left[\frac{7}{1}\right] + 2\left[\frac{7}{2}\right] - 3\left[\frac{7}{3}\right] + 4\left[\frac{7}{4}\right] - 5\left[\frac{7}{5}\right] + 6\left[\frac{7}{6}\right] - 7\left[\frac{7}{7}\right] = -9.$$

Anderseits ist auch

$$-4 - 2 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -9.$$

II.

Über Summen von grössten Ganzen von Functionswerten, bei denen die Function mit wachsendem Argument fortwährend wächst.

§ 5.

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, wie aus dem Dirichlet'schen Satze eine Reihe von Folgerungen sich ergeben, indem derselbe sich auf die Summenfunctionen, die bei der Betrachtung der Teilbarkeit der Zahlen auftreten, ohne Mühe anwenden lässt. In ähnlicher Weise lassen sich der dritte Gauss'che Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste, verschiedene von Zeller in den Nachrichten der Gött. Ges. d. W. vom Jahre 1879 veröffentlichte Sätze, ein allgemeiner Satz von Sylvester und eine Reihe anderer Folgerungen aus einem Satze ableiten, den wir jetzt beweisen wollen.

Eine Function $y = f(x)$ möge, während x von $x = \mu$ bis $x = p$ wächst, immerfort zunehmen. Dann wird die durch Umkehrung aus $y = f(x)$ entstehende Function $x = F(y)$ ebenfalls wachsen, wenn y von $y = f(\mu)$ bis $y = f(p)$ wächst. μ und p seien ganze Zahlen, ferner sei

$$[f(\mu)] = \nu, \qquad [f(p)] = q.$$

Wir bilden die Reihe

$$[f(\mu)], \qquad [f(\mu + 1)], \quad \ldots \quad [f(s)], \quad \ldots \quad [f(p)],$$

wo jedes Glied kleiner als das folgende oder demselben gleich ist. Wir

machen zunächst die Voraussetzung, dass keiner der in Betracht kommenden Werte $f(s)$ gleich einer ganzen Zahl ist, so dass immer $f(s) > [f(s)]$ ist mit Ausschluss der Gleichheit. Welche Glieder der obigen Reihe sind einer gegebenen zwischen ν und q liegenden ganzen Zahl t gleich? Zur Beantwortung dieser Frage suchen wir den völlig bestimmten Zeiger desjenigen Gliedes auf, dessen Wert unter t liegt, während der des folgenden über t liegt oder demselben gleich ist. Es ist also

$$[f(s)] < t, \qquad [f(s+1)] \geqq t,$$

oder

$$f(s) < t, \qquad f(s+1) > t.$$

Hieraus folgen vermöge der über die Function $y = f(x)$ gemachten Voraussetzung die Ungleichheiten

$$s < F(t), \qquad s + 1 > F(t),$$

oder, was dasselbe ist

$$s = [F(t)].$$

In derselben Weise ist der Zeiger des vom Anfange entferntesten Gliedes, dessen Wert unter $t+1$ liegt, gleich $[F(t+1)]$; es kommt also der Wert t denjenigen Gliedern zu, deren Zeiger der doppelten Bedingung genügen

$$[F(t+1)] \geqq s > [F(t)].$$

Wegen des gegebenen Anfangs und Endes der Reihe erhält diese Bestimmung für $t = \nu$ die Modifikation, dass an Stelle der zweiten Bedingung $s \geqq \mu$ tritt, während für $t = q$ an Stelle der ersten Bedingung $s \leqq p$ tritt.

Wir wollen nun die Summe

$$\sum_{\mu+1}^{p} [f(s)]\varphi(s)$$

dadurch transformieren, dass wir zuerst alle Glieder vereinigen, in denen $[f(s)]$ einen und denselben Wert hat, und dann die so erhaltenen Partialsummen addieren. Die Summe der Glieder in denen $[f(s)]$ einen bestimmten zwischen ν und q liegenden Wert hat, erhält, wenn man

$$\sum_{1}^{s} \varphi(s) = \Psi(s)$$

setzt, den Ausdruck

$$t\{\Psi[F(t+1)] - \Psi[F(t)]\};$$

für $t = \nu$ und $t = q$ treten an Stelle dieses Ausdrucks bezw. die Werte

$$\nu\{\Psi[F(\nu+1)] - \Psi(\mu)\}$$

und

$$q\{\Psi(p) - \Psi[F(q)]\}.$$

Bei der Addition aller dieser Partialsummen erscheint abgesehen von den beiden Gliedern $-\nu\Psi(\mu)$ und $q\Psi(p)$ jedes Glied mit der negativen Einheit multipliziert; es ergibt sich also

$$\sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s) = -\nu\Psi(\mu) + q\Psi(p) - \sum_{\nu+1}^{q}\Psi[F(s)]$$

oder

$$(1) \qquad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s) + \sum_{\nu+1}^{q}\Psi[F(s)] = -\nu\Psi(\mu) + q\Psi(p).$$

Setzt man $\varphi(s) = 1$, so wird $\Psi(s) = s$ und es kommt

$$(2) \qquad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q}[F(s)] = -\mu\nu + pq.$$

Diese Gleichungen gelten unter der Voraussetzung, dass keiner der betrachteten Werte $f(s)$ einen ganzzahligen Wert hat. Wir wollen jetzt diese Voraussetzung fallen lassen und untersuchen in welcher Weise sich die Gleichungen (1) und (2) für den Fall ändern, dass unter den in Betracht kommenden Werten von $f(s)$ einige gleich einer ganzen Zahl sind. Ein ganzzahliger Wert von $f(\mu)$ vermag offenbar den Wert des Ausdruckes $\sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s)$ nicht zu beeinflussen; es seien demgemäss $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_\rho$ diejenigen zwischen $\mu+1$ und p mit Einschluss beider Grenzen liegenden ganzen Zahlen, für welche $f(s)$ gleich einer ganzen Zahl wird. Wiederholt man die Betrachtung, welche zu der Gleichung (1) geführt hat, so stellt sich heraus, dass die Werte $\varphi(s_1), \varphi(s_2), \varphi(s_3), \ldots, \varphi(s_\rho)$ sämtlich

einmal zu wenig mitgerechnet sind, es ist demnach auf der rechten Seite von (1) das Aggregat

$$\varphi(s_1) + \varphi(s_2) + \varphi(s_3) + \dots + \varphi(s_\rho)$$

zu addieren.

Somit erhalten wir den folgenden Satz:

Eine Function $y = f(x)$ möge mit wachsendem x von $x = \mu$ bis $x = p$ fortwährend zunehmen, wo μ und p ganze Zahlen bedeuten. $x = F(y)$ sei die aus $y = f(x)$ durch Umkehrung entstehende Function, ferner sei $[f(\mu)] = \nu$, $[f(p)] = q$ und $\varphi(s)$ eine beliebige Function. Wenn alsdann $s_1, s_2, \dots, s_\rho$ diejenigen ganzzahligen zwischen $\mu + 1$ und p mit Einschluss beider Grenzen liegenden Argumente sind, für welche die Function $y = f(x)$ gleich einer ganzen Zahl wird, so ist

$$(3)\qquad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s) + \sum_{q+1}^{\nu}\Psi[F(s)]$$
$$= -\nu\Psi(\mu) + q\Psi(p) + \varphi(s_1) + \varphi(s_2) + \dots + \varphi(s_\rho),$$

wo $\Psi(s) = \sum_{1}^{s}\varphi(s)$ ist.

Für $\varphi(s) = 1$ gestaltet sich dieses Resultat wesentlich einfacher. Ist ρ diejenige Zahl, welche angibt, wie viele unter den Functionswerten $f(\mu + 1), f(\mu + 2), \dots, f(p)$ ganze Zahlen sind, so ist

$$(4)\qquad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] + \sum_{q+1}^{\nu}[F(s)] = -\mu\nu + pq + \rho.$$

Diese Gleichung lässt sich auch auf folgende Art beweisen.

Die Function $y = f(x)$ sei zunächst nicht im Stande, für ganzzahlige Werte von x ganzzahlige Werte anzunehmen, die Zahl ρ sei also gleich Null, und die Gleichung

$$(5)\qquad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q}[F(s)] = -\mu\nu + pq$$

werde für einen bestimmten Wert von p als richtig angenommen. Dann fügen wir der ersten Summe der linken Seite von (2) das Glied

$$[f(p + 1)] = q + l,$$

der zweiten Summe die Glieder $[F(q+1)]$, $[F(q+2)]$, ..., $[F(q+l)]$ zu. Hierdurch erhält die linke Seite die Gestalt

$$\sum_{\mu+1}^{p+1}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q+l}[F(s)]. \tag{6}$$

Nun folgt aus $[f(p)] = q$, $[f(p+1)] = q + l$ die Richtigkeit folgender Ungleichheiten

$$q + 1 > f(p) > q,$$
$$q + l + 1 > f(p+1) > q + l,$$

oder

$$f(p) = q + \theta,$$
$$f(p+1) = q + l + \theta_1,$$

wo θ und θ_1 positive echte Brüche bezeichnen. Hieraus folgt weiter

$$p = F(q+\theta),$$
$$p + 1 = F(q + l + \theta_1),$$

und hieraus ergeben sich mit Berücksichtigung des Umstandes, dass auch die Function $x = F(y)$ mit zunehmendem Argument beständig wächst, die Beziehungen

$$[F(q+1)] = p,$$
$$[F(q+2)] = p,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$[F(q+l)] = p.$$

Es ist also

$$\sum_{s=q+1}^{s=q+l}[F(s)] = pl.$$

Demnach erhält der Ausdruck (6) den Wert

$$-\mu\nu + pq + q + l + pl = -\mu\nu + (p+1)(q+l),$$

also

$$\sum_{\mu+1}^{p+1}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q+l}[F(s)] = -\mu\nu + (p+1)(q+l).$$

Ist somit die Gleichung (5) für einen bestimmten Wert von p richtig, so ist sie auch für jeden über p liegenden ganzzahligen Wert richtig. Sie ist aber offenbar richtig für $p = \mu$, indem alsdann $q = \nu$ wird und in der Gleichung

$$(7) \qquad \sum_{\mu+1}^{\mu}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{\nu}[F(s)] = -\mu\nu + \mu\nu$$

die Summen der linken Seiten überhaupt keine Glieder enthalten, und die rechte Seite identisch verschwindet.

Lässt man die Möglichkeit offen, dass $f(s)$ für ganzzahlige Werte von s gleich einer ganzen Zahl werde, so wird das obige Verfahren nur in so weit alteriert, als für einen ganzzahligen Wert von $f(p+1)$ die Zahl $[F(q+l)]$ gleich $p+1$ wird. Es ist also für jeden ganzzahligen Wert von $f(s)$ rechts eine Einheit zu addieren. Hieraus folgt mit Berücksichtigung von (7) sofort die Richtigkeit von (4).

Dieser Beweis ist einem Verfahren nachgebildet, welches SYLVESTER anwendet, um eine speciellere Gleichung zu beweisen, von welcher weiter unten (p. 27) die Rede sein wird.

Vielleicht verdient es erwähnt zu werden, dass auch die Gleichung (2) des § 1 eines ganz ähnlichen Beweises fähig ist.

§ 6.

Die Gleichung (4) des vorigen Paragraphen lässt sich auf eine einfache Weise geometrisch beweisen. Man konstruiere die Curve $y = f(x)$. Dieselbe wird infolge der über die Function $y = f(x)$ gemachten Voraussetzung von $x = \mu$ bis $x = p$ fortwährend nach oben geneigt sein. Dann ziehe man in den Entfernungen μ und p Parallelen zur y-Axe und in den Entfernungen $f(\mu)$ und $f(p)$ Parallelen zur x-Axe. Die erstgenannten Parallelen bezeichne man resp. mit ST und PQ, die letztgenannten Parallelen resp. mit UT und RQ. Nun stellt offenbar das erste Glied der linken Seite der zu beweisenden Gleichung die Anzahl derjenigen Gitterpunkte dar, welche in dem Flächenstück $PQTS$ liegen, wobei die auf der Geraden PQ und der Curve QT liegenden Punkte mit ganzzahligen Coor-

dinaten mitzurechnen sind (mit Ausschluss des Punktes T, falls dieser ein Gitterpunkt sein sollte).

Das zweite Glied der linken Seite gibt in ganz entsprechender Weise die Anzahl derjenigen Gitterpunkte an, welche von dem Viereck $QRUT$ eingeschlossen werden, wobei etwaige auf den Linien QT und QR liegende Gitterpunkte wiederum mitzurechnen sind. Die in Bezug auf den Punkt T oben gemachte Bemerkung gilt auch hier. Hieraus ist ersichtlich, dass man die Anzahl pq der in dem Rechteck $OPQR$, jedoch mit Ausschluss der beiden Axen, enthaltenen Gitterpunkte erhält, indem man einerseits die Summe

$$\sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q}[F(s)]$$

um die Anzahl ρ derjenigen Gitterpunkte vermindert, welche auf dem in Betracht kommenden Stücke der Curve $y = f(x)$ liegen, und anderseits die Anzahl $\mu\nu$ der in dem Rechteck $OSTU$ liegenden Gitterpunkte addiert. Dies ist aber der Inhalt des in Rede stehenden Satzes.

§ 7.

Nunmehr wollen wir von dem so eben auf analytischem und geometrischem Wege bewiesenen Satze einige Anwendungen machen. Um zunächst ein Beispiel zu wählen, in welchem die Function $y = f(x)$ transcendent ist, setzen wir

$$y = e^x.$$

Hieraus entsteht durch Umkehrung

$$x = \log y.$$

Setzt man dies in (4), § 5 ein und nimmt die Zahl $\mu = 0$, so wird $\nu = [e^0] = 1$. Da, wie Hermite in der Abhandlung *Sur la fonction exponentielle* nachgewiesen hat, die Basis e der natürlichen Logarithmen auf eine ganzzahlige Potenz s erhoben, niemals eine ganze Zahl werden kann (natürlich abgesehen von $s = 0$), oder, was dasselbe ist, da der natürliche Logarithmus einer ganzen Zahl s (mit Ausnahme von $s = 1$)

niemals gleich einer ganzen Zahl sein kann, so ist im vorliegenden Falle die Zahl $\rho = 0$. Da ferner $\log 1 = 0$, so ergibt die Anwendung von (4), § 5 die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=p}[e^s] + \sum_{s=1}^{s=q}[\log s] = pq,$$

wo p eine beliebige positive ganze Zahl und $q = [e^p]$ ist. Das Aggregat auf der linken Seite ist also stets gleich dem Produkt aus den Gliederanzahlen der beiden Summen.

Die wirkliche Ausführung der Rechnung bestätigt dieses Resultat. Für $p = 5$ z. B. wird $q = [e^5] = 148$, ferner ist

$$\sum_1^5[e^s] = 231, \qquad \sum_1^{148}[\log s] = 509,$$

also

$$\sum_1^5[e^s] + \sum_1^{148}[\log s] = 740 = 5 \cdot 148.$$

Ein ähnlicher Satz gilt für jede beliebige Basis eines Logarithmensystems. Für die Basis 10 z. B. gilt die Gleichung

$$\sum_1^p 10^s + \sum_1^q[\log s] = p(q+1),$$

wo $q = 10^p$ ist. Die Zahl ρ hat hier den Wert p. So hat man z. B. für $p = 3$, $q = 1000$

$$\sum_1^3 10^s + \sum_1^{1000}[\log s] = 1110 + 1893 = 3003 = 3 \cdot (1000 + 1).$$

Wir wenden uns jetzt zu solchen Summen von grössten Ganzen, bei denen $y = f(x)$ eine rationale ganze Function von x ist, und zwar beschränken wir die Untersuchung auf solche Functionen, bei denen die Variable x nur in einem einzigen Gliede vorkommt. Es sei demgemäss

$$y = \frac{ax^\alpha + d}{m},$$

wo a, α und m beliebige positive ganze Zahlen mit Ausschluss der Null,

und d zunächst eine positive unter m liegende ganze Zahl bedeuten möge. Die durch Umkehrung entstehende Function hat die Form

$$x = \sqrt[a]{\frac{my - d}{a}}.$$

Die Function $y = \frac{ax^a + d}{m}$ hat von dem Werte $x = 0$ an die Eigenschaft, mit wachsendem x stets zuzunehmen; es ist daher gestattet, bei Anwendung unseres Satzes die Zahl μ gleich Null zu nehmen. Dann wird $\nu = \left[\frac{d}{m}\right] = 0$, und es ergibt sich

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as^a + d}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}\right] - \rho = pq.$$

Hier bedeutet p eine beliebige positive ganze Zahl; ferner ist

$$q = \left[\frac{ap^a + d}{m}\right]$$

und ρ die Anzahl derjenigen unter den Brüchen

$$\frac{a.1^a + d}{m}, \quad \frac{a.2^a + d}{m}, \quad \ldots \quad \frac{a.p^a + d}{m},$$

welche ganzzahlige Werte haben.

Es ist klar, dass die Zahl ρ auch gleich der Anzahl derjenigen unter den Wurzelwerten

$$\sqrt[a]{\frac{m.1 - d}{a}}, \quad \sqrt[a]{\frac{m.2 - d}{a}}, \quad \ldots \quad \sqrt[a]{\frac{m.q - d}{a}}$$

ist, welche ganze Zahlen sind. Statt nun die Zahl ρ auf der linken Seite von (1) zu subtrahieren, kann man auch unter dem Wurzelzeichen zum Zähler die negative Einheit hinzufügen. Denn für den Fall, dass $\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}$ keine ganze Zahl ist, ist $\left[\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}\right] = \left[\sqrt[a]{\frac{ms - d - 1}{a}}\right]$; ist aber $\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}$ eine ganze Zahl, so ist $\left[\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}\right] - 1 = \left[\sqrt[a]{\frac{ms - d - 1}{a}}\right]$, und da der

Ausdruck $\sqrt[a]{\dfrac{ms-d}{a}}$ ρ mal zu einer ganzen Zahl wird, während s die Reihe der Werte $1, 2, \ldots, q$ durchläuft, so ergibt sich

$$\sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms-d}{a}}\right]-\rho=\sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms-d-1}{a}}\right].$$

Somit erhält man die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as^{a}+d}{m}\right]+\sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms-d-1}{a}}\right]=pq. \tag{2}$$

Für $d \geqq m$ hat $\nu=\left[\dfrac{d}{m}\right]$ einen von Null verschiedenen Wert; es ist alsdann

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as^{a}+d}{m}\right]+\sum_{\nu+1}^{q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms-d-1}{a}}\right]=pq. \tag{3}$$

Diese Gleichung welche die Gleichung (2) als speciellen Fall enthält, gilt auch dann noch, wenn d negativ ist.

Für $a=1$ erhält die Gleichung (3) die Gestalt

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{s^{a}+d}{m}\right]+\sum_{s=\left[\frac{d}{m}\right]+1}^{s=q}\left[\sqrt[\alpha]{ms-d-1}\right]=pq. \tag{4}$$

Indem man den Zahlen α und d specielle Werte beilegt, kann man aus (3) und (4) eine Reihe von Sätzen ableiten, welche ZELLER in der schon mehrfach erwähnten Abhandlung veröffentlicht hat.

Es sei z. B. $\alpha=1$, so kommt

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as+d}{m}\right]+\sum_{s=\left[\frac{d}{m}\right]+1}^{s=q}\left[\frac{ms-d-1}{a}\right]=pq, \tag{5}$$

$$q=\left[\frac{ap+d}{m}\right].$$

Setzt man $\alpha = 2$, so geht (4) in die folgende Gleichung über

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{s^2+d}{m}\right]+\sum_{s=\left[\frac{d}{m}\right]+1}^{s=q}\left[\sqrt{ms-d-1}\right]=pq, \tag{6}$$

$$q=\left[\frac{p^2+d}{m}\right].$$

Für $d = 0$ endlich nehmen (4), (5), (6) resp. die Gestalt an

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{s^\alpha}{m}\right]+\sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[\alpha]{ms-1}\right]=pq,$$

$$q=\left[\frac{p^\alpha}{m}\right];$$

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as}{m}\right]+\sum_{s=1}^{s=q}\left[\frac{ms-1}{a}\right]=pq,$$

$$q=\left[\frac{ap}{m}\right];$$

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{s^2}{m}\right]+\sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt{ms-1}\right]=pq,$$

$$q=\left[\frac{p^2}{m}\right].$$

§ 8.

Bekanntlich beruht der dritte GAUSS'sche Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste, welcher im Jahre 1808 in den Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis veröffentlicht worden ist (GAUSS' Werke Bd. II. p. 3 sqq.), auf dem Satze:

Wenn p und q positive ungerade relative Primzahlen sind, so ist

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{p}{q}s\right]+\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}}\left[\frac{q}{p}s\right]=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}. \tag{1}$$

Diese Gleichung hat man seitdem auf verschiedene Arten bewiesen und verallgemeinert; aber alle mir bekannten Verallgemeinerungen sind nur specielle Fälle des in § 5 bewiesenen allgemeinen Satzes, wie im einzelnen nachgewiesen werden soll.

Gauss selbst leitet die Gleichung (1) aus folgendem Satze ab:

Ist x eine positive Grösse, welche so beschaffen ist, dass unter den Vielfachen derselben $x, 2x, \ldots, nx$ keine einzige ganze Zahl vorkommt, so ist

$$(2) \qquad \sum_{s=1}^{s=n}[sx] + \sum_{s=1}^{s=h}\left[\frac{s}{x}\right] = nh,$$

wo $h = [nx]$ ist.

Nimmt man in (4), § 5 die Function $f(s) = xs$, so hat die durch Umkehrung aus $f(s)$ entstehende Function die Gestalt $F(s) = \frac{s}{x}$; die Zahl ρ verschwindet infolge der Voraussetzung, und es folgt ohne weiteres die Richtigkeit der Gleichung (2), wenn man $\mu = 0$ nimmt.

Aus (2) leitet nun Gauss die Gleichung (1) ab, indem er $x = \frac{p}{q}$ setzt und annimmt, dass p kleiner sei als q, was offenbar gestattet ist. Alsdann ist

$$\left[\frac{\frac{q-1}{2}p}{q}\right] = \left[\frac{qp-p}{2q}\right] = \left[\frac{p-\frac{p}{q}}{2}\right] = \frac{p-1}{2},$$

und hieraus ergibt sich sofort die Richtigkeit von (1).

Zeller hat die Gleichung (1) in der Weise erweitert, dass er an Stelle der Ausdrücke

$$\frac{1 \cdot p}{q}, \quad \frac{2 \cdot p}{q}, \quad \frac{3 \cdot p}{q}, \quad \ldots,$$

welche eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden, arithmetische Reihen höherer Ordnung treten liess. Die betreffenden Sätze sind im vorigen Paragraphen besprochen und aus unserem allgemeinen Satze abgeleitet worden.

Sylvester leitet in dem Aufsatze *Sur la fonction* $E(x)$ (Comptes Rendus des séances de l'académie des sciences de Paris, tome L, p. 732) das Reciprocitätsgesetz aus folgendem Satze ab:

Wenn p und q zwei beliebige positive Grössen sind und λ eine positive Grösse bezeichnet, welche kleiner ist, als der kleinste Wert a, welcher zur selben Zeit ap und aq zu ganzen Zahlen macht, so besteht die Gleichung

$$(3) \qquad \sum_{s=0}^{s=[\lambda q]}\left[\frac{sp}{q}\right]+\sum_{s=0}^{s=[\lambda p]}\left[\frac{sq}{p}\right]=[\lambda p]\cdot[\lambda q].$$

Den Beweis dieses Satzes führt SYLVESTER in folgender Weise. Die Gleichung (3) sei richtig für alle Werte von λ, welche unter einer gewissen Grösse liegen. Von dieser Grösse aus lassen wir λ allmählich stetig wachsen. Kein einziges Glied unserer Gleichung wird seinen Wert ändern, bis λp oder λq ganze Zahlen werden, was nach Voraussetzung nicht gleichzeitig geschehen kann. Gesetzt nun, λp werde zuerst eine ganze Zahl. Dann nimmt die zweite Summe der linken Seite zu um das Glied $\left[\lambda p\frac{q}{p}\right]=[\lambda q]$, während die erste ungeändert bleibt. Auf der rechten Seite bleibt $[\lambda q]$ ungeändert, während $[\lambda p]$ um eine Einheit zunimmt, es wächst also auch die rechte Seite der Gleichung um $[\lambda q]$. Unser Satz besteht also für den ersten Wert von λ, welcher eine Veränderung in unserer Gleichung hervorbringt, also auch für den 2ten, 3ten Wert, u. s. w., und da die Gleichung für $\lambda = 0$ richtig ist, so gilt sie allgemein für jeden unter der angegebenen Grenze liegenden Wert von λ.

Lässt man die der Grösse λ auferlegte Beschränkung fallen, so nimmt jedesmal, wenn λp und λq gleichzeitig ganze Zahlen werden, der Ausdruck

$$\sum_{s=0}^{s=[\lambda q]}\left[\frac{sp}{q}\right]+\sum_{s=0}^{s=[\lambda p]}\left[\frac{sq}{p}\right]$$

um die Summe $[\lambda p]+[\lambda q]=\lambda p+\lambda q$ zu, während $[\lambda p].[\lambda q]$ nur den Zuwachs

$$\lambda p.\lambda q-(\lambda p-1)(\lambda q-1)=\lambda p+\lambda q-1$$

erhält. Folglich hat man für jeden beliebigen Wert von λ die Gleichung

$$(4) \qquad \sum_{s=0}^{s=[\lambda q]}\left[\frac{sp}{q}\right]+\sum_{s=0}^{s=[\lambda p]}\left[\frac{sq}{p}\right]=[\lambda p]\cdot[\lambda q]+L,$$

wo L diejenige Zahl bedeutet, welche angibt, wie oft px und qx gleichzeitig ganze Zahlen werden, während x von o bis λ wächst.

Die Gleichung (3) ergibt sich, wie STERN bemerkt hat (v. die Abhandlung *Über einige Eigenschaften der Function* $E(x)$, CRELLE's Journal, Bd. 59, p. 146) sofort aus der GAUSS'schen Gleichung (2), wenn man in dieser $x = \frac{p}{q}$ und $n = [\lambda q]$ setzt. Denn wir dürfen annehmen, dass eine der beiden Grössen λp und λq eine ganze Zahl sei. Sollte dies nämlich nicht von vornherein der Fall sein, so lassen wir λ abnehmen, bis eine der beiden Grössen λp und λq eine ganze Zahl wird, und halten den Wert von λ fest, bei dem dies zuerst geschieht. Durch das beschriebene Verfahren hat keine einzige der in Betracht kommenden grössten ganzen Zahlen ihren Wert verändert. Es sei also λq eine ganze Zahl. Dann wird $\left[\frac{[\lambda q]p}{q}\right] = [\lambda p] = h$, und hiermit ist (3) aus (2) abgeleitet.

Sodann kann man die Gleichungen (3) und (4) auch unmittelbar aus (4), § 5 erhalten, indem man die Function $f(s) = \frac{p}{q}s$, die Zahl μ gleich Null und die dortige Zahl p gleich $[\lambda q]$ nimmt. Aus der zuletzt erwähnten Gleichung folgt sofort

$$\sum_{s=1}^{s=[\lambda q]}\left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right]}\left[\frac{sq}{p}\right] = [\lambda q]\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right] + \rho,$$

wo die Zahl ρ angibt, wie viele von den vorkommenden Brüchen $\frac{sp}{q}$ ganzzahlige Werte haben.

Nun könnten wir wieder den eben eingeschlagenen Weg befolgen, um zu zeigen, dass man unter den beiden Grössen p und q stets die eine, q, so auswählen kann, dass $\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right] = [\lambda p]$ wird; wir ziehen es aber vor, diesen Beweis auf einem von STERN (a. a. O.) angegebenen Wege zu führen. Wir setzen

$$\lambda q = [\lambda q] + e, \qquad \lambda p = [\lambda p] + f;$$

dann ist

$$\frac{p}{q}[\lambda q] = \lambda p - \frac{ep}{q} = [\lambda p] + \frac{fq - ep}{q}.$$

Ist nun $fq = ep$, so folgt sofort

$$\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right] = [\lambda p],$$

andernfalls kann man für q denjenigen der beiden Werte p und q nehmen, für welchen $fq > ep$ ist, so dass $0 < \frac{fq - ep}{q} < 1$ wird. Es ist also wiederum

$$\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right] = \left[[\lambda p] + \frac{fq - ep}{q}\right] = [\lambda p].$$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass die Zahl ρ mit der obigen Zahl L übereinstimmt. Es folgt dies daraus, dass jedesmal, wenn xp und xq gleichzeitig ganze Zahlen werden, auch $[xq]\frac{p}{q} = xp$ und $[xp]\frac{q}{p} = xq$ ganze Zahlen sein müssen.

Aus (3) zieht nun Stern eine Reihe von Folgerungen. Sind p und q relative Primzahlen und e und f resp. die kleinsten positiven Reste von p und q nach den Moduln m und n, also $\frac{p-e}{m}$ und $\frac{q-f}{n}$ ganze Zahlen, ist ferner k eine positive ganze Zahl von der Beschaffenheit, dass $ke < m$ und $kf < n$ ist, so besteht, wie sich leicht zeigen lässt, die Relation

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{k(q-f)}{n}} \left[\frac{spn}{qm}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{k(p-e)}{m}} \left[\frac{sqm}{pn}\right] = \frac{k^2(q-f)(p-e)}{mn}. \tag{5}$$

Für $k = 1$ ist die Bedingung $ke < m$, $kf < n$ erfüllt; es ist demnach

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-f}{n}} \left[\frac{spn}{qm}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{p-e}{m}} \left[\frac{sqm}{pn}\right] = \frac{(q-f)(p-e)}{mn}. \tag{6}$$

Für $m = n$ geht (5) über in

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{k(q-f)}{m}} \left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{k(p-e)}{m}} \left[\frac{sq}{p}\right] = \frac{k^2(q-f)(p-e)}{m^2}, \tag{7}$$

und für den Fall, dass $e = f = 1$ ist, kommt

$$(8) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{k(q-1)}{m}} \left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{k(p-1)}{m}} \left[\frac{sq}{p}\right] = \frac{k^2(p-1)(q-1)}{m^2}.$$

Die Gleichung (8) ist zuerst von SYLVESTER (a. a. O.) aufgestellt worden; sie enthält als speciellen Fall folgenden Satz von EISENSTEIN (CRELLE's Journal XXVII, p. 281):

Sind p und q relative Primzahlen und beide $\equiv 1 \pmod m$, so ist

$$(9) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{m}} \left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{m}} \left[\frac{sq}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{m^2};$$

hieraus ergibt sich für $m = 2$ die Gleichung (1).

Selbstverständlich lassen sich die Relationen (1) und (5) bis (9) auch unmittelbar aus dem in § 5 bewiesenen Satze herleiten. Die unter dem zweiten Summenzeichen befindliche Function ist jedesmal die Umkehrung der unter dem ersten Summenzeichen befindlichen Function, ferner steht auf der rechten Seite überall das Produkt aus den Gliederanzahlen der beiden Summen, und die Zahl ρ verschwindet infolge der gemachten Voraussetzungen mit Notwendigkeit. Da ausserdem für $\mu = 0$ überall auch $\nu = 0$ wird, so handelt es sich jedesmal nur um den Nachweis, dass man unter den völlig gleichberechtigten Zahlen p und q stets die eine, q, so auswählen kann, dass das letzte Glied der ersten Summe auf der linken Seite gleich der Anzahl der Glieder der zweiten Summe wird. So ist z. B. in (9), wenn man die grössere der beiden Zahlen p und q gleich q nimmt

$$\left[\frac{(q-1)p}{mq}\right] = \left[\frac{p-\frac{p}{q}}{m}\right] = \frac{p-1}{m},$$

und damit ist die Gleichung (9) gerechtfertigt.

EISENSTEINS Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste (CRELLE's Journal XXVIII, p. 246) ist ein specieller Fall der in § 6 angestellten geometrischen Betrachtung; er beruht darauf,

dass $y = \frac{p}{q}x$ die Gleichung einer durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Geraden ist, der man auch die Form $x = \frac{q}{p}y$ geben kann, und dass, wenn p und q relative Primzahlen sind, kein einziger der in Betracht kommenden Gitterpunkte in die Gerade selbst hineinfällt.

§ 9.

Die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen kann man auch, wenn man die Zeichen p und q resp. durch m und n ersetzt, in folgender Weise schreiben

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{m}{n}s\right] + \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} \left[\frac{n}{m}s\right] = \left[\frac{m}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{2}\right].$$

In dieser Form gilt die Gleichung allgemein für zwei beliebige relative Primzahlen m und n, wie zuerst Gauss bemerkt hat (*Theorematis arithmetici demonstratio nova,* Gauss' Werke, Bd. II, p. 8; eine Anwendung findet sich in der *Theoria residuorum biquadraticorum* ibid. p. 145).

Es sei eine der beiden relativen Primzahlen gerade, die andere also ungerade. Die erstere bezeichne man mit n, die letztere mit m. Dann ist

$$\left[\left[\frac{n}{2}\right]\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{n}{2}\,\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{m}{2}\right],$$

und damit ist die Richtigkeit von (1) auch für diesen Fall dargethan.

Bezeichnet man die auf der linken Seite von (1) befindlichen Summen mit S resp. T, so hat man

$$S + T = \left[\frac{m}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{2}\right].$$

Nunmehr können wir den Wert der Summe $S + T$ auch für den Fall

angeben, dass m und n einen gemeinsamen Teiler haben. Es sei δ der grösste gemeinsame Teiler beider Zahlen, so dass die durch die Gleichungen

$$m = m'\delta,$$
$$n = n'\delta$$

definierten Zahlen m' und n' relativ prim zu einander sind. Wenn m und n beide $\equiv 1 \pmod 2$ sind, so setzen wir $m < n$ voraus; andernfalls nehmen wir n als gerade an. Alsdann führt die Wiederholung der oben angestellten Betrachtung leicht zu der Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\frac{m}{n}s\right]+\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{n}{m}s\right]=\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right]+\rho.$$

Die Zahl ρ gibt an, wie viele von den Brüchen $\frac{ms}{n}$ einen ganzzahligen Wert haben, während s die Reihe der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ durchläuft, oder was dasselbe ist, ρ ist die Zahl, welche angibt, wie viele Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ Vielfache von n' sind. Folglich ist

$$\rho = \left[\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n'}\right] = \left[\frac{\left[\frac{\delta n'}{2}\right]}{n'}\right],$$

oder vermöge der leicht zu beweisenden Gleichung

$$\left[\frac{\left[\frac{c}{a}\right]}{b}\right] = \left[\frac{c}{ab}\right]$$

(v. Dirichlet, *Zahlentheorie,* p. 28),

$$\rho = \left[\frac{\delta}{2}\right].$$

Es ist also in allen bisher betrachteten Fällen

$$S + T = \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{\delta}{2}\right].$$

Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, wo m und n ungerade und einander gleich sind. Dieser Fall lässt sich auf eine ähnliche Weise erledigen; kürzer aber führt die direkte Behandlung zum Ziel. Es ist

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{m}{m}s\right]+\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{m}{m}s\right]=2\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}}s=\left[\frac{m}{2}\right]^2+\left[\frac{m}{2}\right].$$

Nun ist aber der grösste gemeinsame Teiler von m und m die Zahl m selbst. Es gilt somit immer, was für positive ganze Zahlen m und n auch bedeuten mögen, die Gleichung

$$(2)\qquad S+T=\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{\delta}{2}\right].$$

(1) ist in (2) als specieller Fall enthalten, da der grösste gemeinsame Teiler zweier relativer Primzahlen die Einheit und $\left[\frac{1}{2}\right]=0$ ist.

Beispiel $m=9,\ n=18;\ \delta=9.$

$$S=\left[\frac{9}{18}\right]+\left[\frac{18}{18}\right]+\left[\frac{27}{18}\right]+\left[\frac{36}{18}\right]+\left[\frac{45}{18}\right]+\left[\frac{54}{18}\right]+\left[\frac{63}{18}\right]+\left[\frac{72}{18}\right]+\left[\frac{81}{18}\right]$$

$$=0+1+1+2+2+3+3+4+4=20.$$

$$T=\left[\frac{18}{9}\right]+\left[\frac{36}{9}\right]+\left[\frac{54}{9}\right]+\left[\frac{72}{9}\right]=2+4+6+8=20.$$

$$S+T=40=4.9+4=\left[\frac{9}{2}\right]\cdot\left[\frac{18}{2}\right]+\left[\frac{9}{2}\right].$$

Die Gleichung (2) kann man in folgender Weise geometrisch beweisen. Man konstruiere die Gerade $y=\frac{m}{n}x$, welche Gleichung man auch in der Form $x=\frac{n}{m}y$ schreiben kann. Hieraus folgt

$$(3)\qquad S+T=\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]+\rho,$$

wo ρ die Anzahl der Gitterpunkte bezeichnet, die auf der Diagonale des durch die Axen und durch die Geraden $y=\frac{m}{2}$ und $x=\frac{n}{2}$ gebildeten

Rechtecks liegen; hierbei ist der Schnittpunkt der beiden letztgenannten Geraden, falls derselbe ein Gitterpunkt sein sollte, mitzurechnen. Von diesen Punkten erhält man, wie leicht einzusehen ist, jeden einmal und nur einmal, indem man den Bruch $\frac{m}{n}$ auf seine kleinste Benennung $\frac{m'}{n'}$ bringt, dann $\frac{m'}{n'}$ der Reihe nach mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{\delta}{2}\right]$ multipliziert und jedesmal den Zähler der so gewonnenen Brüche zur y-Coordinate, den Nenner zur x-Coordinate eines Punktes macht. Wollte man $\frac{m'}{n'}$ mit einer ganzen Zahl r multiplizieren, die über $\left[\frac{\delta}{2}\right]$, also auch über $\frac{\delta}{2}$ liegt, so würden die Coordinaten des betreffenden Punktes $y = rm'$, $x = rn'$ resp. die Werte $\frac{m'\delta}{2} = \frac{m}{2}$ und $\frac{n'\delta}{2} = \frac{n}{2}$ übertreffen, folglich der Punkt zwar in die Gerade $y = \frac{m}{n}x$, aber ausserhalb des oben bezeichneten Rechtecks fallen. Es ist also die gesuchte Anzahl $\rho = \left[\frac{\delta}{2}\right]$, und infolge dessen geht (3) in die zu beweisende Gleichung (2) über.

§ 10.

Es soll jetzt versucht werden, gewisse Summen von grössten Ganzen analytisch auszudrücken, mit Benutzung einer oft angeführten Arbeit von Zeller und einer Reihe von Untersuchungen von Bouniakowsky (*Démonstration de quelques propositions relatives à la fonction numérique* $E(x)$. Bulletin de l'académie des sciences de S:t Pétersbourg, tome 28, p. 257 etc., p. 411 etc.; tome 29, p. 250 etc.).

Wir beschäftigen uns zunächst mit Summen von der Form

$$P_\alpha = \sum_{s=1}^{s=p-1}\left[\frac{s^\alpha}{p}\right],$$

wo p eine Primzahl und α eine positive ganze Zahl mit Ausschluss der Null bedeutet. Setzt man

$$Q_\alpha = \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right]}\left[\sqrt[\alpha]{sp}\right],$$

so ist nach dem in § 5 bewiesenen Satze

$$(1) \qquad P_\alpha + Q_\alpha = (p-1)\left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right].$$

Der Ausdruck $\left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right]$ ist eine rationale ganze Function $(\alpha-1)^{\text{ten}}$ Grades von p; es ist nämlich für $\alpha \equiv 0 \pmod 2$

$$\left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right] = p^{\alpha-1} - \alpha p^{\alpha-2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\,.\,2} p^{\alpha-3} \mp \ldots - \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots 2}{1\,.\,2\ldots(\alpha-1)},$$

und für $\alpha \equiv 1 \pmod 2$

$$\left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right] = p^{\alpha-1} - \alpha p^{\alpha-2} \pm \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots 2}{1\,.\,2\ldots(\alpha-1)} - 1.$$

Beide Gleichungen lassen sich in folgender Weise in eine einzige zusammenfassen

$$\left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right] = p^{\alpha-1} - \alpha p^{\alpha-2} \pm \ldots + (-1)^{\alpha-1}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots 2}{1\,.\,2\ldots(\alpha-1)} - 2\left\{\frac{\alpha}{2} - \left[\frac{\alpha}{2}\right]\right\}.$$

Die rechte Seite von (1) ist demnach eine rationale ganze Function von p. Stellt man nun folgende Reihe von Gleichungen auf (Zeller, Nachr. d. Götting. Ges. d. W. 1879, p. 254)

$$(2) \qquad \left| \begin{aligned} 1^\alpha &= \left[\frac{1^\alpha}{p}\right]p + r_1, \\ 2^\alpha &= \left[\frac{2^\alpha}{p}\right]p + r_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p-1)^\alpha &= \left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right]p + r_{p-1} \end{aligned} \right.$$

und addiert, so kommt

$$(3) \qquad \sum_{s=1}^{s=p-1} s^\alpha = p\,.\,P_\alpha + \sum_{s=1}^{s=p-1} r_s.$$

Der Ausdruck $\sum_{s=1}^{s=p-1} s^\alpha$, den wir mit S_α bezeichnen wollen, lässt sich nach dem Newton'schen Satze rational und ganz ausdrücken durch die

symmetrischen Grundverbindungen der Elemente $1, 2, 3, \ldots, p-1$, und diese Grundverbindungen sind nach dem WILSON'schen Satze alle durch p teilbar mit Ausnahme der einen $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)$, für welche die Kongruenz gilt

$$(-1)^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \pmod{p}.$$

S_α wird also in allen denjenigen Fällen durch p teilbar sein, in denen die Zahl $\underline{|p-1}$ zur Darstellung der Summen gleich hoher Potenzen der $p-1$ Elemente nicht erforderlich ist. Dies ist immer dann der Fall, wenn $\alpha < p-1$. Wir machen jetzt die Annahme $\alpha < p-1$. Alsdann ist S_α und somit auch $\sum_{s=1}^{s=p-1} r_s$ durch p teilbar. In denjenigen Fällen also, wo es gelingt $\sum_{s=1}^{s=p-1} r_s$ als rationale ganze Function von p darzustellen, ist P_α eine rationale ganze Function von p, von der man auch den Grad bestimmen kann. P_α lässt sich alsdann mit Hülfe der Gleichung (3) direkt bestimmen; aber es ist auch die Methode der unbestimmten Coefficienten anwendbar, so dass es nicht nötig ist, S_α und $\sum_{s=1}^{s=p-1} r_s$ wirklich zu berechnen.

Ein solcher Fall ist z. B. der, wo α und $p-1$ keinen gemeinschaftlichen Teiler haben (ZELLER, a. a. O. p. 255). Dann erscheinen nämlich, wie aus der Lehre von den Potenzresten bekannt ist (cf. DIRICHLET's *Zahlentheorie*, ed. 1879, p. 73), auf der rechten Seite der Gleichungen (2) die sämtlichen kleinsten positiven Reste von p mit Ausschluss der Null. Es wird also $\sum_{s=1}^{s=p-1} r_s = \frac{p(p-1)}{2}$, und P_α ist rational und ganz durch p darstellbar, und zwar wird die betreffende Function in p vom α^{ten} Grade sein, indem nach einer bekannten Formel

$$\begin{aligned}S_\alpha = \frac{(p-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{(p-1)^\alpha}{2} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{1} B_1 (p-1)^{\alpha-1} \\ - \frac{1}{4} B_2 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(p-1)^{\alpha-3} \\ + \frac{1}{6} B_3 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}(p-1)^{\alpha-5} \mp \ldots,\end{aligned}$$

wo $B_1, B_2, B_3, \ldots$ die auf einander folgenden BERNOULLI'schen Zahlen sind

Auch Q_α ist, wie Gleichung (1) zeigt, unter den oben gemachten Voraussetzungen eine rationale ganze Function von p, die durch die Methode der unbestimmten Coefficienten gefunden werden kann.

Es sei jetzt $\alpha = 2$ und p eine beliebige Primzahl. Die Primzahlen 2 und 3 brauchen nicht ausgeschlossen zu werden, da für jede positive Zahl p die Gleichung gilt

$$S_2 = \sum_{s=1}^{s=p-1} s^2 = \frac{p(p-1)(2p-1)}{6}.$$

Nun ist

$$(4) \qquad P_2 + Q_2 = \sum_{s=1}^{s=p-1} \left[\frac{s^2}{p}\right] + \sum_{s=1}^{s=p-1} [\sqrt{sp}] = (p-1)^2,$$

indem $[\sqrt{(p-1)p}] = p - 1$ ist, ferner ist

$$(5) \qquad S_2 = p \cdot P_2 + \sum_{s=1}^{s=p-1} r_s.$$

Bezeichnet man mit R die Summe der quadratischen Reste von p, so ist

$$\sum_{s=1}^{s=p-1} r_s = 2R.$$

Ist nun p von der Form $4n + 1$, so ergänzen sich je zwei quadratische Reste zu p, es ist also

$$R = \frac{(p-1)p}{4}.$$

Da nun S_2 eine Function 3. Grades von p ist, welche kein konstantes Glied enthält, so sind P_2 und Q_2 rationale ganze Functionen von p. Hieraus folgt die Berechtigung zu schreiben

$$(6) \qquad \begin{aligned} P_2 &= Ap^2 + Bp + C, \\ Q_2 &= A_1p^2 + B_1p + C_1. \end{aligned}$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen p der Reihe nach gleich 5, 13,

17, so ergeben sich je drei lineare Gleichungen für A, B, C und A_1, B_1, C_1, durch deren Auflösung man folgende Formeln gewinnt

$$(7) \qquad \sum_{s=1}^{s=p-1}\left[\frac{s^2}{p}\right] = \frac{p^2}{3} - p + \frac{2}{3} = \frac{(p-1)(p-2)}{3}$$

$$(8) \qquad \sum_{s=1}^{s=p-1}[\sqrt{sp}] = \frac{2p^2}{3} - p + \frac{1}{3} = \frac{(p-1)(2p-1)}{3},$$

welche resp. mit den von BOUNIAKOWSKY im »article 2$^{\text{d}}$« der oben genannten Abhandlung p. 424 angegebenen Formeln (20) und (21) übereinstimmen.

Es versteht sich von selbst, dass uns der direkte Weg schneller zum Ziel geführt haben würde, wir haben hier die Methode der unbestimmten Coefficienten nur deshalb gewählt, um ein Beispiel davon zu geben.

Anders gestaltet sich die Sache für eine Primzahl q von der Form $4n+3$. Auch dann ist natürlich $\sum_{s=1}^{s=q-1} r_s = 2R$ durch q teilbar, aber die Abhängigkeit der Zahl R von q ist nicht so einfach, dass sie sich durch eine rationale ganze Function von q ausdrücken liesse. Aus (4), (5) und (6) ergeben sich für P_2 und Q_2 leicht die Ausdrücke

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}\left[\frac{s^2}{q}\right] = \frac{(q-1)(2q-1)}{6} - \frac{2R}{q},$$

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}[\sqrt{sq}] = \frac{(q-1)(4q-5)}{6} + \frac{2R}{q}.$$

Diese beiden Formeln gelten allgemein für jede Primzahl q; sie enthalten (7) und (8) als speciellen Fall.

Bezeichnet man mit R' die Summe der quadratischen Nichtreste von q, so ist

$$R + R' = \frac{q(q-1)}{2}$$

$$\frac{2R}{q} = q - 1 - \frac{2R'}{q},$$

also

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}\left[\frac{s^2}{q}\right]=\frac{(q-1)(2q-7)}{6}+\frac{2R'}{q},$$

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}[\sqrt{sq}]=\frac{(q-1)(4q+1)}{6}-\frac{2R'}{q}.$$

Wir gehen jetzt über zu der Betrachtung der Summen

$$\sum_{s=1}^{s=m-1}[\sqrt{sm}] \quad \text{und} \quad \sum_{s=1}^{s=m-1}\left[\frac{s^2}{m}\right],$$

wo m eine beliebige positive ganze Zahl ist. Es gilt die Gleichung

$$(9) \qquad \sum_{s=1}^{s=m-1}[\sqrt{sm}]+\sum_{s=1}^{s=m-1}\left[\frac{s^2}{m}\right]=(m-1)^2+\rho,$$

wo die Zahl ρ angibt, wie viele unter den Produkten $1.m$, $2.m$, $3.m,\ldots$, $(m-1)m$ volle Quadrate sind. Wenn m aus lauter verschiedenen Primzahlen besteht, so ist offenbar $\rho=0$. Ist $m=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$, wo $a, b, c\ldots$ die verschiedenen in m enthaltenen Primzahlen und die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ alle gerade sind, ist also m eine volle Quadratzahl, so enthält die Reihe $1.m$, $2.m$, $\ldots$, $m.m$ offenbar ebenso viele Quadratzahlen als die Reihe $1, 2, \ldots, m$, ihre Anzahl ist also $\sqrt{m}=a^{\frac{\alpha}{2}}b^{\frac{\beta}{2}}c^{\frac{\gamma}{2}}\ldots$, mithin ist in diesem Falle

$$\rho=a^{\frac{\alpha}{2}}b^{\frac{\beta}{2}}c^{\frac{\gamma}{2}}\ldots-1.$$

Ist $m=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots a'^{\alpha'}b'^{\beta'}c'^{\gamma'}\ldots$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gerade, $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ ungerade sind, so muss eine Zahl s, welche mit m multipliziert ein volles Quadrat ergeben soll, den Faktor $a'b'c'\ldots$ und ausserdem nur noch einen quadratischen Faktor enthalten. Befreit man also die Zahl s von dem Faktor $a'b'c'\ldots$, so muss ein volles Quadrat übrig bleiben. Legt man mithin den Zahlen s ausserdem noch die Bedingung auf, nicht grösser als m zu sein, so stimmt ihre Anzahl überein mit der Anzahl der in der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots, a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots a'^{\alpha'-1}b'^{\beta'-1}c'^{\gamma'-1}\ldots$$

enthaltenen Quadratzahlen, sie ist also gleich $a^{\frac{\alpha}{2}} b^{\frac{\beta}{2}} c^{\frac{\gamma}{2}} \ldots a'^{\frac{\alpha'-1}{2}} b'^{\frac{\beta'-1}{2}} c'^{\frac{\gamma'-1}{2}}$ oder gleich $a^{\frac{\alpha}{2}} b^{\frac{\beta}{2}} c^{\frac{\gamma}{2}} \ldots a'^{\left[\frac{\alpha'}{2}\right]} b'^{\left[\frac{\beta'}{2}\right]} c'^{\left[\frac{\gamma'}{2}\right]} \ldots$

Demnach ist in diesem Falle

$$\rho = a^{\frac{\alpha}{2}} b^{\frac{\beta}{2}} c^{\frac{\gamma}{2}} \ldots a'^{\left[\frac{\alpha'}{2}\right]} b'^{\left[\frac{\beta'}{2}\right]} c'^{\left[\frac{\gamma'}{2}\right]} \ldots - 1.$$

Beide Werte für ρ lassen sich in einen Ausdruck vereinigen. Sind $a, b, c \ldots$ die verschiedenen in m enthaltenen Primzahlen, und ist $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, so ist

$$\rho = a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots - 1.$$

Die Zahl m möge jetzt aus lauter verschiedenen Primfaktoren von der Form $4n + 1$ bestehen. Dann handelt es sich darum, $\sum_{s=1}^{s=m-1} r_s$ zu bestimmen. Zunächst ist klar, dass jeder quadratische Rest r von m durch einen andern quadratischen Rest r' von m zu m ergänzt wird. Denn aus der Möglichkeit der Kongruenz

$$x^2 \equiv r \pmod m$$

folgt sofort die Möglichkeit der Kongruenz

$$x^2 \equiv -r \pmod m,$$

da die negative Einheit quadratischer Rest jedes einzelnen der in m enthaltenen Primfaktoren ist. Anderseits hat die Kongruenz

$$x^2 \equiv r \pmod m$$

genau ebenso viele Wurzeln als die Kongruenz

$$x^2 \equiv -r \pmod m.$$

Setzt man also

$$r + r' = m$$

und stellt die Gleichungen auf

$$1^2 = \left[\frac{1^2}{m}\right] m + r_1$$

$$2^2 = \left[\frac{2^2}{m}\right] m + r_2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(m-1)^2 = \left[\frac{(m-1)^2}{m}\right] m + r_{m-1},$$

so kommt jeder Rest r genau so oft vor, als der zugehörige Rest r'. Hieraus folgt

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} r_s = \frac{m(m-1)}{2},$$

und da die Zahl ρ unter der gemachten Voraussetzung verschwindet, so dürfen wir mit Berücksichtigung der Gleichung (9) und der für jede Zahl m geltenden Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} s^2 = m \sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=m-1} r_s$$

folgenden Satz aussprechen:

Wenn eine Zahl m aus lauter verschiedenen Primfaktoren von der Form $4n + 1$ besteht, so gelten die Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{(m-1)(m-2)}{3}, \tag{10}$$

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} [\sqrt{sm}] = \frac{(m-1)(2m-1)}{3}. \tag{11}$$

Es sei jetzt $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, wo die verschiedenen in m enthaltenen Primfaktoren $a, b, c, \ldots$ alle die Form $4n + 1$ haben. Dann wird die oben zur Berechnung von $\sum_{s=1}^{s=m-1} r_s$ angestellte Betrachtung nur insofern alteriert, als r auch gleich Null werden kann, und zwar geschieht dies so oft, als die vorhin mit ρ bezeichnete Zahl angibt. Die Zahl ρ, deren

Wert gleich $a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots - 1$ gefunden wurde, ist offenbar gerade; denkt man sich demnach $\frac{\rho}{2}$-mal statt des Restes Null den Rest m, so ergänzen sich wiederum stets zwei Reste r und r' zu m, und jeder Rest r wird ebenso oft erscheinen als der zugehörige Rest r'. Hierbei ist die Zahl m jedoch $\frac{\rho}{2}$-mal zu viel mitgerechnet worden, wir erhalten also die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} r_s = \frac{m(m-1)}{2} - \frac{m\rho}{2},$$

und es wird

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} s^2 = m \sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{m\rho}{2},$$

oder

$$\frac{(m-1)(2m-1)}{6} = \sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] + \frac{m-1}{2} - \frac{\rho}{2}.$$

Mit Hülfe einer einfachen Rechnung ergibt sich hieraus

$$(12) \qquad \sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{(m-1)(m-2)}{3} + \frac{\rho}{2},$$

und vermöge der Gleichung (9)

$$(13) \qquad \sum_{s=1}^{s=m-1} [\sqrt{sm}] = \frac{(m-1)(2m-1)}{3} + \frac{\rho}{2}.$$

Die Gleichungen (10) und (11) gehen resp. aus (12) und (13) hervor, indem man $\rho = 0$ setzt.

Beispiel $m = 25 = 5^2$.

Die direkte Berechnung ergibt

$$\sum_{s=1}^{s=24} \left[\frac{s^2}{25}\right] = 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 10 + 11$$
$$+ 12 + 14 + 16 + 17 + 19 + 21 + 23 = 186.$$

Die Berechnung nach (12) ergibt, da ρ den Wert $5^1 - 1 = 4$ hat,

$$\sum_{s=1}^{s=24}\left[\frac{s^2}{25}\right] = \frac{24.23}{3} + \frac{4}{2} = 186.$$

Wir betrachten jetzt die Summen

$$P = \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}}\left[\frac{s^2}{p}\right]$$

und

$$Q = \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{4}}[\sqrt{sp}],$$

wo p eine Primzahl von der Form $4n + 1$ bedeutet. Da, wie leicht zu sehen

$$\left[\sqrt{\frac{(p-1)p}{4}}\right] = \frac{p-1}{2}$$

ist, so gilt die Gleichung

$$P + Q = \frac{(p-1)^2}{8}.$$

Anderseits erhält man durch ein schon mehrfach benutztes Verfahren die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} s^2 = p.P + R,$$

wenn man mit R wiederum die Summe der quadratischen Reste von p bezeichnet. Nun ist

$$R = \frac{p(p-1)}{4}$$

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} s^2 = \frac{p(p-1)(p+1)}{24},$$

mithin

$$P = \frac{(p-1)(p-5)}{24},$$

$$Q = \frac{p^2-1}{12}.$$

Hieraus ergeben sich in Verbindung mit (11) sofort die von BOUNIAKOWSKY aufgestellten Gleichungen (Bulletin de l'acad. imp. de S:t Pétersbourg, tome 28, p. 257, 263)

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p-5}{4}}[\sqrt{sp}] = \frac{(p-1)(p-5)}{12},$$

$$\sum_{s=\frac{p-1}{4}}^{s=p-1}[\sqrt{sp}] = \frac{(p-1)(7p+1)}{12}.$$

Für eine Primzahl von der Form $4n+3$ hat man zunächst, da

$$\left[\frac{(q-1)^2}{4q}\right] = \left[\frac{q-2}{4} + \frac{1}{4q}\right] = \frac{q-3}{4}$$

ist, die Relation

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{s^2}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{q-3}{4}}[\sqrt{sq}] = \frac{q-1}{2}\,\frac{q-3}{4}.$$

Ferner ist, wie leicht zu beweisen,

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{s^2}{q}\right] = \frac{q^2-1}{24} - \frac{R}{q},$$

folglich

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-3}{4}}[\sqrt{sq}] = \frac{(q-1)(q-5)}{12} + \frac{R}{q},$$

und vermöge der Relation

$$R + R' = \frac{q(q-1)}{2},$$

wo R' die Summe der quadratischen Nichtreste von q bezeichnet,

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-3}{4}}[\sqrt{sq}] = \frac{q^2-1}{12} - \frac{R'}{q}.$$

(Bouniakowsky, a. a. O. p. 415). Da nun, wie pag. 39 gezeigt,

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}[\sqrt{sq}] = \frac{(q-1)(4q-5)}{6} + \frac{2R}{q},$$

$$= \frac{(q-1)(4q+1)}{6} - \frac{2R'}{q},$$

so folgt

$$\sum_{s=\frac{q+1}{4}}^{s=q-1}[\sqrt{sq}] = \frac{(q-1)(7q-5)}{12} + \frac{R}{q},$$

$$= \frac{(q-1)(7q+1)}{12} - \frac{R'}{q}.$$

(a. a. O. p. 419, 420).

Es sei wiederum $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ eine Zahl, deren Primfaktoren $a, b, c, \ldots$ alle die Form $4n+1$ haben. Dann ist

$$(14) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{4}}\left[\frac{s^2}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{4}}[\sqrt{sm}] = \frac{(m-1)^2}{8} + \rho',$$

wo die Zahl ρ' angibt, wie viele unter den Produkten $1.m, 2.m, \ldots, \frac{m-1}{4}.m$ volle Quadrate sind, oder was dasselbe ist, wie viele unter den Quadraten $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{m-1}{2}\right)^2$ durch m aufgehen. Diese Zahl ist aber gleich der Hälfte derjenigen Zahl, welche oben mit ρ bezeichnet und gleich $a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots - 1$ gefunden worden ist, indem zu jeder zwischen 1 und $\frac{m-1}{2}$ liegenden Zahl λ, deren Quadrat durch m aufgeht, eine zwischen $\frac{m+1}{2}$ und $m-1$ liegende Zahl $m-\lambda$ gehört, deren Quadrat ebenfalls durch m aufgeht und umgekehrt. Denn (cf. Dirichlet, *Zahlentheorie*, p. 76) wenn r irgend eine ganze Zahl bezeichnet, so ist

$$(m-r)^2 = m^2 - 2rm + r^2 \equiv r^2 \pmod{m}.$$

Hieraus folgt aber weiter, dass die Quadrate $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2, \left(\frac{m+3}{2}\right)^2, \ldots, (m-1)^2$

dieselben Reste nach dem Modul m liefern, wie die Quadrate 1^2, 2^2, $\ldots$, $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$, nur in umgekehrter Reihenfolge. Jetzt braucht man sich blos der pag. 42 angestellten Betrachtungen zu erinnern, um zu erkennen, dass die Gleichung besteht

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} s^2 = m\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{s^2}{m}\right] + \frac{m(m-1)}{4} - \frac{m\rho}{4},$$

und da die linke Seite den Wert $\frac{m(m-1)(m+1)}{24}$ hat, so folgt

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{(m-1)(m-5)}{24} + \frac{\rho}{4},$$

folglich durch Anwendung von (14)

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{4}}[\sqrt{sm}] = \frac{m^2-1}{24} + \frac{\rho}{4}.$$

$\rho = a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots - 1$ ist durch 4 teilbar; es verschwindet, sobald die verschiedenen in m enthaltenen Primfaktoren alle nur in der ersten Potenz erscheinen. Für solche Zahlen, welche dieser Bedingung genügen, gelten also dieselben Relationen, die oben für Primzahlen von der Form $4n+1$ angegeben wurden, nämlich

(15) $$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{(m-1)(m-5)}{24},$$

(16) $$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-5}{4}}[\sqrt{sm}] = \frac{(m-1)(m-5)}{12}.$$

Hierin liegt die Erklärung für die von Bouniakowsky (a. a. O. p. 265) beobachtete Thatsache dass die Gleichung (16) für $m = 25$ nicht richtig ist, wohl aber für $m = 65$. Für $m = 65$ ist eben $\rho = 0$, so dass

$$\sum_{s=1}^{s=15}[\sqrt{65s}] = \frac{64 \cdot 60}{12} = 320$$

ist, während für $m = 25$ die Zahl ρ den Wert 4 hat, so dass

$$\sum_{s=1}^{s=5}[\sqrt{25s}] = \frac{24 \cdot 20}{12} + 1 = 41$$

wird.

Die obere Grenze der Summation möge jetzt bis zu einem Vielfachen von m ausgedehnt werden. Für zwei beliebige positive ganze Zahlen m und k gilt die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=km}\left[\frac{s^2}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=k^2m}[\sqrt{sm}] = k^3m^2 + \rho'',$$

wo ρ'' angibt, wie viele unter den Brüchen $\frac{1^2}{m}, \frac{2^2}{m}, \frac{3^2}{m}, \ldots, \frac{k^2m^2}{m}$ ganze Zahlen sind. Es mögen nun sämtliche in $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ enthaltenen Primfaktoren die Form $4n + 1$ haben. Dann ist

$$\rho'' = k(\rho + 1) = k a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots .$$

Denn es sind zunächst die k Quadrate $m^2, (2m)^2, (3m^2), \ldots, (km)^2$ durch m teilbar; ferner ist die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m - 1$, deren Quadrate durch m aufgehen, gleich ρ; es liegen aber zwischen zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Vielfachen von m (mit Ausschluss beider Grenzen) ebenfalls ρ Zahlen deren Quadrate durch m teilbar sind, wie aus der Gleichung hervorgeht

$$(\mu m + r)^2 = \mu^2 m^2 + 2\mu m r + r^2.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass ρ'' in der That den Wert $k(\rho + 1)$ hat. Bildet man nun die Gleichungen

$$1^2 = \left[\frac{1^2}{m}\right] m + r_1,$$

$$2^2 = \left[\frac{2^2}{m}\right] m + r_2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$k^2 m^2 = \left[\frac{k^2 m^2}{m}\right] m + r_{km}$$

und addiert, so kommt

$$\sum_{s=1}^{s=km} s^2 = m\sum_{s=1}^{s=km}\left[\frac{s^2}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=km} r_s.$$

Nun ist

$$\sum_{s=1}^{s=km} s^2 = \frac{km(km+1)(2km+1)}{6},$$

$$\sum_{s=1}^{s=km} r_s = k\sum_{s=1}^{s=m} r_s = k\frac{m(m-1)}{2} - k\frac{m\rho}{2},$$

folglich

$$\sum_{s=1}^{s=km}\left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{k(m+1)(2km+1)}{6} - \frac{k(m-1)}{2} + \frac{k\rho}{2},$$

und vermöge (17) nach einfacher Rechnung

$$\sum_{s=1}^{s=k^2m}[\sqrt{sm}] = \frac{k}{6}[4k^2m^2 - 3m(k-1) + 2] + \frac{k\rho}{2}.$$

Fügt man zu den bisherigen Bedingungen noch die neue hinzu, dass alle in m enthaltenen Primfaktoren von einander verschieden seien, so verschwindet ρ, und es ergibt sich die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=k^2m}[\sqrt{sm}] = \frac{k}{6}[4k^2m^2 - 3m(k-1) + 2],$$

welche Bouniakowsky für den Fall abgeleitet hat, dass m eine Primzahl von der Form $4n+1$ ist.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Ausdrücke $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{s}]$, $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[a]{s}]$ zu berechnen, wo n eine beliebige positive ganze Zahl ist. Setzt man $[\sqrt{n}] = m$, so gilt die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{s}] + \sum_{s=1}^{s=m}[s^2] = mn + m,$$

da sämtliche m Glieder der zweiten Summe auch nach Weglassung der

eckigen Klammern ihren ganzzahligen Wert behalten. Nun hat das zweite Glied der linken Seite den Wert $\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$, es ist also

$$(18) \qquad \sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{s}] = m(n+1) - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Ebenso folgt, wenn man $[\sqrt[3]{n}] = m$ setzt, aus den Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[3]{s}] + \sum_{s=1}^{s=m} s^3 = mn + m,$$

$$\sum_{s=1}^{s=m} s^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

die Richtigkeit der Formel

$$(19) \qquad \sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[3]{s}] = m(n+1) - \frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Da für einen beliebigen positiven ganzen Exponenten α die Gleichung besteht

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[\alpha]{s}] + \sum_{s=1}^{s=m} s^\alpha = mn + m,$$

wo $m = [\sqrt[\alpha]{n}]$ ist, und da sich $\sum_{s=1}^{s=m} s^\alpha$ vermittelst der Euler'schen Summenformel ausdrücken lässt, so leuchtet ein, dass man in ganz derselben Weise die Summe $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[\alpha]{s}]$ berechnen kann.

Die Formeln (18) und (19) unterscheiden sich nur der Form nach von den entsprechenden von Bouniakowsky aufgestellten Gleichungen (Bulletin de l'acad. imp. de S:t Pétersbourg, tome 29, p. 252 und 270).

Ebenso wie die Summe

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{n}]$$

lassen sich auch die Summen

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{5}] + \dots + [\sqrt{2n-1}]$$

und

$$[\sqrt{2}] + [\sqrt{4}] + [\sqrt{6}] + \dots + [\sqrt{2n}]$$

auf eine einfache Weise darstellen. Setzt man $[\sqrt{2n-1}]=m$, so ist

$$\sum_{s=2}^{s=n}[\sqrt{2s-1}]+\sum_{s=2}^{s=m}\left[\frac{s^2+1}{2}\right]=-1+mn+\left[\frac{m-1}{2}\right],$$

weil unter den vorkommenden Werten von $\frac{s^2+1}{2}$ sich $\left[\frac{m-1}{2}\right]$ ganze Zahlen befinden. Fügt man auf beiden Seiten zwei Einheiten hinzu, so kommt

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s-1}]+\sum_{s=1}^{s=m}\left[\frac{s^2+1}{2}\right]=mn+\left[\frac{m+1}{2}\right].$$

Nun ist

$$\sum_{s=1}^{s=m}\left[\frac{s^2+1}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right]+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}s^2=\frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right]+\frac{m(m+1)(2m+1)}{12},$$

folglich

$$(20)\qquad \sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s-1}]=mn+\frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right]-\frac{m(m+1)(2m+1)}{12}.$$

Zur Berechnung der Summe $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s}]$ schlagen wir den nämlichen Weg ein. Setzt man $[\sqrt{2n}]=m$, so ist

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s}]+\sum_{s=1}^{s=m}\left[\frac{s^2}{2}\right]=mn+\left[\frac{m}{2}\right],$$

weil unter den Quadraten $1^2, 2^2, \ldots, m^2$ sich $\left[\frac{m}{2}\right]$ gerade Zahlen befinden. Es ist aber

$$\sum_{s=1}^{s=m}\left[\frac{s^2}{2}\right]=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}s^2-\frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right]=\frac{m(m+1)(2m+1)}{12}-\frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right].$$

Demnach ist

$$(21)\qquad \sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s}]=mn+\left[\frac{m}{2}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right]-\frac{m(m+1)(2m+1)}{12}.$$

Die den Formeln (20) und (21) entsprechenden Darstellungen der Summen $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s-1}]$ und $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s}]$, finden sich bei BOUNIAKOWSKY (a. a. O. p. 260 sqq.)

Auf demselben Wege, auf dem die Formeln (20) und (21) gewonnen wurden, gelangt man zu den Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[3]{2s-1}] = mn + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}\frac{m^2(m+1)^2}{4},$$

$$m = [\sqrt[3]{2n-1}];$$

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[3]{2s}] = mn + \left[\frac{m}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}\frac{m^2(m+1)^2}{4},$$

$$m = [\sqrt[3]{2n}];$$

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[\alpha]{2s-1}] = mn + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}s^\alpha,$$

$$m = [\sqrt[\alpha]{2n-1}];$$

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[\alpha]{2s}] = mn + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}s^\alpha,$$

$$m = [\sqrt[\alpha]{2n}].$$

SUR LA VALEUR DE QUELQUES SÉRIES QUI DÉPENDENT DE LA FONCTION $E(x)$

PAR

M. A. STERN
À BERNE.

La considération qui m'a fait trouver une démonstration élémentaire du théorème

$$\sum_{r=1}^{m-1} E\left(x+\frac{r}{m}\right) = E(mx) - E(x)$$

qu'on doit à M. HERMITE,[1] peut aussi servir à trouver la valeur de diverses séries qui dépendent de la fonction $E_2(x)$, fonction qui, selon la notation proposée par M. HERMITE, a la valeur

$$E_2(x) = \frac{E(x)E(x+1)}{1 \cdot 2}.$$

Si k et m sont deux nombres entiers, $k < m$ et

$$x \geqq E(x) + \frac{k}{m}, \qquad x < E(x) + \frac{k+1}{m},$$

on aura, r désignant un nombre contenu dans la série $1, 2, \ldots, m-1$,

$$E\left(x+\frac{r}{m}\right) = E(x) \quad \text{ou} \quad E\left(x+\frac{r}{m}\right) = E(x)+1$$

selon que le nombre r est un des nombres $1, 2, \ldots, m-k-1$ ou un des nombres $m-k, \ldots, m-1$ et il s'ensuit qu'alors la fonction

$$E_2\left(x+\frac{r}{m}\right) = \frac{E\left(x+\frac{r}{m}\right)E\left(x+\frac{r}{m}+1\right)}{1 \cdot 2}$$

[1] Voir T. 5, p. 315 et T. 8, p. 93 de ce journal.

aura la valeur $E_2(x)$ ou $E_2(x+1)$. Ainsi dans la série $\sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x+\frac{r}{m}\right)$ les $m-k-1$ premiers termes auront tous la valeur $E_2(x)$ tandis que chacun des k termes suivants sera $=E_2(x+1)$, et la valeur de la série entière sera

$$=(m-k-1)E_2(x)+kE_2(x+1)=(m-1)E_2(x)+kE(x+1).$$

En substituant au lieu de k sa valeur $E(mx)-mE(x)$ on trouve

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x+\frac{r}{m}\right)=E(mx)E(x)+E(mx)-(m+1)E_2(x).$$

Considérons la série

$$\sum_{r=1}^{m-1}(m-r)E_2\left(x+\frac{r}{m}\right).$$

La somme des $m-k-1$ premiers termes aura la valeur

$$\left[\frac{m(m-1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}\right]E_2(x)$$

et la somme des k termes suivants sera $\frac{k(k+1)}{2}E_2(x+1)$. La valeur de la série entière sera donc

$$\frac{k(k+1)}{2}E_2(x+1)+\left[\frac{m(m-1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}\right]E_2(x).$$

Mais $E_2(x+1)-E_2(x)$ étant $=E(x+1)$ on aura

$$(2) \quad \sum_{r=1}^{m-1}(m-r)E_2\left(x+\frac{r}{m}\right)=\frac{m(m-1)}{2}E_2(x)+\frac{k(k+1)}{2}E(x)+\frac{k(k+1)}{2}.$$

En supposant $E(x)=0$ pour toutes les valeurs de x plus petites que l'unité positive, il est évident que la série $\sum_{r=1}^{m-1} E\left(x-\frac{r}{m}\right)$ s'évanouit pour les valeurs de $x \leqq 1$. On peut donc prendre $x=1+z$, z étant un *nombre positif,* et alors la série se change en

$$\sum_{r=1}^{m-1} E\left(z+\frac{r}{m}\right)=E(mz)-E(z).$$

Ainsi on aura

$$(3)\qquad \sum_{r=1}^{m-1} E\left(x-\frac{r}{m}\right) = E(m[x-1]) - E(x-1).$$

Cherchons maintenant la valeur de la série

$$\sum_{r=1}^{m-1}(m-r)\,E_2\left(x-\frac{r}{m}\right).$$

En prenant toujours $x \overline{\overline{>}} E(x)+\frac{k}{m}$, $x < E(x)+\frac{k+1}{m}$ on voit que la valeur de $E_2\left(x-\frac{r}{m}\right)$ est $= E_2(x)$ ou $E_2(x-1)$ selon que le nombre r est $\leqq k$ ou $> k$. Ainsi la somme des k premiers termes de la série est $\left[\frac{m(m-1)}{2}-\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}\right]E_2(x)$ tandis que la somme des termes suivants est $=\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}E_2(x-1)$, et comme on a

$$E_2(x) = E_2(x-1) + E(x)$$

il s'ensuit

$$(4)\qquad \sum_{r=1}^{m-1}(m-r)E_2\left(x-\frac{r}{m}\right) = \frac{m(m-1)}{2}E_2(x) - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2}E(x).$$

En ajoutant ensemble les deux séries (2) et (4) on obtient

$$\sum_{r=1}^{m-1}(m-r)E_2\left(x+\frac{r}{m}\right) + \sum_{r=1}^{m-1}(m-r)E_2\left(x-\frac{r}{m}\right)$$
$$= m(m-1)E_2(x) - \frac{m^2E(x)}{2} + \frac{m(2k+1)}{2}E(x) + \frac{k(k+1)}{2}$$

et en substituant $E(mx)-mE(x)$ au lieu de k on aura, après quelques simples réductions,

$$(5)\qquad \sum_{r=1}^{m-1}(m-r)E_2\left(x+\frac{r}{m}\right) + \sum_{r=1}^{m-1}(m-r)E_2\left(x-\frac{r}{m}\right) = E_2(mx) - mE_2(x).$$

C'est un théorème qu'on doit aussi à M. Hermite.[1]

---

[1] Voir T. 5, p. 315 et *Correction* à la suite de la table des matières du T. 8 de ce journal.

Si, au lieu de la série (4) on considère la série

$$\sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x-\frac{r}{m}\right)$$

on aura

$$(6)\qquad \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x-\frac{r}{m}\right) = kE_2(x) + (m-k-1)E_2(x-1)$$

$$= \frac{m-1}{2}[E(x)]^2 - \frac{m-2k-1}{2}E(x).$$

En prenant la somme et la différence des séries (1) et (6) on obtient

$$(7)\quad \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x+\frac{r}{m}\right) + \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x-\frac{r}{m}\right) = (m-1)[E(x)]^2 + 2kE(x) + k,$$

$$(8)\qquad \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x+\frac{r}{m}\right) - \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x-\frac{r}{m}\right) = \sum_{r=1}^{m-1} E\left(x+\frac{r}{m}\right).$$

Les mêmes considérations conduisent à

$$(9)\qquad \sum_{r=1}^{m-1} rE_2\left(x+\frac{r}{m}\right) = \frac{m(m-1)}{2}E_2(x) + \frac{(2m-1)k-k^2}{2}E(x+1),$$

$$(10)\qquad \sum_{r=1}^{m-1} rE_2\left(x-\frac{r}{m}\right) = \frac{m(m-1)}{2}E_2(x-1) + \frac{k(k+1)}{2}E(x)$$

et la somme de ces deux dernières séries aura la valeur

$$m(m-1)[E(x)]^2 + mkE(x) + \frac{(2m-1)k-k^2}{2}.$$

On voit aisément que la même méthode donne la valeur d'un grand nombre de séries semblables.

Berne le 20 février 1887.

ÜBER GEWISSE TRINOMISCHE KOMPLEXE ZAHLEN

VON

K. SCHWERING
in COESFELD.

Seien p und λ irgend zwei reelle ungerade Primzahlen, x eine Wurzel der Gleichung

$$x^p = 1,$$

α eine solche der Gleichung

$$\alpha^\lambda = 1,$$

wo aber $x = 1$ und $\alpha = 1$ ausgeschlossen werden soll und

$$p = 2n\lambda + 1.$$

Ferner möge g eine primitive Wurzel (mod p) sein. Setzen wir dann

$$(\alpha, x) = x + \alpha . x^g + \alpha^2 . x^{g^2} + \alpha^3 . x^{g^3} + \ldots + \alpha^{p-2} . x^{g^{p-2}},$$

so ist die von C. G. J. Jacobi eingeführte ψ-Funktion durch die Gleichung gegeben:

$$\psi(\alpha) = \frac{(\alpha^h, x) . (\alpha^k, x)}{(\alpha^{h+k}, x)}.$$

Mit der Theorie dieser ψ-Funktion haben sich die hervorragendsten Mathematiker beschäftigt. Insbesondere hat schon Jacobi gezeigt, dass sich die Anzahl der wirklich verschiedenen ψ stets auf $\frac{\lambda}{6}$ (in runder Zahl) reduciren lasse, und Herr L. Kronecker hat in einem sehr interessanten Aufsatze *Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 93, Seite 338 ff.) bewiesen, dass

die Darstellung des Ausdruckes $(\alpha, x)^\lambda$ durch Produkte konjugirter ψ — mit gewissen Eigenschaften der trinomischen komplexen Zahl

$$1 - \zeta^l + \zeta^m; \ \zeta^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} + 1 = 0$$

zusammenhängt. Diese Untersuchungen KRONECKER's zwingen zur Darstellung der *Norm* jener komplexen Zahlen, und so trat mir in einem höchst interessanten Specialfalle jene in theoretischer und besonders in praktischer Beziehung so wichtige Aufgabe entgegen, *die Norm einer trinomischen komplexen Zahl anzugeben.* Das blosse mechanische Ausrechnen der Norm ist nicht allein zeitraubend, sondern auch von gar geringem allgemeineren Vorteil. *Ich stellte mir daher die Aufgabe, ein Verfahren zu ermitteln, welches die Norm einer trinomischen komplexen Zahl schnell und sicher zu finden gestattet.* Die Lösung ergab sich durch Darstellung der Norm als algebraische *Form.* Diese Formen scheinen eine genauere Beachtung zu verdienen, da ihre *Koefficienten* viele merkwürdige Eigenschaften zeigen und die *Zahl der wesentlich verschiedenen Formen* in genauem Zusammenhange mit der durch L. KRONECKER gegebenen Zurückführung der ψ-Funktionen sich befindet.

§ 1.

Sei λ eine Primzahl und α eine komplexe Wurzel der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$. Wir betrachten die Zahl $z + \alpha - \alpha^{\nu+1}$, wo ν eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \lambda - 2$ ist. Wir suchen die *Norm* dieser Zahl, also:

$$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = (z + \alpha - \alpha^{\nu+1})(z + \alpha^2 - \alpha^{2\nu+2}) \ldots (z + \alpha^{\lambda-1} - \alpha^{(\lambda-1)(\nu+1)}),$$

oder

$$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = \prod(z + \alpha^h - \alpha^{h\nu+h}). \qquad (h = 1, 2, \ldots, \lambda-1)$$

Zu diesem Zwecke gehen wir nach der NEWTON-WARING'schen Methode zu Werke. Wir bilden aus den Potenzsummen der $\lambda - 1$ Grössen $-\alpha^r + \alpha^{r(\nu+1)}$ die Koefficienten der Gleichung $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Wurzeln sie sind. Wenn man setzt:

$$F(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$
$$F(\alpha^r) = a_0 + a_1\alpha^r + a_2\alpha^{2r} + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{r(\lambda-1)},$$

dann ist

$$F(\alpha) + F(\alpha^2) + \ldots + F(\alpha^{\lambda-1}) = \sum_1^{\lambda-1}{}_r F(\alpha^r)$$

und, weil $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0$,

$$\sum_1^{\lambda-1}{}_r F(\alpha^r) = (\lambda - 1)a_0 - a_1 - a_2 - \ldots - a_{\lambda-1} = \lambda a_0 - F(1).$$

Wir haben also:

$$(1) \qquad \sum_1^{\lambda-1}{}_r F(\alpha^r) = \lambda a_0 - F(1).$$

Wenden wir diese Schlüsse jetzt auf unsere Potenzsummen an. Die Summe der h^{ten} Potenzen ist:

$$(2) \qquad s_h = \sum_1^{\lambda-1}{}_r(-\alpha^r + \alpha^{r(\nu+1)})^h.$$

Entwickeln wir nach dem binomischen Lehrsatze, so wird das k^{te} Glied werden:

$$(-1)^{h+k} . \frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1 . 2 \ldots k} . \alpha^{r(h+k\nu)} .$$

Wie Formel (1) zeigt, haben wir nun zunächst dasjenige k zu ermitteln, für welches $h + k\nu$ *teilbar durch* λ *wird*, denn dieses Glied verdient die Bezeichnung a_0. Da $h > k$ und $h < \lambda$, so hat die Kongruenz $h + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ nur *eine* Auflösung, es entsteht nur *ein* solches Glied. Zudem ist $F(1) = 0$, da $F(\alpha) = (-\alpha + \alpha^{\nu+1})^h$. Folglich liefert uns (1) folgenden Wert:

$$(3) \qquad s_h = \lambda . (-1)^{h+k} . \frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1 . 2 \ldots k},$$

wo zu dem *gegebenen* h das zugeordnete k so zu bestimmen ist, dass wird:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} h + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}, \\ \qquad h > k. \end{array} \right.$$

Zur Auffindung der Zahlenpaare h, k geben wir nun folgende Vorschrift: *Man schreibe alle Zahlen von* 1 *bis* $\lambda - 1$ *nieder. Unter jede*

schreibe man den kleinsten positiven Rest der betreffenden mit ν multiplicirten Zahl. Dann addire man die übereinander stehenden Zahlenpaare. Ist die Summe grösser als λ, so verwerfe man das Paar. Ist die Summe kleiner als λ, so hat man ein Zahlenpaar gewonnen. Denn die betreffende Zahl der ersten Reihe ist k und die darunter stehende Zahl der zweiten Reihe gibt von λ subtrahirt h.

Beweis. Ist die Zahl der ersten Reihe k, so ist die darunter stehende Zahl r_ν der zweiten Reihe so beschaffen, dass $r_\nu \equiv k\nu \pmod{\lambda}$ und zugleich $r_\nu + k < \lambda$. Dann ist also $\lambda - r_\nu + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ und zugleich $\lambda - r_\nu > k$. Folglich besitzt $\lambda - r_\nu$ beide in (4) angegebenen Eigenschaften der Zahlen h. Man erhält auch *sämtliche* h durch das obige Verfahren. Denn h muss gleich $\lambda - r_\nu$ sein, um der Kongruenz $h + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ zu genügen und $h > k$ zieht $\lambda > r_\nu + k$ nach sich.

Die Anzahl der Zahlenpaare h, k ist genau gleich $\frac{\lambda - 1}{2}$.

Beweis. Zu jedem Zahlenpaare h, k gehört ein zweites $\lambda - h$, $\lambda - k$, welches auch der Kongruenz $\lambda - h + \nu(\lambda - k) \equiv 0 \pmod{\lambda}$ genügt. Aber der zweiten Bedingung (4) genügt es *nicht*. Denn, wenn $h > k$, so ist $\lambda - h < \lambda - k$. Zu jedem »passenden« Zahlenpaare h, k gehört ein »nicht passendes«. Also ist die Zahl der »passenden« die Hälfte der sämtlichen, w. z. b. w.

Diese Zahlenpaare h, k treten im wesentlichen schon bei E. Kummer auf; sie erscheinen ihm bei Zerlegung der Funktion $\psi(\alpha)$ in ihre idealen Primfaktoren. Vergl. auch Bachmann, *die Lehre von der Kreisteilung*, (Leipzig, Teubner 1872) S. 274.

Gehört zu einem h kein passendes k, so ist $a_0 = 0$, also $s_h = 0$. Also:

Die Hälfte aller auftretenden Potenzsummen hat den Wert Null.

Zahlenbeispiel: $\lambda = 11$, $\nu = 2$.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 1, & 3, & 5, & 7, & 9. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} k = 1,\ 2,\ 3,\ \ 6,\ 7, \\ h = 9,\ 7,\ 5,\ 10,\ 8. \end{array}$$

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_6 = 0; \qquad s_5 = 11.10, \qquad s_7 = -11.21,$$

$$s_8 = -11.8, \qquad s_9 = 11.9, \qquad s_{10} = 11.210.$$

Noch eine wichtige Bemerkung über die h, k müssen wir machen. Die Summe beliebig vieler h, welche kleiner als λ ist, wird immer wieder eine Zahl h und die Summe der zugehörigen k ist das zur Summe gehörige k. Denn aus

$$h_1 + k_1\nu \equiv 0, \qquad h_2 + k_2\nu \equiv 0, \quad \ldots, \quad h_r + k_r\nu \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$h_1 > k_1 \quad , \qquad h_2 > k_2 \quad , \quad \ldots, \quad h_r > k_r$$

folgt:

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_r + \nu(k_1 + k_2 + \ldots + k_r) \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_r > k_1 + k_2 + \ldots + k_r.$$

Die Summen erfüllen beide Bedingungen (4), sind also Zahlenpaare aus der Reihe der h, k. Hieraus folgt, dass *die Summe von Zahlen h, so lange sie kleiner als λ bleibt, niemals zu einem »nicht passenden« Zahlenpaare führen kann, also nicht zu einem Zahlenpaare, dessen s_h verschwindet.* Und *eine Zahl h, deren zugehöriges k die Einheit ist, kann niemals als Summe anderer Zahlen h erscheinen.*

Beispiel: $\lambda = 29$, $\nu = 11$.

$$\left|\begin{array}{l} h = 7,\ 10,\ 13,\ 14,\ 17,\ 18,\ 20,\ 21,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28, \\ k = 2,\ \ 7,\ 12,\ \ 4,\ \ 9,\ \ 1,\ 14,\ \ 6,\ 19,\ 11,\ \ 3,\ 24,\ 16,\ \ 8. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} 7 + 7 + 7 = 21 \\ 2 + 2 + 2 = 6 \end{array}\right|, \qquad \left.\begin{array}{r} 10 + 13 = 23 \\ 7 + 12 = 19 \end{array}\right|, \qquad \left.\begin{array}{r} 7 + 7 + 10 = 24 \\ 2 + 2 + 7 = 11 \end{array}\right|.$$

§ 2.

Setzen wir jetzt:

$$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + p_1 z^{\lambda-2} + p_2 z^{\lambda-3} + \ldots + p_{\lambda-1}. \tag{5}$$

Dann lautet die WARING'sche Formel:

$$(6)\qquad p_i = \sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_i}}{1^{\lambda_1}.2^{\lambda_2}\dots i^{\lambda_i}.\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\dots\underline{|\lambda_i}}.s_1^{\lambda_1}.s_2^{\lambda_2}\dots s_i^{\lambda_i}.$$

Dabei ist die Summation auf alle Wertsysteme $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ zu erstrecken, welche der Gleichung genügen:

$$(7)\qquad i = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + i\lambda_i.$$

Die WARING'sche Formel gehört zu den bekanntesten Gleichungen der Algebra. Man kann ihre Richtigkeit folgendermassen darthun. Sei

$$F(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n) = z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n.$$

Dann ist:

$$\frac{F(z)}{z^n} = \left(1 - \frac{z_1}{z}\right)\left(1 - \frac{z_2}{z}\right)\dots\left(1 - \frac{z_n}{z}\right).$$

Nun ist:

$$\log\left(1 - \frac{z_1}{z}\right) = -\frac{z_1}{z} - \frac{1}{2}\frac{z_1^2}{z^2} - \frac{1}{3}\frac{z_1^3}{z^3} - \dots$$

Daher wird, wenn wir $s_h = z_1^h + z_2^h + \dots + z_n^h$ einführen,

$$\log\frac{F(z)}{z^n} = -s_1.\frac{1}{z} - \frac{1}{2}s_2.\frac{1}{z^2} - \dots - \frac{1}{h}.s_h.\frac{1}{z^h} - \dots,$$

also:

$$\frac{F(z)}{z^n} = e^{-s_1.\frac{1}{z}}.e^{-\frac{1}{2}s_2.\frac{1}{z^2}}\dots e^{-\frac{1}{h}.s_h.\frac{1}{z^h}}\dots$$

Mithin erscheint $\frac{F(z)}{z^n}$ als Produkt folgender Faktoren:

$$1 - \frac{1}{h}.s_h.\frac{1}{z^h} + \frac{1}{\underline{|2}}\frac{1}{h^2}s_h^2\frac{1}{z^{2h}} - \frac{1}{\underline{|3}}\frac{1}{h^3}.s_h^3.\frac{1}{z^{3h}} + \dots \qquad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

Man erhält also für $\frac{F(z)}{z^n}$ eine nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ geordnete unendliche Reihe. Multipliciren wir mit z^n, so entsteht links eine *ganze* Funktion von z; also muss die unendliche Reihe die Eigenschaft haben, dass sie beim n^{ten} Gliede abbricht, dass also die Koefficienten der Potenzen mit

negativen Exponenten verschwinden. Ordnen wir nach Vollzug der Multiplication, so erhalten wir Gleichung (6).

Diese Herleitung der WARING'schen Formel hat ausser ihrer Kürze und Einfachheit den Vorteil, dass sie eine Methode angibt, die Koefficienten p_i übersichtlich aufzuschreiben.

Da in unserm Falle die Hälfte aller s_h Null ist, so ist die Anzahl der Auflösungen der Gleichung (7) eine sehr beschränkte. Wir müssen nämlich, um p_i darzustellen, die Zahl i als Zahl h auffassen und aus Zahlen h durch Addition zusammensetzen. Es handelt sich hier um Zahlen, die kleiner als λ sind; und wir haben gesehen, dass die Addition solcher Zahlen h, deren Summe auch kleiner als λ ist, immer wieder Zahlen derselben Reihe h ergibt. Zur Bildung eines p_i, dessen zugehöriges s_i *verschwindet*, liefern also *nicht* verschwindende s_h keinen Beitrag. Solche p_i (i eine »nicht passende» Zahl) verschwinden also ebenfalls. Folglich:

In $N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1})$ *ist die eine Hälfte aller Koefficienten der Potenzen von* z *gleich Null.*

Wenn wir zur Bestimmung der einzelnen Koefficienten übergehen, so erscheint es zweckmässig, die Entwicklung nach steigenden Potenzen von z vorzunehmen. Man findet folgende Ergebnisse:

1. Das von z freie Glied ist λ. Denn setzen wir

$$\varphi(z) = \frac{z^\lambda - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{\lambda-1},$$

so ist

$$\prod_1^{\lambda-1}{}_r(\alpha^r - \alpha^{r(\nu+1)}) = \prod_1^{\lambda-1}{}_r(1 - \alpha^{r\nu}) = \varphi(1) = \lambda.$$

Für die folgenden Sätze geben wir den Beweis an späterer Stelle.

Man bilde den *numerus socius* von ν, nämlich μ mit der Eigenschaft:

$$\mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Dann wird

2. Der Koefficient von z in $N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1})$

$$\lambda\frac{\lambda - 2\mu - 1}{2}.$$

Der Coefficient von [illegible] $(1 - x - x^{\nu})$ ist entweder

[illegible] wenn [illegible]

oder

[illegible] wenn [illegible]

Der Coefficient von [illegible] $(1 - x - x^{\nu})$ ist

[illegible] wenn [illegible] $3\mu < \lambda$.

[illegible]

wenn [illegible] $3\mu > \lambda$.

[illegible]

wenn $2\mu > \lambda$, $3\mu < 2\lambda$.

[illegible] wenn $2\mu > \lambda$, $3\mu > 2\lambda$.

Aus diesen Werten erkennt man deutlich den Charakter der zu erwartenden [illegible].

§ 3.

Es ist

$$N(z + x - x^{-1}) = N(zx^{-\nu-1} + x^{-\nu} - 1)$$

$$N(zx^{\nu+1} + x^{\nu} - 1) = N(1 - x^{\nu} - x^{\nu+1}.z).$$

Ersetzen wir jetzt die Einheit durch x und bilden:

$$N(x - x^{\nu} - x^{\nu+1}.z).$$

Zu diesem Zwecke müssen wir wieder die Potenzsummen der Wurzeln bilden und dann nach WARING's Formel verfahren. Es ist hier

$$s_h = \sum_{1}^{\lambda-1}{}_r(\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r}z)^h.$$

Entwickeln wir nach dem binomischen Lehrsatze

$$F(\alpha) = (\alpha^{\nu} + \alpha^{\nu+1}.z)^{h},$$

so wird das allgemeine Glied:

$$\frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1.2\ldots k}.\alpha^{\nu h+k}.z^{k}.$$

Wie wir in Gleichung (1) gesehen haben, kommt es auf die Bestimmung desjenigen k an, welches bewirkt, dass $\nu h + k \equiv 0 \pmod{\lambda}$ wird. Wir haben schon oben μ durch die Kongruenz eingeführt:

$$(8) \qquad \mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Es wird also k so zu bestimmen sein, dass die Kongruenz stattfindet:

$$(9) \qquad h + \mu k \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Zugleich muss $h > k$ sein. Damit sind wir denn auf diejenige Norm geführt, in welcher ν durch μ ersetzt ist, nämlich auf $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$. Nun ist nach Gleichung (1)

$$s_h = \sum_1^{\lambda-1}{}_r(\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r}.z)^h = \lambda\frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1.2\ldots k}z^k - (1+z)^h.$$

Hier bedeuten h, k die zur Norm $N(z+\alpha-\alpha^{\mu+1})$ gehörigen Zahlenpaare. Wenn man nun z durch $-z$ ersetzt und beiderseits mit $(-1)^h$ multiplicirt, so erhält man:

$$\sum_1^{\lambda-1}{}_r(-\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r}.z)^h = (-1)^{h+k}.\lambda\frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1.2\ldots k}z^k - (-1+z)^h,$$

oder mit Erinnerung an Formel (3)

$$\sum_1^{\lambda-1}{}_r(-\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r}.z)^h + (-1+z)^h = z^k\sum_1^{\lambda-1}{}_r(-\alpha^r + \alpha^{r(\mu+1)})^h.$$

Wenn nun nach der Waring'schen Formel aus den Potenzsummen

$$\sum_1^{\lambda-1}{}_r(-\alpha^r + \alpha^{r(\mu+1)})^h$$

die Gleichung gebildet wird, so erhält man $N(x + \alpha - \alpha^{\mu+1})$, welches etwa die Form haben möge:

$$N(x + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = x^{\lambda-1} + q_1 x^{\lambda-2} + q_2 x^{\lambda-3} + \dots + q_{\lambda-1},$$

oder wie wir von jetzt ab immer schreiben werden:

$$(10) \qquad N(x + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = x^{\lambda-1} + \Sigma q_h x^{\lambda-h-1};$$

wenn aber aus den Potenzsummen $z^k \Sigma(-\alpha^r + \alpha^{r(\mu+1)})^h$ die Gleichung gebildet wird, so kommt zu jedem q_h noch der Multiplikator z^k hinzu. Dies ist zweifellos, wenn q_h *nur* von s_h einen Beitrag erhält. Ist dagegen h auch aus kleineren h durch Addition zusammengesetzt, so muss man sich erinnern, dass dann die Summe der zusammensetzenden h die Summe der entsprechenden k als k besitzt. Wir haben nun:

$$(11) \qquad \sum_1^{\lambda-1}{}_r(-\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r}.z)^h + (-1 + z)^h = 0^h + z^k \sum_1^{\lambda-1}(-\alpha^r + \alpha^{r(\mu+1)})^h.$$

Links und rechts befinden sich λ Summanden und deren 1^{te}, 2^{te}, ..., $\lambda - 1^{te}$ Potenzsummen stimmen überein. Bilden wir also nach Waring's Formel die zu beiden gehörenden Gleichungen, wobei wir auf der rechten Seite jedem q_h den Faktor z^k beifügen müssen, so entsteht eine Identität. Selbstverständlich muss dafür gesorgt werden, dass eine Wurzel der links entstehenden Gleichung Null sei. Wir erhalten dann links die Grösse:

$$(x - z + 1)N(x + \alpha^\nu - \alpha^{\nu+1}.z) - (1 - z)N(\alpha^\nu - \alpha^{\nu+1}.z)$$

oder mit Erinnerung an die Funktion $\varphi(z)$, Seite 63:

$$(x + 1 - z)N(x + \alpha^\nu - \alpha^{\nu+1}.z) + z^\lambda - 1.$$

Daher die Identität:

$$(12) \qquad (x + 1 - z)N(x + \alpha^\nu - \alpha^{\nu+1}.z) + z^\lambda - 1 = x^\lambda + \Sigma q_h x^{\lambda-h} z^k,$$

$$[\mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}, \quad h + \mu k \equiv 0 \pmod{\lambda}, \quad h > k].$$

Zu $h = \lambda - 1$ gehört $k = \nu$; denn $\lambda - 1 + \mu\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ und $\lambda - 1 > \nu$. Ersetzen wir noch z und x durch $\frac{z}{y}$ und $\frac{x}{y}$, so wird:

$$(13) \quad (x + y - z)N(x + \alpha^\nu y - \alpha^{\nu+1}.z) + z^\lambda - y^\lambda - x^\lambda = \Sigma q_h x^{\lambda-h}.y^{h-k}.z^k.$$

Die Summation erstreckt sich auf alle Wertepaare h, k, welche den Bedingungen genügen:

$$(14)\qquad \mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}, \qquad h + \mu k \equiv 0 \pmod{\lambda}, \qquad h > k, \qquad h < \lambda.$$

Die Gleichung (13) *enthält ein Hauptresultat unserer Untersuchungen.*

Ersetzen wir noch α durch α^{μ}, so wird

$$(15)\qquad (x + y - z)N(x + \alpha y - \alpha^{\mu+1}.z) + z^{\lambda} - y^{\lambda} - x^{\lambda} = \Sigma q_h x^{\lambda-h}.y^{h-k}.z^{k}.$$

Die q_h sind durch die Gleichung definirt:

$$N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = z^{\lambda-1} + \Sigma q_h z^{\lambda-1-h}.$$

Ist bei den Summen nichts anderes ausdrücklich bemerkt, so gelten immer die Bedingungen (14). Da sämtliche q_h den Faktor λ enthalten, so kann man ihn abtrennen und die arithmetische Form $F(x, y, z)$ λ^{ter} Ordnung mit drei Variablen durch die Gleichung definiren:

$$(16)\qquad \lambda.F(x, y, z) = \Sigma q_h x^{\lambda-h}.y^{h-k}.z^{k}.$$

§ 4.

Nehmen wir in Gleichung (12) $x = -1$, so wird, wenn man zugleich z durch $-z$ ersetzt,

$$(17)\qquad N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + \Sigma(-1)^{h+k+1}.q_h.z^{k-1}.$$

Anderseits ist:

$$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + \Sigma p_h z^{\lambda-h-1},$$

$$h + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}, \qquad h > k.$$

Die vorige Summe erstreckte sich auf die h, k, welche den Bedingungen genügen $h + k\mu \equiv 0 \pmod{\lambda}$, $h > k$. Nun ist aber

$$\lambda - k + \nu(\lambda - h) \equiv 0 \pmod{\lambda}, \qquad \lambda - k > \lambda - h,$$

sobald $h + k\mu \equiv 0$, $h > k$ ist. Daher kann man die letzte Summe auch so schreiben:

$$(18) \qquad N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + \sum p_{\lambda-k} \cdot z^{k-1},$$

$$(h + k\mu \equiv 0, \quad h > k).$$

Demnach erhält man:

$$(19) \qquad p_{\lambda-k} = (-1)^{h+k+1} \cdot q_h.$$

Dies ist ein zweites Hauptresultat. Es wird später *für die praktische Berechnung der q* von hervorragender Bedeutung sein.

Nehmen wir in (12) $x = z$, so wird

$$N(z + \alpha^{\nu} - \alpha^{\nu+1} \cdot z) = 1 + \sum q_h z^{\lambda-h+k}.$$

Also

$$N\left(1 + \alpha^{\nu} \cdot \frac{1}{z} - \alpha^{\nu+1}\right) = N\left(\frac{1}{z} + \alpha - \alpha^{\lambda-\mu}\right) = z^{-\lambda+1} + \sum q_h z^{-h+k+1},$$

oder:

$$(20) \qquad N(z + \alpha - \alpha^{\lambda-\mu}) = z^{\lambda-1} + \sum q_h z^{h-k-1}.$$

Auch hieraus kann man eine der Gleichung (19) analoge ableiten. Die dabei auftretende ist aber praktisch von geringerem Nutzen als (19). Sei nun

$$(21) \qquad (\mu + 1)\xi \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Dann ist $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = N(z + \alpha^{\xi} - \alpha)$. Also nach leichten Umformungen:

$$(22) \qquad N(z + \alpha - \alpha^{\xi}) = z^{\lambda-1} + \sum (-1)^h \cdot q_h \cdot z^{\lambda-1-h}.$$

Durch ähnliche Schlüsse finden wir, da

$$(\lambda - \mu)(\lambda - \nu) \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

$$(\nu + 1)(\lambda - \xi + 1) \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

$$(23) \qquad N(z + \alpha - \alpha^{\lambda-\nu}) = z^{\lambda-1} + \sum (-1)^{h-k+1} q_h \cdot z^{h-k-1}$$

$$(24) \qquad N(z + \alpha - \alpha^{\lambda-\xi+1}) = z^{\lambda-1} + \sum (-1)^h q_h \cdot z^{k-1}.$$

Die 6 *Normen* $N(z+\alpha-\alpha^{\mu+1})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\mu})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\nu})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\xi})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\xi+1})$ *sind auf einander zurückführbar* und können in *einer* Berechnung gefunden werden. Wollte man jede selbständig durch Zahlenpaare h, k und WARING's Formel bilden, so würde man finden:

1. $N(z+\alpha-\alpha^{\mu+1})$ gehört an das Paar h, k; d. h.

$$h+\mu k\equiv 0 \pmod{\lambda}, \qquad h>k.$$

2. $N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1})$ gehört an $\lambda-k,\ \lambda-h$,

weil $\lambda-k+\nu(\lambda-h)\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $\lambda-k>\lambda-h$.

3. $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\mu})$ gehört an $\lambda-h+k,\ k$,

weil $\lambda-h+k+(\lambda-\mu-1)k\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $\lambda-h+k>k$.

4. $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\nu})$ gehört an $\lambda-h+k,\ \lambda-h$,

weil $\lambda-h+k+(\lambda-\nu-1)(\lambda-h)\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $\lambda-h+k>\lambda-h$.

5. $N(z+\alpha-\alpha^{\xi})$ gehört an $h,\ h-k$,

weil $h+(\xi-1)(h-k)\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $h>h-k$.

6. $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\xi+1})$ gehört an $\lambda-k,\ h-k$,

weil $\lambda-k+(\lambda-\xi)(h-k)\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $\lambda-k>h-k$.

Stellen wir ferner die Gleichungen zusammen, welche die Beziehungen der 6 Funktionen ausdrücken.

$$(25)\quad \left|\begin{array}{lll} 1. & N(z+\alpha-\alpha^{\mu+1}) & = z^{\lambda-1} + \sum q_h z^{\lambda-1-k}, \\ 2. & N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1}) & = z^{\lambda-1} + \sum (-1)^{h+k+1} q_h . z^{k-1}, \\ 3. & N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\mu}) & = z^{\lambda-1} + \sum q_h z^{h-k-1}, \\ 4. & N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\nu}) & = z^{\lambda-1} + \sum (-1)^{h+k+1} . q_h . z^{h-k-1}, \\ 5. & N(z+\alpha-\alpha^{\xi}) & = z^{\lambda-1} + \sum (-1)^{h} q_h . z^{\lambda-h-1}, \\ 6. & N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\xi+1}) & = z^{\lambda-1} + \sum (-1)^{h} q_h . z^{k-1}. \end{array}\right.$$

Dabei ist

$$(26)\qquad \mu\nu \equiv 1, \qquad (\mu+1)\xi \equiv 1, \qquad (\lambda-\mu)(\lambda-\nu) \equiv 1,$$
$$(\nu+1)(\lambda-\xi+1) \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Zahlenbeispiel. $\lambda = 11,\ \mu = 2,\ \nu = 6,\ \xi = 4.$

$$\begin{array}{lrl} 1. & \left.\begin{array}{r} h = 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \\ k = 3,\ 2,\ 7,\ 1,\ 6 \end{array}\right\} & \text{zu}\quad N(z+\alpha-\alpha^{3}); \\ 2. & \left.\begin{array}{r} \lambda-k = 8,\ 9,\ 4,\ 10,\ 5 \\ \lambda-h = 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1 \end{array}\right\} & \text{zu}\quad N(z+\alpha-\alpha^{7}); \\ 3. & \left.\begin{array}{r} \lambda-h+k = 9,\ 6,\ 10,\ 3,\ 7 \\ k = 3,\ 2,\ 7,\ 1,\ 6 \end{array}\right\} & \text{zu}\quad N(z+\alpha-\alpha^{9}); \\ 4. & \left.\begin{array}{r} \lambda-h+k = 9,\ 6,\ 10,\ 3,\ 7 \\ \lambda-h = 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1 \end{array}\right\} & \text{zu}\quad N(z+\alpha-\alpha^{5}); \\ 5. & \left.\begin{array}{r} h = 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \\ h-k = 2,\ 5,\ 1,\ 8,\ 4 \end{array}\right\} & \text{zu}\quad N(z+\alpha-\alpha^{4}); \\ 6. & \left.\begin{array}{r} \lambda-k = 8,\ 9,\ 4,\ 10,\ 5 \\ h-k = 2,\ 5,\ 1,\ 8,\ 4 \end{array}\right\} & \text{zu}\quad N(z+\alpha-\alpha^{8}). \end{array}$$

$$q_5 = -2.11, \qquad q_7 = 3.11, \qquad q_8 = 1.11, \qquad q_9 = -1.11,$$
$$q_{10} = 1.11.$$

Daher hat man die Normen: $(\alpha^{11} = 1)$

$$N(z + \alpha - \alpha^3) = z^{10} + 11(-2z^5 + 3z^3 + z^2 - z + 1),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^7) = z^{10} + 11(\;\;2z^2 + 3z + z^6 + 1 - z^5),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^9) = z^{10} + 11(-2z + 3z^4 + 1 - z^7 + z^8),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^5) = z^{10} + 11(\;\;2z + 3z^4 + 1 + z^7 - z^8),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^4) = z^{10} + 11(\;\;2z^5 - 3z^3 + z^2 + z + 1),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^8) = z^{10} + 11(\;\;2z^2 - 3z + z^6 + 1 + z^5).$$

§ 5.

Wir wollen jetzt über die *Anzahl* der *verschiedenen*, nicht auf einander zurückführbaren *komplexen Zahlen von der Form* $z + \alpha - \alpha^{\mu+1}$ einige Untersuchungen durchführen.

Für $\mu = 1$ wird $\nu = 1$; ferner $\lambda - \nu = \lambda - \mu = \lambda - 1$ und

$$\xi = \lambda - \xi + 1 = \frac{\lambda + 1}{2}.$$

Die drei Zahlen $z + \alpha - \alpha^2$, $z + \alpha - \alpha^{\lambda-1}$, $z + \alpha - \alpha^{\frac{1}{2}(\lambda+1)}$ bilden eine *drei*gliedrige Gruppe mit Normen, die in *einer* Berechnung gefunden werden. Dabei ist bemerkenswert, dass $1 - \alpha - \alpha^{-1}$ immer eine komplexe Einheit ist. Denn (vergl. Kronecker, *de unitatibus complexis*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 93, S. 23) es ist

$$1 - \alpha + \alpha^2 = \frac{1 + \alpha^3}{1 + \alpha}.$$

Es ist also $N(z + \alpha - \alpha^2) = 1$ für $z = -1$, oder $\sum(-1)^h q_h = 0$, wenn $h + k \equiv 0 \pmod{\lambda}$, $h > k$. Daraus ergibt sich die interessante Gleichung:

$$(27) \qquad 1 + \sum(-1)^{k+1} \frac{(\lambda-k-1)(\lambda-k-2)\ldots(\lambda-2k+1)}{2.3\ldots k} = 0. \qquad \left(k=2,3,4,\ldots,\tfrac{\lambda-1}{2}\right).$$

So ist für $\lambda = 11$ und $\lambda = 13$ bezüglich

$$1 - 4 + 7 - 5 + 1 = 0; \qquad 1 - 5 + 12 - 14 + 7 - 1 = 0.$$

Scheiden wir die dreigliedrige Gruppe aus, so bleiben für λ von der Form $\lambda = 6k + 5$ in der Reihe $2, 3, \ldots, \lambda - 1$ noch $6k$ Zahlen übrig. Wir erhalten also $N(z + \alpha - \alpha^2)$, welches 3 Normen vertritt und ausserdem $6k$ Normen, die in k Gruppen zerfallen. Im ganzen finden wir also $\frac{\lambda + 1}{6}$ Gruppen. Die eine enthält 3, jede der übrigen 6 verschiedene Normen. Für $\lambda = 6k + 1$ dagegen ist eine Zahl δ angebbar, so dass $\delta^2 + \delta + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}$. Dann wird für $\mu = \delta$, $\nu = \delta^2$, $\lambda - \mu = \delta^2 + 1$, $\lambda - \nu = \delta + 1$, $\xi = \lambda - \delta$, $\lambda - \xi + 1 = \delta + 1$. Folglich erhalten wir nur *zwei* verschiedene Normen in dieser Gruppe, nämlich $N(z + \alpha - \alpha^{\delta+1})$ und $N(z + \alpha - \alpha^{\delta^2+1})$. Hier erhalten wir also im ganzen $\frac{\lambda + 5}{6}$ Normengruppen. Die eine enthält 3, eine zweite 2, die übrigen je 6 Normen.

Mit dieser Gruppirung der Normen trinomischer komplexer Zahlen befindet sich die Gruppirung der Jacobi*'schen $\psi(\alpha)$ in vollkommenster Übereinstimmung.* Man vergleiche meinen kleinen Aufsatz im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 93, S. 337.

An dieser Stelle wollen wir noch einige Bemerkungen über die q_h beifügen.

1. Sie haben sämtlich den Faktor λ, weil alle s_h den Faktor λ haben.

2. Die Kongruenz $h + k\mu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ liefert für $k = 1$ den Wert $h = \lambda - \mu$. Daraus folgt $s_{\lambda-\mu} = (-1)^{\lambda-\mu+1}.\lambda(\lambda - \mu)$. Und da h nicht aus kleineren h zusammengesetzt ist, weil $k = 1$, so folgt

$$q_{\lambda-\mu} = (-1)^{\mu+1}.\lambda; \tag{28}$$

Gleichung (19) liefert daher $p_{\lambda-1} = \lambda$. In allen diesen Normen ist also, wie wir schon oben feststellen konnten, das von z freie Glied λ. Wie Gleichung (25 n° 5) zeigt, ist in $N(z + \alpha - \alpha^{\xi})$ der Koefficient von $z^{\mu-1}$ ebenfalls $(-1)^h q_{\lambda-\mu}$ also gleich λ. Und nun ist in $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ der Koefficient von $z^{\xi-2}$ ebenfalls λ, da wir nur ξ mit $\mu + 1$ zu vertauschen haben, um $N(z + \alpha - \alpha^{\xi})$ in $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ überzuführen. Also:

In $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ erscheint unter den Koefficienten q_h **dreimal** *der Wert λ. Der Koefficient von $z^{\mu-1}$ ist $(-1)^{\mu-1}\lambda$; der Koefficient von $z^{\xi-2}$ und das von z freie Glied sind λ.* In $N(z + \alpha - \alpha^2)$ tritt λ nur *zweimal* auf.

3. Ähnliche Schlüsse gelten für $k = 2$. Die Kongruenz $h + k\mu \equiv 0 \pmod{\lambda}$

liefert $h = \lambda - 2\mu$, wenn $2\mu < \lambda$ oder $h = 2\lambda - 2\mu$, wenn $2\mu > \lambda$. Ist $\lambda - 2\mu < 2$, also $\lambda = 2\mu + 1$, so fehlt das betreffende Glied, also ist $q_h = 0$. Im Falle $h = \lambda - 2\mu$ ist für Gleichung (7) nur *eine* Auflösung vorhanden, also h nicht zusammensetzbar aus kleineren h. Demnach ergibt sich unmittelbar q_h aus s_h. Im Falle $h = 2\lambda - 2\mu$, $2\mu > \lambda$ ist für (7) eine zweite Auflösung vorhanden, nämlich $\lambda - \mu + \lambda - \mu = 2\lambda - 2\mu$. Die WARING'sche Formel ist also in diesem Falle zweigliedrig, aber die Ausrechnung ergibt dasselbe Resultat wie im ersten Falle. Wir haben das Resultat schon zu Ende des § 2 mitgeteilt. Die übrigen dort gegebenen Werte findet man durch Betrachtung der Fälle $k = 3, 4$.

§ 6.

Wir wollen jetzt in einigen einfachen Fällen $\mu = 1, 2, 3$ *die Normen als Reihen darstellen* und eine allgemein gültige Entwicklung geben.

Nach unsern Bezeichnungen ist $\mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}$, und wir dürfen $\nu > \mu$ voraussetzen. Denn die Fälle $\mu = 1$, $\nu = 1$; $\mu = \lambda - 1$, $\nu = \lambda - 1$ oder $\mu = \nu$ werden in besonderer Betrachtung erledigt. Die Kongruenz $h + \mu k \equiv 0 \pmod{\lambda}$ kann durch folgende Gleichungen ersetzt werden:

$$\left.\begin{array}{l} h + \mu k = 1\lambda \\ h + \mu k = 2\lambda \\ \dots\dots\dots\dots \\ h + \mu k = \mu\lambda \end{array}\right| . \qquad (h > k)$$

Man hat also für die r^{te} Reihe $h = r\lambda - \mu k$, und da $h > k$, so folgt $(\mu + 1)k < r\lambda$. Anderseits ist $h < \lambda$, also $\mu k > (r - 1)\lambda$. Wir erhalten also für die k der r^{ten} Gruppe die Grenzen

$$(29) \qquad \frac{r\lambda}{\mu + 1} > k > \frac{(r-1)\lambda}{\mu}.$$

Betrachten wir nun die erste Gruppe genauer. Seien h_1, k_1 und h_2, k_2 zwei derselben angehörende Paare, so ist $h_1 + h_2 + \mu(k_1 + k_2) = 2\lambda$. Also gehört $h_1 + h_2$ entweder der *zweiten* Gruppe an oder es ist *nicht vorhanden*. Letzteres würde für $h_1 + h_2 > \lambda$ stattfinden. Hieraus folgt,

dass die h der ersten Gruppe nicht aus kleineren h als Summanden zusammengesetzt sein können. Mithin gelingt für die erste Gruppe unmittelbar die Bildung von q_h aus s_h. Durch Anwendung von (3) schliessen wir daher sofort: In $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ kommt eine Reihe von Gliedern F_1 vor, welche gegeben sind durch die Gleichung:

$$F_1 = \lambda(-1)^{\mu+1} z^{\mu-1} + \lambda \sum_k (-1)^{(\mu+1)k} \frac{(\lambda-\mu k-1)(\lambda-\mu k-2)\ldots(\mu k-k+1)}{2.3\ldots k} z^{\mu k-1}.$$
$$k = 2,\ 3,\ \ldots,\ E\left(\frac{\lambda}{\mu+1}\right).$$

Für die zweite Gruppe könnten wir zwar einen ähnlichen Ausdruck bilden; aber sie wird von Gliedern der ersten Gruppe beeinflusst und zwar nicht in einfach angebbarer Weise. Dieses Ziel erreichen wir durch eine andere Gruppirung folgendermassen. Wir beweisen leicht aus (29)

$$(30) \qquad \frac{(\mu-r+1)\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{(\mu-r+1)\lambda}{\mu+1}.$$

Daraus entstehen folgende Gruppen:

$$(31) \qquad \left|\begin{array}{l} \frac{\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{\lambda}{\mu+1}, \\ \frac{2\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{2\lambda}{\mu+1}, \\ \frac{3\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{3\lambda}{\mu+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\mu\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{\mu\lambda}{\mu+1}. \end{array}\right.$$

Diese Gruppen haben nun die Eigenschaft, dass immer zwei Zahlen $\lambda - k$ der s^{ten} und t^{ten} Reihe in ihrer Summe eine Zahl der $(s+t)^{\text{ten}}$ Reihe ergeben. Man addire nur die s^{te} und t^{te} Ungleichung. Die $\lambda - k$ als Zahlen h liefern aber, wie wir in § 4 gesehen haben, $N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1})$. Bilden wir also:

$$\varphi_r = \lambda \sum (-1)^{h+k+1} . \frac{1}{\lambda - k} \frac{(\lambda-k)(\lambda-k-1)\ldots(h-k+1)}{1.2\ldots(\lambda-h)} . z^{-\lambda+k},$$
$$\frac{r\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{r\lambda}{\mu+1}; \qquad h + \mu k = (\mu - r + 1)\lambda;$$

so wird

$$\frac{N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1})}{z^{\lambda-1}} = e^{\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_\mu+\frac{1}{z^\lambda}\cdot R},$$

wo R aus dem zu Anfang des § 2 Gesagten als eine unendliche für unser Resultat unwesentliche Reihe klar ist. Daher ist

$$N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + z^{\lambda-1}.\varphi_1 + z^{\lambda-1}\left(\varphi_2+\frac{1}{2}\varphi_1^2\right)$$

$$+ z^{\lambda-1}\left(\varphi_3+\varphi_1\varphi_2+\frac{1}{6}\varphi_1^3\right) + \dots.$$

Die Klammern umschliessen Glieder, deren Zahlen $\lambda - k$ von 2-, 3-, ...-facher Zusammensetzung sind aus kleineren Zahlen $\lambda - k$. Die umständlichste Rechnung würden die Glieder μ-facher Zusammensetzung erfordern. Aber für diese Glieder wenden wir Formel (19) an und erhalten sie so unmittelbar. Daher gelangen wir zu folgendem Schlussergebniss.

»Man bilde:

$$\varphi_r = \lambda\sum(-1)^{h+k+1}.\frac{1}{h}\frac{h(h-1)\dots(h-k+1)}{1.2\dots k}.z^{-h},$$

$$\frac{r\lambda}{\mu} > h > \frac{r\lambda}{\mu+1}; \qquad k = \lambda r - \mu h; \qquad {\scriptstyle r=1,2,\dots,\mu-1)}$$

$$f_1 = \lambda\sum\frac{1}{h}\frac{h(h-1)\dots(h-k+1)}{1.2\dots k}z^{k-1},$$

$$k = 1,\ 2,\ \dots,\ E\left(\frac{\lambda}{\mu+1}\right); \qquad h = \lambda - \mu k.$$

Dann ist:

$$(32) \qquad N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + f_1 + z^{\lambda-1}.\varphi_1 + z^{\lambda-1}\left(\varphi_2+\frac{1}{2}\varphi_1^2\right)$$

$$+ z^{\lambda-1}\left(\varphi_3+\varphi_2\varphi_1+\frac{1}{6}\varphi_1^3\right) + z^{\lambda-1}\left(\varphi_4+\varphi_3\varphi_1+\frac{1}{2}\varphi_2^2+\frac{1}{2}\varphi_2\varphi_1^2+\frac{1}{24}\varphi_1^4\right) + \dots«$$

Als Beispiele teilen wir die Gleichungen mit:

$$N(z+\alpha-\alpha^2) = z^{\lambda-1} + \lambda + \lambda \sum \frac{(\lambda-k-1)\ldots(\lambda-2k+1)}{2\ldots k} z^{k-1},$$

$$k = 2,\ 3,\ \ldots,\ \frac{\lambda-1}{2}.$$

$$N(z+\alpha-\alpha^3) = z^{\lambda-1} - \lambda z + \lambda \sum_{2}^{2n}{}_{k} \frac{(\lambda-2k-1)\ldots(\lambda-3k+1)}{2\ldots k}.(-1)^k.z^{2k-1}$$

$$+ \lambda z^{2n-2} + \lambda \sum_{2}^{n}{}_{k} \frac{(2n+k-1)\ldots(3k)}{2\ldots(2n+1-2k)} z^{2n-2k},$$

wenn $\lambda = 6n + 1$.

$$N(z+\alpha-\alpha^3) = z^{\lambda-1} - \lambda z + \sum_{2}^{2n+1}{}_{k} \frac{(\lambda-2k-1)\ldots(\lambda-3k+1)}{2\ldots k}(-1)^k.z^{2k-1}$$

$$+ \lambda z^{2n} + \lambda \sum_{2}^{n}{}_{k} \frac{(2n+k)\ldots(3k-1)}{2\ldots(2n-2k+3)}.z^{2n-2k+2},$$

wenn $\lambda = 6n + 5$.

Für $\mu = 3$, $\lambda = 12n + 1$ erhalten wir:

$$N(z+\alpha-\alpha^4) = z^{\lambda-1} + \lambda(f_1 + \varphi_1 + \Psi).$$

Hier ist:

$$f_1 = z^2 + \frac{\lambda-7}{2}.z^5 + \frac{(\lambda-10)(\lambda-11)}{2.3} z^8 + \frac{(\lambda-13)(\lambda-14)(\lambda-15)}{2.3.4}.z^{11} + \ldots$$

$$\varphi_1 = \lambda + \frac{(4n-2)(4n-3)(4n-4)}{2.3.4} z^3 + \frac{(4n-3)\ldots(4n-8)}{2\ldots7} z^6$$

$$+ \frac{(4n-4)\ldots(4n-12)}{2\ldots10} z^9 + \ldots$$

$$\Psi = -(2n+1)z + \frac{(2n-1)(16n^3+80n^2-21n-30)}{15} z^4 + \ldots$$

Die Reihe Ψ enthält die *zweifach* zusammengesetzten q_h. Das Bildungsgesetz ist nicht erkennbar, und darum thut man wohl, an der Reihe (32) festzuhalten.

§ 7.

Eine andere Methode zur Berechnung der q_h ergibt sich folgendermassen.

Wenn man in Gleichung (15) $z = x + y$ setzt, so wird:

$$(x + y)^\lambda = x^\lambda + y^\lambda + \Sigma q_h x^{\lambda - h} \cdot y^{h-k} \cdot (x + y)^k.$$

Nehmen wir also $y = 1$, so erhalten wir die einfache Gleichung:

$$(x + 1)^\lambda = x^\lambda + 1 + \Sigma q_h x^{\lambda - h} (x + 1)^k. \tag{33}$$

Entwickeln wir nun rechts und links nach Potenzen von x, so erhalten wir Rekursionsformeln von der Gestalt:

$$q_{\lambda-1} = \lambda,$$

$$q_{\lambda-2} + k_1 \cdot q_{\lambda-1} = \lambda \frac{\lambda - 1}{2},$$

$$q_{\lambda-3} + k_2 \cdot q_{\lambda-2} + \frac{k_1(k_1 - 1)}{1 \cdot 2} q_{\lambda-1} = \lambda \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{2 \cdot 3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hier bedeutet k_r das zu $h = \lambda - r$ gehörige k, so dass

$$r \equiv \mu k_r, \qquad k_r \equiv \nu r \pmod{\lambda}.$$

So wird also $k_1 = \nu$; $k_2 = 2\nu$ oder $= 2\nu - \lambda$; $k_3 = 3\nu$ oder $= 3\nu - \lambda$ oder $= 3\nu - 2\lambda$; u. s. w.

Hiernach lassen sich die Resultate des § 2 wohl am einfachsten ableiten. Vergleichen wir die *höchsten* Exponenten, so erhalten wir Gleichungen von der Form

$$q_{h_1} = \lambda,$$

$$q_{h_2} + k_1 \cdot q_{h_1} = \lambda \frac{\lambda - 1}{2},$$

$$q_{h_3} + k_2 \cdot q_{h_2} + \frac{k_1(k_1 - 1)}{1 \cdot 2} q_{h_1} = \lambda \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{2 \cdot 3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hier bedeutet k_r das zu h_r gehörende k und gehorcht der Kongruenz

$$k_r \equiv -\xi r \pmod{\lambda},$$

so dass $k_1 = \lambda - \xi$; $k_2 = \lambda - 2\xi$ oder $= 2\lambda - 2\xi$ ist; u. s. w.

Man kann auch die Gleichung erhalten

$$(34) \qquad (x + 1)^\lambda = x^\lambda + 1 + \Sigma(-1)^h . x^k . (x + 1)^{h-k}.$$

Dann erhält man ein ähnliches System von Rekursionsformeln. Die erste wird

$$q_{\lambda-\mu} = (-1)^{\mu+1} . \lambda.$$

Man sieht, dass so von *drei* Seiten her der Zugang zu den q_h eröffnet ist. Und dadurch erhält unsere Methode den Charakter vollkommenen Abschlusses; denn der Wert λ tritt unter den q_h im allgemeinen an *drei* Stellen auf.

Da $\lambda - h$ entweder gleich μk oder gleich $\mu k - g\lambda$ ist, wo g eine ganze Zahl bedeutet, so haben wir noch

$$(x + 1)^\lambda = x^\lambda + 1 + \Sigma q_h x^{-g\lambda}(x^{\mu+1} + x^\mu)^k,$$

oder, wenn wir x durch α ersetzen,

$$(35) \qquad (\alpha + 1)^\lambda = 2 + \Sigma q_h(\alpha^{\mu+1} + \alpha^\mu)^k.$$

Da die Gleichung $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grades, welche α bestimmt, irreduktibel ist, so kann man auch aus der letzten Formel eine Methode ableiten, welche die Werte der q_h finden lässt.

§ 8.

Wir wollen jetzt *einige weitere Eigenschaften unserer Normen* aufzählen.

Vertauscht man z mit $-z$, so führt Gleichung (15) zu nachstehender Beziehung:

$$(36) \qquad (x + y + z)N(x + y\alpha + z\alpha^{\mu+1}) - x^\lambda - y^\lambda - z^\lambda$$

$$= \Sigma(-1)^k . q_h . x^{\lambda-h} . y^{h-k} . z^k.$$

Analog erhält man durch Vertauschung von α mit α^{ξ} und y mit z

$$(37)\qquad (x+y+z)N(x+y\alpha+z\alpha^{\xi})-x^{\lambda}-y^{\lambda}-z^{\lambda}$$
$$=\Sigma(-1)^{k}.q_{h}.x^{\lambda-h}.y^{k}.z^{h-k}.$$

Andere Formeln erhält man ohne Mühe in ähnlicher Weise und zwar

$$(38)\qquad (x+y+z)N(x+y\alpha+z\alpha^{\nu+1})-x^{\lambda}-y^{\lambda}-z^{\lambda}$$
$$=\Sigma(-1)^{k}.q_{h}.x^{k}.y^{h-k}.z^{\lambda-h},$$

$$(39)\qquad (x+y+z)N(x+y\alpha+z\alpha^{\lambda-\xi+1})-x^{\lambda}-y^{\lambda}-z^{\lambda}$$
$$=\Sigma(-1)^{k}.q_{h}.x^{k}.y^{\lambda-h}.z^{h-k},$$

$$(40)\qquad (x+y+z)N(x+y\alpha+z\alpha^{\lambda-\mu})-x^{\lambda}-y^{\lambda}-z^{\lambda}$$
$$=\Sigma(-1)^{k}.q_{h}.x^{h-k}.y^{\lambda-h}.z^{k},$$

$$(41)\qquad (x+y+z)N(x+y\alpha+z\alpha^{\lambda-\nu})-x^{\lambda}-y^{\lambda}-z^{\lambda}$$
$$=\Sigma(-1)^{k}.q_{h}.x^{h-k}.y^{k}.z^{\lambda-h}.$$

Nehmen wir $x=y=z=1$, so erhalten wir aus einer dieser 6 Formeln

$$(42)\qquad 3N(1+\alpha+\alpha^{\mu+1})=3+\Sigma(-1)^{k}.q_{h}.$$

Es ist also $\Sigma(-1)^{k}.q_{h}$ *immer durch* 3 *teilbar.*

So ist für $\lambda=11$, $\mu=2$

$$\Sigma(-1)^{k}.q_{h}=11(2+3-1+1+1)=6.11.$$

Diese Bemerkung ist als Rechnungsprobe nicht ohne Wert.

Die Gleichung (42) zeigt, dass die 6 Normen, welche links entstehen, wenn man für $\mu+1$ die Werte $\nu+1$, ξ, $\lambda-\mu$, $\lambda-\nu$, $\lambda-\xi+1$ setzt, *identisch* sind. Man bestätigt dies auch durch unmittelbare Betrachtung der komplexen Zahl $1+\alpha+\alpha^{\mu+1}$ ohne Mühe. Und hierin liegt vielleicht ein Hinweis, wie unsere Untersuchungen über die *trinomischen* Zahlen hinaus verallgemeinert werden könnten.

Für $N(\alpha+\alpha^{\delta}+\alpha^{\delta^2})$, wenn $\delta^3\equiv 1 \pmod{\lambda}$ erhalten wir nur $\frac{\lambda-1}{3}$

verschiedene Faktoren. Denn $\alpha + \alpha^{\delta} + \alpha^{\delta^2}$ ist eine *Periode* der Kreisteilungsgleichungen. Bildet man also nach unserem Verfahren die Norm $N(1 + \alpha^{\delta-1} + \alpha^{\delta^2-1}) = N(1 + \alpha + \alpha^{\delta+1})$, *so erhält man einen vollständigen Kubus*. So ist für $\alpha^{31} = 1$, $N(1 + \alpha + \alpha^6) = 5^6$. Ist $\mu = \delta$, so ist auch $\lambda - \nu = \delta + 1$, $\lambda - \xi + 1 = \delta + 1$, wie wir § 5 gefunden haben. Daher erhalten wir aus (25) drei Identitäten, welche uns zeigen:

$$q_h = (-1)^{h+k+1} \cdot q_{\lambda-h+k} = (-1)^h \cdot q_{\lambda-k},$$

falls $h + \delta k \equiv 0 \pmod{\lambda}$, $\delta^2 + \delta + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}$.

So wird für $\lambda = 31$, $\delta = 5$:

$$\begin{aligned}
q_6 &= q_{30} = q_{26} = 31 \cdot 1\ ,\\
q_{11} &= q_{24} = -q_{27} = 31 \cdot 30\ ,\\
q_{12} &= -q_{29} = q_{21} = 31 \cdot 10\ ,\\
q_{16} &= q_{18} = q_{28} = 31 \cdot 35\ ,\\
q_{17} &= -q_{23} = -q_{22} = -31 \cdot 500.
\end{aligned}$$

Die dreimalige Wiederkehr, welche allgemein *nur für* λ stattfindet, tritt hier bei *jedem* Koefficienten ein.

§ 9.

Es sollen jetzt die Beziehungen der vorliegenden Untersuchungen zu den oben erwähnten Forschungen L. KRONECKER's dargelegt werden.

Sei γ eine primitive Wurzel (mod λ), so kann man setzen:

$$\mu \equiv \gamma^m, \qquad \mu + 1 \equiv \gamma^l \pmod{\lambda},$$

oder

$$m = \operatorname{ind} \mu, \qquad l = \operatorname{ind}(\mu + 1).$$

Daraus folgt leicht:

$$-\mu = \operatorname{ind} \nu, \qquad l - m = \operatorname{ind}(\nu + 1); \qquad \frac{\lambda - 1}{2} + l = \operatorname{ind}(\lambda - \mu - 1),$$

$$\frac{\lambda - 1}{2} + m = \operatorname{ind}(\lambda - \mu), \qquad \frac{\lambda - 1}{2} + l - m = \operatorname{ind}(\lambda - \nu - 1),$$

$$\frac{\lambda - 1}{2} - m = \operatorname{ind}(\lambda - \nu); \qquad \frac{\lambda - 1}{2} + m - l = \operatorname{ind}(\xi - 1), \qquad -l = \operatorname{ind} \xi;$$

$$\frac{\lambda - 1}{2} - l = \operatorname{ind}(\lambda - \xi), \qquad m - l = \operatorname{ind}(\lambda - \xi + 1).$$

Hiernach haben wir 6 Exponentenpaare von γ; und diese 6 Paare sind es, welche durch die komplexe Zahl

$$1 - \zeta^l + \zeta^m$$

(oder die andern 5 entsprechenden) *die ψ-Funktion*

$$\psi_{\gamma^m} = \psi_\mu$$

charakterisiren. Genau diese 6 Paare zählt KRONECKER auf. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 93, S. 357.) Während also KRONECKER zeigt, dass die Zahl $1 - \zeta^l + \zeta^m$; $\zeta^{\lambda-1} = 1$ die ψ-Funktion charakterisirt, haben wir die Norm der Zahl $z + \alpha - \alpha^{\gamma^m}$; $\alpha^\lambda = 1$ ins Auge gefasst. (Man beachte den Exponenten m, welcher in γ^m und $\lambda - 1$, welches in λ übergeht.)

Die einfachste Beziehung nun, welche zwischen unserer Zahl λ und der von KRONECKER betrachteten Primzahl n, die wir p nennen wollen, bestehen kann, ist die, dass

$$p = 2\lambda + 1$$

genommen wird. Dann müssen beide Zahlen p und λ von der Form $6n + 5$ sein. Demnach erhalten wir, wenn wir alle Paare m, l bilden, $\frac{p+1}{6}$ nicht auf einander zurückführbare. Formen wir nun $1 + \zeta^m - \zeta^l$ in $1 + (-1)^m\alpha^m - (-1)^l\alpha^l$, wo $\alpha^\lambda = 1$ ist, um, so erhalten wir eine der Zahlen $1 + \alpha - \alpha^{a+1}$ oder $1 + \alpha + \alpha^{a+1}$. Da nun $1 + \gamma^m - \gamma^l \equiv 0 \pmod p$, ($\gamma$ ist hier eine primitive Wurzel der Primzahl p und m und l bestimmen sich durch die Kongruenz $\gamma^l \equiv 1 + \gamma^m \pmod p$) so enthalten die obigen komplexen Zahlen einen oder mehrere Primteiler von p; ihre Norm ist durch p oder eine Potenz von p teilbar. Es gibt also $\frac{p+1}{6}$ solcher Formen trinomischer komplexer Zahlen, welche einen (oder mehrere) Primteiler von p enthalten. Nun führt jede Zahl $1 + \alpha - \alpha^{a+1}$ zu *drei* im allgemeinen verschiedenen Normen, wie (25) zeigt, nämlich:

$$1 + \Sigma q_h, \qquad 1 + \Sigma(-1)^{h+k+1}.q_h, \qquad 1 + \Sigma(-1)^h q_h;$$

ferner führt die Zahl $1 + \alpha + \alpha^{\mu+1}$ nur zu *einer* Norm

$$1 + \frac{1}{3}\Sigma(-1)^k q_h.$$

Also führen die für λ vorhandenen $\frac{\lambda-5}{6}$ sechsgliedrigen Gruppen $z+\alpha\pm\alpha^{\mu+1}$ zu $4.\frac{\lambda-5}{6}$ im allgemeinen verschiedenen Normen. Die Form $z+\alpha\pm\alpha^2$ ist auszuschliessen. Ebenso sehen wir von $m=0$, $l=1$, welches zur Form $2-\zeta$ führt, ab und erhalten also nur $\frac{p-5}{6}$ Zahlen, deren Normen durch p teilbar sind. Mithin sind unter den überhaupt für unsere Frage vorhandenen $\frac{4\lambda-20}{6}$ Normen $\frac{2\lambda-4}{6}$ oder in runder Zahl die Hälfte durch p teilbar.

Ist $p = 2\lambda + 1$ und p und λ jedes Primzahl, so ist die Hälfte aller nicht auf einander zurückführbaren Normen $N(1 + \alpha \pm \alpha^{\mu+1})$; $\alpha^\lambda = 1$ durch p teilbar.

Merkwürdiger Weise haben die Zahlen $p=2\lambda+1$ des ersten Hundert alle die Eigenschaft, dass sich Normen angeben lassen, welche Potenzen von p sind, also $p^g = N(1+\alpha\pm\alpha^{\mu+1})$; $\alpha^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

Als Beispiel wählen wir $p = 83$, also $\lambda = 41$. Nehmen wir $\gamma = 2$ als primitive Wurzel (mod 83), so erhalten wir folgende 14 Zahlenpaare m, l

$$m = 0,\ 1,\ 72,\ 2,\ 27,\ 73,\ 8,\ 3,\ 62,\ 28,\ 4,\ 56,\ 63,\ 47$$

$$l = 1,\ 72,\ 2,\ 27,\ 73,\ 8,\ 3,\ 62,\ 28,\ 24,\ 56,\ 63,\ 47,\ 29.$$

Die unter einander stehenden Paare gehören zusammen. Beispielsweise liefert $m = 73$, $l = 8$ die Zahl $1 + \zeta^{73} - \zeta^8$, oder da $\zeta = -\alpha$, $\alpha^{41} = 1$ ist, die Zahl $1 - \alpha^{32} - \alpha^8$, welche gleichwertig mit $1 + \alpha^{24} - \alpha^{33}$ oder mit $1 + \alpha - \alpha^{27}$ ist, wenn wir nur die Berechnung der Norm ins Auge fassen. So erhalten wir folgende 13 Zahlen, deren Normen die Primzahl 83 als Faktor enthalten müssen:

$$1 + \alpha + \alpha^r, \quad \text{wo} \quad r = 34,\ 26,\ 37;$$

$$1 + \alpha - \alpha^r, \quad \text{wo} \quad r = 15,\ 8,\ 38,\ 27,\ 15,\ 34,\ 36,\ 14,\ 31,\ 20.$$

$2-\zeta$ haben wir ausgeschlossen; $r = 15$ tritt zufällig zweimal auf.

Für $\lambda = 41$ erhalten wir folgende Zusammenstellung:

$$
\begin{array}{rcl}
\mu & = & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 11,\ 12 \\
\nu & = & 1,\ 21,\ 14,\ 31,\ 33,\ 15,\ 24 \\
\mu + 1 & = & 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 12,\ 13 \\
\nu + 1 & = & 2,\ 22,\ 15,\ 32,\ 34,\ 16,\ 25 \\
\xi & = & 21,\ 14,\ 31,\ 33,\ 7,\ 24,\ 19 \\
\lambda - \mu & = & 40,\ 39,\ 38,\ 37,\ 36,\ 30,\ 29 \\
\lambda - \nu & = & 40,\ 20,\ 27,\ 10,\ 8,\ 26,\ 17 \\
\lambda - \xi + 1 & = & 21,\ 28,\ 11,\ 9,\ 35,\ 18,\ 23.
\end{array}
$$

Die in vertikaler Reihe stehenden Zahlen bilden eine Gruppe; jede Gruppe führt zu 4 Normen $N(1 + \alpha \pm \alpha^{\alpha+1})$. Schliessen wir die erste Gruppe aus, so bleiben 24 Normen, deren Hälfte (12) durch 83 teilbar ist. Die genauere Ausrechnung ergibt, dass die Zahlen $1 + \alpha - \alpha^{15}$, $1 + \alpha - \alpha^{27}$, $1 + \alpha - \alpha^{8}$, $1 + \alpha - \alpha^{34}$, $1 + \alpha - \alpha^{36}$ die Norm $571\,787 = 83 . 83 . 83$ liefern. Die Zahlen gehören der dritten und fünften Gruppe an.

An dieser Stelle erlaube ich mir, die folgenden Worte des Herrn L. Kronecker aus seinem Aufsatze *Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen,* Journal für Mathematik, Bd. 93, S. 359 anzuführen:

»Dass, wie Jacobi vermutet zu haben scheint, die von ihm mit $(\alpha, x)^\lambda$ bezeichneten Kreisteilungsausdrücke *stets* als Produkte konjugirter ψ-Funktionen darstellbar sein sollten, ist nach den oben dafür gefundenen Bedingungen kaum anzunehmen; denn darnach müsste stets eine Zahl m existiren, für welche jede der komplexen Zahlen

$$1 + \zeta^{km} - \zeta^{k\,\mathrm{ind}(1+g^m)}; \qquad (k = 1, 3, \ldots, \lambda - 2)$$

wo ζ eine Wurzel der Gleichung $\zeta^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} + 1 = 0$ bedeutet, entweder eine komplexe Einheit oder aber ein Produkt konjugirter algebraischer Primteiler von λ ist. Ich habe jedoch noch für keinen Wert von λ feststellen können, dass diese Bedingungen nicht erfüllbar sind. Die erste Primzahl, welche in dieser Beziehung zur Untersuchung geeignet erscheint, ist $\lambda = 83$.«

Ersetzen wir λ in dieser Darlegung KRONECKER's durch p, so haben wir gesehen, dass sogar 5 verschiedene Werte für m angegeben werden können, welche für 83 jene Bedingungen erfüllen. Dagegen sind sie schon für die nächste Primzahl 89 *nicht* erfüllbar, jedoch für 97 wieder erfüllbar. Die erste Primzahl, welche zur weiteren Untersuchung einladet, dürfte $p = 107$ sein.[1]

§ 10.

Wenden wir uns schliesslich der Frage zu, welche Teiler die Normen zulassen, so werden wir finden, dass nur die Primzahlen von der Form

$$p = 2m\lambda + 1$$

in unzähliger Menge als Teiler von $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ vorkommen. Zu diesem Resultate gelangen wir leicht auf dem von E. KUMMER bei ähnlichen Untersuchungen betretenen Wege. Es besteht für jede Grösse x die Kongruenz:

$$x^p - x \equiv x(x-1)(x-2)\dots(x-p+1) \pmod{p}. \tag{43}$$

Diese sehr bekannte Beziehung kann man wohl am einfachsten durch Einführung der primitiven Wurzel g und Darstellung der Zahlen 1, 2, ..., $p-1$ durch die ihnen kongruenten Potenzen von g bestätigen. Nehmen wir nun $p = 2m\lambda + n$, $x = z + \alpha - \alpha^{\mu+1}$, setzen kurz

$$N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = N(z),$$

so wird

$$(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})^p - (z + \alpha - \alpha^{\mu+1}) \equiv \alpha^n - \alpha^{n(\mu+1)} - \alpha + \alpha^{\mu+1} \pmod{p},$$

---

[1] Bisher fand ich:

$$\begin{aligned}
N(1 + a - a^{50}) &= 107.243589,\\
N(1 + a - a^{4}\ ) &= 107.181579,\\
N(1 + a - a^{35}) &= 107.246769,\\
N(1 + a - a^{41}) &= 107.27773\ ,\\
N(1 + a - a^{32}) &= 107.107.7103. \qquad a^{53} = 1.
\end{aligned}$$

Aber keine trinomische Zahlform $1 + a - a^{\mu+1}$ hat mehr als *zwei* verschiedene Primteiler von 107 im Bereiche der 53sten Einheitswurzeln. Daher ist die Darstellung von 107^g als Norm einer solchen Zahlform nicht sehr wahrscheinlich.

also

$$\alpha^n - \alpha^{n(\mu+1)} - \alpha + \alpha^{\nu+1}$$

$$\equiv (z + \alpha - \alpha^{\nu+1})(z - 1 + \alpha - \alpha^{\nu+1}) \dots (z - p + 1 + \alpha - \alpha^{\nu+1}) \pmod p,$$

mithin:

$$(44) \qquad N(\alpha^n - \alpha^{n(\mu+1)} - \alpha + \alpha^{\nu+1})$$

$$\equiv N(z) \,.\, N(z - 1) \dots N(z - p + 1) \pmod p.$$

Diese Kongruenz gilt *allgemein,* für jeden Wert von z. Nehmen wir an, $N(z)$ enthalte den Teiler p, so muss sein

$$(45) \qquad N(\alpha^n - \alpha^{n(\mu+1)} - \alpha + \alpha^{\nu+1}) \equiv 0 \pmod p.$$

Will man also *alle* Primzahlen $p = 2m\lambda + n$ erhalten, welche als Teiler der unendlich vielen Normen $N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1})$ auftreten können, so braucht man nur die linke Seite der Kongruenz (45) zu bilden. Für $n = 1$ gelten diese Schlüsse nicht. Primzahlen von der Form $p = 2m\lambda + 1$ können daher in unbegrenzter Menge auftreten. Die Induktion bestätigt diese Schlüsse. Fast alle Normen, welche ich berechnet habe, lieferten Teiler von der Form $2m\lambda + 1$. Nur für $\lambda = 31$ traten wiederholt die Divisoren 2^6 und 5^3 auf. Um auch ein Beispiel für $\lambda = 6n + 1$ neben dem obigen zu geben, teile ich die folgende Zusammenstellung mit.

$\lambda = 31.$

$\mu =$	1,	2,	3,	4,	5,	11
$\nu =$	1,	16,	21,	8,	25,	17
$\xi =$	16,	21,	8,	25,	26,	13
$\lambda - \mu =$	30,	29,	28,	27,	26,	20
$\lambda - \nu =$	30,	15,	10,	23,	6,	14
$\lambda - \xi + 1 =$	16,	11,	24,	7,	6,	19.

Die erste Gruppe liefert 3 Zahlen, nämlich

$$z + \alpha - \alpha^2, \qquad z + \alpha - \alpha^{16}, \qquad z + \alpha - \alpha^{30}.$$

Die fünfte liefert nur 2 Zahlen:

$$z + \alpha - \alpha^{6}, \qquad z + \alpha - \alpha^{26}.$$

Endlich geben wir eine Norm:

$$N(z + \alpha - \alpha^{5}) = z^{30} + 31(z^{23} - 42z^{19} + 9z^{16} + 91z^{15} + 466z^{12}$$
$$- 51z^{11} + 22z^{9} + 770z^{8} + 11z^{7} - 173z^{5} + 112z^{4} - z^{3} + 5z^{2} + 7z + 1).$$

Die vier Normen für $z = 1$ sind (vergl. § 9)

$$38069, \qquad 46439, \qquad 6263, \qquad 5953.$$

Im Januar 1887.

UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES SÉRIES.

Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler

PAR

M. LERCH
À VINOHRADY.

Soit donnée une série de nombres entiers positifs

$$m_0,\ m_1,\ m_2,\ \ldots$$

dont chaque terme est un diviseur de tous les suivants, et soient

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots$$

des quantités complexes dont les parties réelles sont respectivement

$$\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots$$

et qui sont supposées positives et telles que la série $\sum\gamma_\nu$ soit divergente. Alors, dans tous les cas où la série

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{m_\nu}$$

sera convergente pour chaque valeur de x moindre en valeur absolue que l'unité, elle définira une fonction de la variable x n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental $|x| \leqq 1$.

Car en posant

$$x = e^{\pi i\left(\frac{2a}{m_s} + ai\right)}$$

où a est un nombre entier et α une quantité réelle et positive on aura

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} c_\nu e^{\frac{2am_\nu}{m_s}\pi i - \alpha\pi m_\nu} + \sum_{\nu=s}^{\infty} c_\nu e^{-\alpha\pi m_\nu}.$$

Or la série $\sum\gamma_\nu$ étant divergente et se composant de termes positifs il est aisé de voir que

$$\lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=s}^{\infty} \gamma_\nu e^{-\alpha\pi m_\nu} = +\infty$$

d'où l'on a aussi

$$\lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=s}^{\infty} c_\nu e^{-\alpha\pi m_\nu} = \infty$$

et par conséquent

$$\lim_{\alpha=0} \mathfrak{P}\left(e^{\pi i\left(\frac{2a}{m_s}+\alpha i\right)}\right) = \infty.$$

Donc la fonction $\mathfrak{P}(x)$ croît indéfiniment quand x s'approche d'une certaine manière des quantités de la forme $e^{\frac{2a}{m_s}\pi i}$ qui se présentent dans chaque partie de la circonférence $|x| = 1$. Par conséquent, cette ligne-ci est une ligne singulière de la fonction $\mathfrak{P}(x)$.

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION

PAR

GUSTAF KOBB
à STOCKHOLM.

Dans son mémoire *De motu puncti singularis,*[1] JACOBI a étudié le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution et il a démontré le théorème suivant:

»S'il existe une fonction de force et si le mouvement ne dépend que de la position du point matériel dans une section méridionale de la surface, on peut toujours ramener l'intégration des équations du mouvement à des quadratures.»

Dans les cas où l'équation de la surface est algébrique et la fonction de force une fonction rationnelle, ces quadratures sont des intégrales Abéliennes. Je me propose donc de trouver les conditions nécessaires, que doit remplir l'équation de la surface pour que ces intégrales Abéliennes se réduisent à des intégrales elliptiques.

Traitons la question à l'aide des coordonnées rectilignes et supposons la masse du mobile égale à l'unité.

Si l'axe des x coïncide avec l'axe de révolution, l'équation de la surface prend la forme

$$f(y^2 + z^2, x) = 0$$

et la fonction de force la forme

$$U = R(y^2 + z^2, x).$$

---

[1] Journal für Mathematik, T. 24, 1842, p. 5—27.

Soient x, y, z les coordonnées du point à l'époque t, nous aurons pour équations de mouvement

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \mu.\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \mu.\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \mu.\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Le principe des forces vives et le principe des aires nous fournissent deux intégrales du système (1), savoir

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= 2H + 2U \\
x.\frac{dy}{dt} - y.\frac{dz}{dt} &= c
\end{aligned}
$$

où H et c sont des constantes d'intégration. Nous poserons ensuite

$$
\begin{aligned}
z &= r.\cos\Psi \\
y &= r.\sin\Psi.
\end{aligned}
$$

Les équations (2) deviennent alors

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2.\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2 &= 2H + 2U \\
r^2.\frac{d\Psi}{dt} &= c \\
f(r^2,\ x) &= 0
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
r^2\left[1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right].\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= r^2(2H + 2U) - c^2 \\
r^2.\frac{d\Psi}{dt} &= c
\end{aligned}
$$

et par conséquent

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{r\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\,.\,dx}{\sqrt{r^2(2H+2U)-c^2}}$$

(4)

$$\Psi - \Psi_0 = c\int_0^t \frac{dt}{r^2} = c\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\,.\,dx}{r\sqrt{r^2(2H+2U)-c^2}}.$$

Ainsi, si l'équation de la surface est une équation algébrique et U une fonction rationnelle, t et Ψ sont exprimés par des intégrales Abéliennes de la variable x. Pour les ramener à la forme normale nous poserons

$$\xi^2 = \frac{r^2\left[1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right]}{r^2(2H+2U)-c^2}.$$

En éliminant r^2 entre cette expression et l'équation

$$f(r^2, x) = 0$$

nous aurons une nouvelle équation

$$\varphi(\xi^2, x) = 0.$$

Nous allons démontrer, que si la première équation est irréductible, la dernière l'est aussi. Dans ce but nous employons le théorème suivant donné par M. Weierstrass dans ses leçons sur la théorie des fonctions Abéliennes:

»Soit

$$f(x, y) = 0$$

une équation algébrique irréductible de degré n en y et

$$z = R(x, y)$$

où R désigne une fonction rationnelle. Formons la résolvante de Galois

$$\prod_{\beta=1}^{n}[z - R(x, y_\beta)] = \frac{G(x, z)}{G_0(x)}.$$

Ici il peut se présenter deux cas, l'équation

$$G(x, z) = 0$$

est ou bien irréductible, ou, si elle est réductible, on doit avoir

$$G(x, z) = [G_1(x, z)]^p$$

où p est un diviseur de n et l'équation

$$G_1(x, z) = 0$$

est une équation irréductible. Dans le premier cas, on a aussi

$$y = R_1(x, z)$$

où R_1 désigne une fonction rationnelle et les deux courbes

$$G(x, z) = 0; \qquad F(x, y) = 0$$

sont de même genre.

Pour que le second cas puisse avoir lieu, il faut que les (n) valeurs de z, qui correspondent à chaque valeur de x et aux (n) valeurs différentes de y, se partagent en un certain nombre de groupes égaux entre eux. Si donc on peut montrer, que pour une certaine valeur de x et pour les n valeurs différentes correspondantes de y, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, les n valeurs de z

$$z_1 = R(x, y_1), \qquad z_2 = R(x, y_2), \quad \ldots, \quad z_n = R(x, y_n)$$

sont toutes différentes entre elles, il en résulte que l'équation

$$G(x, z) = 0$$

est irréductible.»

Supposons maintenant

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

une équation réductible, tandis que

$$f(r^2, x) = 0$$

est irréductible.

Il faut donc, qu'au moins deux valeurs de ξ^2 coïncident pour des valeurs ordinaires de x:

$$\frac{r_\mu^2\left[1+\left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2\right]}{r_\mu^2(2H+2U_\mu)-c^2}=\frac{r_\nu^2\left[1+\left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2\right]}{r_\nu^2(2H+2U_\nu)-c^2}$$

d'où résulte après quelques réductions la relation suivante

$$r_\mu^2\,.\,r_\nu^2\,.\,2H\left[\left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2-\left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2\right]-c^2\left[r_\mu^2\left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2-r_\nu^2\,.\left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2+r_\mu^2-r_\nu^2\right]$$

$$+\,2r_\mu^2\,.\,r_\nu^2\left[U_\nu\left[1+\left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2\right]-U_\mu\left[1+\left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2\right]\right]=0;$$

mais puisque H et c^2 sont des constantes arbitraires, il faut que leurs coefficients s'annullent, ainsi

$$r_\mu^2\,.\,r_\nu^2\left[\left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2-\left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2\right]=0$$

$$r_\mu^2\,.\left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2-r_\nu^2\,.\left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2+r_\mu^2-r_\nu^2=0.$$

On en tire

$$(r_\mu^2-r_\nu^2)\left[1+\left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2\right]=0$$

ou

$$r_\mu^2-r_\nu^2=0$$

mais cela est impossible, car l'équation

$$f(r^2,\ x)=0$$

est irréductible.

Ainsi la nouvelle équation

$$\varphi(\xi^2,\ x)=0$$

ne peut être réductible, elle est donc irréductible. Il résulte de là, qu'on peut exprimer r^2 comme fonction rationnelle de ξ^2 et x:

$$r^2=R_1(\xi^2,\ x)$$

et par conséquent, si nous considérons

$$f(r^2, x) = 0$$

comme équation entre r^2 et x et

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

comme équation entre ξ^2 et x, les deux courbes algébriques définies par ces équations sont de même genre.

Le système (4) prend la forme

$$\begin{aligned} t &= \int_{x_0}^{x} \xi dx \\ \Psi - \Psi_0 &= c \int_{x_0}^{x} \frac{\xi dx}{R_1(\xi^2, x)} \qquad (5) \\ \varphi(\xi^2, x) &= 0. \end{aligned}$$

Pour trouver le genre de

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

considérée comme équation entre ξ et x nous employons ce théorème général:

»Soit $f(x, y) = 0$ une courbe algébrique de genre ρ et λ le nombre total des systèmes circulaires de la forme

$$\begin{aligned} x &= a + \tau^{s_\nu} \\ y &= \alpha\tau^{\mu}[1 + \mathfrak{p}(\tau)] \qquad (\alpha \gtrless 0) \end{aligned}$$

où μ est un nombre *impair*.[1] En désignant par ρ' le genre de la courbe $f(x, z^2) = 0$ où $z^2 = y$, nous aurons la relation suivante

$$2\rho' = 4\rho + \lambda - 2.«$$

Pour démontrer cette relation nous employons une formule donnée par M. Weierstrass.

[1] Je désigne par $\mathfrak{p}(\tau)$ une série contenant seulement des puissances positives de la variable τ.

»Soit $F(x, y) = 0$ une courbe algébrique, où le domaine du point $x = \infty$, $y = \infty$ est représenté par les n systèmes distincts

$$x = \tau^{-1}$$
$$y = b_\nu \tau^{-1} + \mathfrak{p}(\tau).$$

En désignant par ρ le genre de la courbe et par

$$s = \sum (s_\nu - 1)$$
$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$y = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau)$$

la sommation étendue à tous les systèmes circulaires où le nombre s_ν a des valeurs positives, on a la formule

$$2\rho = s - 2n + 2.»$$

Nous considérons d'abord les systèmes circulaires de la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

Soit

$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$y = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau) \qquad (b_\nu \gtrless 0)$$

un des systèmes, qui représentent le domaine du point analytique (a_ν, b_ν) de la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

En substituant

$$z^2 = y$$
$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$z^2 = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau)$$

nous aurons dans le domaine du point $(a_\nu + \sqrt{b_\nu})$ de la courbe

$$f(x, z^2) = 0$$
$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$z = + \sqrt{b_\nu} + \mathfrak{p}_1(\tau)$$

et dans le domaine du point $(a_\nu - \sqrt{b_\nu})$

$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$

$$z = -\sqrt{b_\nu} + \mathfrak{p}_2(\tau).$$

Comme nous pouvons employer le même raisonnement pour autres systèmes circulaires, nous en tirons:

au point (a_ν, b_ν) (où $b_\nu \gtrless 0$) de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

correspondent deux points $(a_\nu + \sqrt{b_\nu})$ et $(a_\nu - \sqrt{b_\nu})$ de la courbe

$$f(x, z^2) = 0$$

dont les domaines sont représentés par des systèmes circulaires du même nombre et de la même nature. Ainsi, soit (a_ν, b_ν) un point non critique, les deux points $(a_\nu + \sqrt{b_\nu})$ et $(a_\nu - \sqrt{b_\nu})$ sont aussi des points non critiques.

Nous supposons ensuite

$$b_\nu = 0.$$

Ainsi nous aurons

$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu} \qquad (\alpha \gtrless 0)$$

$$y = \alpha\tau^{\mu}[1 + \mathfrak{p}(\tau)]. \qquad (\mu \gtrless 0)$$

Soit

$$\mu = 2\mu'.$$

On en tire

$$\begin{cases} x = a_\nu + \tau^{s_\nu} \\ z = +\sqrt{\alpha}\cdot\tau^{\mu'}[1 + \mathfrak{p}_1(\tau)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a_\nu + \tau^{s_\nu} \\ z = -\sqrt{\alpha}\cdot\tau^{\mu'}[1 + \mathfrak{p}_2(\tau)]. \end{cases}$$

Par conséquent le nombre des systèmes est doublé, mais leur nature n'est pas changée.

Soit à présent

$$\mu = 2\mu' + 1$$

nous ne pouvons pas représenter le domaine du point correspondant de la courbe

$$f(x, z^2) = 0$$

par des systèmes circulaires de la même nature. Il faut donc poser

$$x = a_\nu + \tau^{2s_\nu}$$
$$z = \alpha\tau^\mu[1 + \mathfrak{p}(\tau)].$$

Le nombre des systèmes n'est pas changé. Ainsi, soit $(a_\nu, 0)$ ou (a_ν, ∞) des points non critiques de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

ils sont des points critiques de la courbe

$$f(x, z^2) = 0.$$

Si la série y_τ commence par une puissance paire, le domaine est représenté par les deux systèmes

$$\begin{cases} x = a_\nu + \tau \\ z = +\sqrt{a}\cdot\tau^{\mu'}[1 + \mathfrak{p}_1(\tau)] \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= a_\nu + \tau \\ z &= -\sqrt{a}\cdot\tau^{\mu'}[1 + \mathfrak{p}_2(\tau)] \end{aligned}$$

et si y_τ commence par une puissance impaire, le domaine est représenté par le système

$$x = a_\nu + \tau^2$$
$$z = \alpha\tau^\mu[1 + \mathfrak{p}(\tau)].$$

Maintenant nous allons transformer les deux courbes

$$f(x, y) = 0; \qquad f(x, z^2) = 0$$

de manière que le point $x = \infty$ ne soit pas un point critique.

Soit $x = a$ une valeur, à laquelle correspondent n valeurs distinctes de la variable y

$$b_1, b_2, \ldots, b_n.$$

Posons

$$\xi = \frac{1}{x - a}$$

$$\eta = \frac{y}{x - a}.$$

Comme (a, b_ν) est un point non critique, nous avons

$$x = a + \tau$$
$$y = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau)$$

et par conséquent

$$\xi = \tau^{-1}$$
$$\eta = b'_\nu . \tau^{-1} + \mathfrak{p}_1(\tau).$$

Ainsi par cette substitution linéaire, nous pouvons former une nouvelle courbe algébrique

$$\varphi(\xi, \eta) = 0$$

de même genre, où, quand ξ croît indéfiniment, le rapport $\frac{\xi}{\eta}$ tend vers n valeurs finies distinctes

$$b'_1, b'_2, \ldots, b'_n.$$

Il faut donc remarquer, que si $(x = \infty, y = \infty)$ est un point critique, le point $(\xi = 0, \eta = \infty)$ est aussi un point critique de la même nature. De la même manière nous formons par la substitution

$$\xi_1 = \frac{1}{x - a_1}$$
$$\eta_1 = \frac{z}{x - a_1}$$

où $x = a_1$ est une valeur non critique de la courbe

$$f(x, z^2) = 0$$

une nouvelle courbe algébrique

$$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$$

de même genre, que $f(x, z^2) = 0$, et où le rapport $\frac{\xi_1}{\eta_1}$ tend vers $2n$ valeurs distinctes

$$c_1, c_2, \ldots, c_{2n}.$$

Soit

$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$y = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau)$$

un des systèmes, qui représentent le domaine du point (a_ν, b_ν) de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

nous aurons si

$$|x - a_\nu| < |a - a_\nu|,$$

$$\xi = -\frac{1}{a - a_\nu - (x - a_\nu)} = -\frac{1}{a - a_\nu}\left\{1 + \frac{x - a_\nu}{a - a_\nu} + \left(\frac{x - a_\nu}{a - a_\nu}\right)^2 + \left(\frac{x - a_\nu}{a - a_\nu}\right)^3 + \dots\right\}$$

$$\xi = -\frac{1}{a - a_\nu} - \frac{\tau^{s_\nu}}{a - a_\nu} - \frac{\tau^{2s_\nu}}{(a - a_\nu)^2} - \dots$$

$$\eta = y \cdot \xi = -\frac{b_\nu}{a - a_\nu} + \mathfrak{p}_1(\tau).$$

Supposons

$$\xi = -\frac{1}{a - a_\nu} + \tau_1^{s'_\nu}$$

$$\eta = -\frac{b_\nu}{a - a_\nu} + \mathfrak{p}_2(\tau_1).$$

Dans la théorie des fonctions algébriques on démontre le théorème suivant:

»Si l'on peut représenter un certain domaine du point analytique (a, b) de la courbe

$$F(x, y) = 0$$

par les deux systèmes

$$x = a + \mathfrak{p}_1(\tau) = a + \mathfrak{p}_1^{(1)}(\tau_1)$$

$$y = b + \mathfrak{p}_2(\tau) = b + \mathfrak{p}_2^{(1)}(\tau_1)$$

il existe entre les deux variables auxiliaires la relation

$$\tau_1 = g\tau[1 + \mathfrak{p}(\tau)].« \qquad (g \gtrless 0)$$

En employant ce théorème nous aurons

$$s'_\nu = s_\nu.$$

Ainsi le domaine du point

$$\xi = -\frac{1}{a - a_\nu}, \qquad \eta = -\frac{b_\nu}{a - a_\nu}$$

qui correspond au point (a_ν, b_ν) de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

est représenté à la même manière, que le domaine du point (a_ν, b_ν). Le nombre des systèmes est le même et leur nature n'est pas changée.

Le même raisonnement s'applique à la courbe

$$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0.$$

Maintenant nous sommes en état de déterminer le genre des nouvelles courbes

$$\varphi(\xi, \eta) = 0; \qquad \varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0.$$

Dans la courbe $\varphi(\xi, \eta) = 0$, le domaine du point $(\xi = \infty, \eta = \infty)$ est représenté par les n systèmes distinctes

$$\begin{aligned} \xi &= \tau^{-1} \\ \eta &= b_\nu^{(1)} \tau^{-1} + \mathfrak{p}(\tau). \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, n)}$$

En employant la formule de M. Weierstrass nous aurons le genre ρ de la courbe

$$2\rho = s - 2n + 2$$

où

$$\begin{aligned} s &= \Sigma(s_\nu - 1) \\ x &= a_\nu + \tau^{s_\nu} \\ y &= b_\nu + \mathfrak{p}_1(\tau) \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (b_\nu \gtreqless 0)}$$

la sommation étendue à tous les systèmes circulaires de la courbe $\varphi(\xi, \eta) = 0$ où s_ν a des valeurs positives.

Dans la courbe $\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$ le domaine du point $(\xi_1 = \infty, \eta_1 = \infty)$ est représenté par $2n$ systèmes distincts

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \tau^{-1} \\ \eta_1 &= c_\nu \tau^{-1} + \mathfrak{p}(\tau). \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, 2n)}$$

En désignant par

$$s_1 = \Sigma(s'_\nu - 1)$$

la somme correspondante pour la courbe $\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$ et par ρ' son genre, nous aurons

$$2\rho' = s_1 - 4n + 2.$$

Pour exprimer s_1 par s nous décomposons s_1 en quatre sommes

$$s_1 = \sum_{(1)}(s'_\nu - 1) + \sum_{(2)}(s'_\nu - 1) + \sum_{(3)}(s'_\nu - 1) + \sum_{(4)}(s'_\nu - 1).$$

Dans la première somme, la sommation est étendue aux points de la courbe $\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$, qui correspondent aux points critiques (a_ν, b_ν), où $b_\nu \gtrless 0$, de la courbe $f(x, y) = 0$; dans la deuxième aux points, qui correspondent aux points critiques $(a_\nu, 0)$ et (a_ν, ∞) de la courbe $f(x, y) = 0$ où y_τ commence par une puissance paire; dans la troisième aux points, qui correspondent aux points critiques $(a_\nu, 0)$ et (a_ν, ∞) de la courbe $f(x, y) = 0$, mais où y_τ commence par une puissance impaire et enfin dans la quatrième aux points, qui correspondent aux zéros et pôles non critiques de la courbe $f(x, y) = 0$.

Nous avons trouvé qu'à chaque point (a_ν, b_ν), $b_\nu \gtrless 0$ de la courbe $f(x, y) = 0$ correspondent deux points de la courbe $\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$, dont les domaines sont représentés par des systèmes circulaires du même nombre et de la même nature que le domaine du point (a_ν, b_ν). On en tire

$$s'_\nu = s_\nu$$

$$\sum_{(1)}(s'_\nu - 1) = 2\sum_{(1)}(s_\nu - 1).$$

Dans la deuxième somme le nombre de points et la nature des systèmes ne sont pas changés, mais le nombre des systèmes est doublé; ainsi

$$s'_\nu = s_\nu$$

$$\sum_{(2)}(s'_\nu - 1) = 2\sum_{(2)}(s_\nu - 1).$$

Dans la troisième le nombre de points et de systèmes ne sont pas changés, mais

$$s'_\nu = 2s_\nu$$

$$\sum_{(3)}(s'_\nu - 1) = 2\sum_{(3)}(s_\nu - 1) + \lambda_1$$

si nous désignons par λ_1 le nombre total de systèmes pour ces points.

Dans la quatrième somme on a

$$s'_\nu = 1$$

si la série correspondante y_τ commence par une puissance paire et

$$s'_\nu = 2$$

si la série y_τ commence par une puissance impaire. Par conséquent, en désignant par λ_2 le nombre de ces dernières, on a

$$\sum_{(4)}(s'_\nu - 1) = \lambda_2.$$

Ainsi

$$s_1 = 2\sum_{(1)}(s_\nu - 1) + 2\sum_{(2)}(s_\nu - 1) + 2\sum_{(3)}(s_\nu - 1) + \lambda_1 + \lambda_2$$

mais

$$s = \sum_{(1)}(s_\nu - 1) + \sum_{(2)}(s_\nu - 1) + \sum_{(3)}(s_\nu - 1)$$

donc

$$s_1 = 2s + \lambda_1 + \lambda_2$$

ou, en désignant par λ le nombre total de systèmes de la courbe $f(x, y) = 0$

$$x = a + \tau^{s_\nu}$$
$$y = \alpha\tau^\mu[1 + \mathfrak{p}(\tau)] \qquad (\alpha \gtrless 0)$$

où μ est un nombre *impair*,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$$
$$s_1 = 2s + \lambda,$$

par conséquent

$$2\rho' = 2s + \lambda - 4n + 2$$

et en combinant cette équation avec l'équation

$$2\rho = s - 2n + 2$$

on aura

$$2\rho' = 4\rho + \lambda - 2.$$

C. Q. F. D.

De la même manière on peut démontrer ce théorème plus général:

»Soit $f(x, y) = 0$ une courbe algébrique de genre ρ et λ_m le nombre total des systèmes circulaires de la forme

$$x = a + \tau^{s_\nu}$$
$$y = \alpha\tau^{\mu}[1 + \mathfrak{p}(\tau)] \qquad (\alpha \gtrless 0)$$

où, si m est un nombre premier, μ est un nombre premier avec m. En désignant par ρ_m le genre de la courbe $f(x, z^m)$ où $z^m = y$, nous aurons la relation suivante

$$2\rho_m = 2m\rho + (\lambda_m - 2)(m - 1).»$$

Maintenant nous allons démontrer, que le nombre λ ne peut être nul, si

$$\rho \geqq 1.$$

Soit

$$f(x, y) = 0$$

une courbe algébrique de genre ρ. Formons par la transformation birationnelle

$$x = R(\xi, \eta), \qquad \xi = R_2(x, y)$$
$$y = R_1(\xi, \eta), \qquad \eta = R_3(x, y)$$

une nouvelle courbe algébrique de même genre

$$\varphi(\xi, \eta) = 0$$

où nous supposons que le nombre λ soit nul.

Ainsi en substituant les séries x_τ, y_τ, qui représentent le domaine d'un point arbitraire de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

dans l'expression

$$\eta = R_3(x, y)$$

la série y_τ ne commence jamais par une puissance impaire. Alors nous pouvons extraire la racine carrée

$$\sqrt{\eta_\tau} = \eta_\tau^{(1)} = P(\tau)$$

où $P(\tau)$ est une série, qui ne contient qu'un nombre fini de puissances

négatives dans le domaine d'un point quelconque. Ainsi $\eta^{(1)}$ est une fonction rationnelle de x et y.

Donc

$$\xi = R_2(x, y), \qquad x = R(\xi, [\eta^{(1)}]^2)$$

$$\eta^{(1)} = \overline{R}_3(x, y), \qquad y = R_1(\xi, [\eta^{(1)}]^2)$$

et la courbe algébrique

$$\varphi(\xi, \eta^{(1)}) = 0$$

est aussi de genre ρ. Les deux courbes

$$\varphi(\xi, [\eta^{(1)}]^2) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta^{(1)}) = 0$$

sont donc de même genre

$$\rho' = \rho$$

mais suivant la formule

$$2\rho' = 4\rho + \lambda - 2$$

il résulte, puisque nous supposons $\lambda = 0$,

$$2\rho = 4\rho - 2;$$

ce qui est impossible, si

$$\rho > 1.$$

Ainsi le nombre λ ne peut être nul, si

$$\rho > 1.$$

Soit

$$\rho = 1.$$

Supposons que le nombre λ soit nul pour la courbe

$$\varphi(\xi, \eta^{(1)}) = 0.$$

En posant

$$\sqrt{\eta^{(1)}} = \eta^{(2)}$$

nous obtenons par le même procédé, que les deux courbes

$$\varphi(\xi, [\eta^{(2)}]^2) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta^{(2)}) = 0$$

sont de genre 1.

Cela exige que le nombre λ pour la courbe

$$\varphi(\xi, \eta^{(2)}) = 0$$

soit nul. Si tel est le cas nous répétons le même procédé et enfin il faut que nous trouvions une courbe

$$\varphi(\xi, \eta^{(n-1)}) = 0$$

où

$$\lambda > 0.$$

Car

$$\eta^{(n)} = \sqrt[2^n]{R_3(x, y)} = \sqrt{\eta^{(n-1)}}.$$

Il est évident, qu'en donnant à n une valeur assez grande, $\eta^{(n)}$ doit nécessairement cesser d'être une fonction rationnelle et par conséquent $\eta^{(n-1)}$ commence par une puissance impaire au moins dans le domaine d'un point. Mais alors les deux courbes

$$\varphi(\xi, [\eta^{(n-1)}]^2) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta^{(n-1)}) = 0$$

ne sont pas de même genre, selon la formule

$$2p' = 4p + \lambda - 2.$$

On en tire que la supposition $\lambda = 0$ pour la courbe

$$\varphi(\xi, \eta^{(n-2)}) = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(\xi, [\eta^{(n-1)}]^2) = 0$$

n'est pas juste, et par conséquent les deux courbes

$$\varphi(\xi, [\eta^{(n-2)}]^2) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta^{(n-2)}) = 0,$$

ne sont pas de même genre. En répétant le même raisonnement, nous aurons enfin que le nombre λ ne peut être nul pour la courbe

$$\varphi(\xi, \eta) = 0.$$

Ainsi nous avons trouvé

$$\lambda > 0$$

si

$$\rho \geqq 1.$$

Reprenons notre système d'équations (5)

$$t = \int_{x_0}^{x} \xi dx$$

$$\psi - \psi_0 = c \int \frac{\xi dx}{R(\xi^2, x)}$$

$$\varphi(\xi^2, x) = 0.$$

Maintenant nous pouvons résoudre la question: quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les intégrales du système (5) soient des intégrales elliptiques?

En désignant par ρ' le genre de la courbe

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

considérée comme équation entre ξ et x et par ρ le genre de la même courbe considérée comme équation entre ξ^2 et x nous aurons la formule

$$2\rho' = 4\rho + \lambda - 2.$$

En posant

$$\rho' = 1$$

on a

$$\rho = 0, \qquad \lambda = 4.$$

Mais la courbe

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

considérée comme équation entre ξ^2 et x et la courbe

$$f(x, r^2) = 0$$

considérée comme équation entre r^2 et x sont de même genre.

Par conséquent

$$r^2 = R_1(\zeta)$$

$$x = R_2(\zeta)$$

où R_1 et R_2 sont des fonctions rationnelles du paramètre ζ.

Ayant donc

$$\xi^2 = \frac{r^2\left[1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right]}{r^2(2H + 2U) - c^2}$$

et par conséquent ξ^2 une fonction rationnelle de ζ, il faut déterminer R_1 et R_2 de manière que l'expression de ξ ne contienne qu'une racine carrée

$$\sqrt{R_3(\zeta)}$$

où $R_3(\zeta)$ est un polynôme du troisième ou du quatrième degré.

Supposons

$$U = k$$

où k désigne une constante, on sait que le point matériel décrit une ligne géodésique de la surface. Par conséquent on peut énoncer ce théorème:

»Toutes les surfaces de révolution, qui ont la propriété, que les coordonnées d'une ligne géodésique peuvent être exprimées par des fonctions elliptiques d'un paramètre, sont nécessairement de la forme

$$r^2 = R_1(\zeta)$$

$$x = R_2(\zeta).«$$

Supposons ensuite que la seule force agissante soit la pésanteur, c'est à dire

$$U = gx,$$

nous trouvons, que l'intégration du système (5) peut être effectuée par

des fonctions elliptiques, si la surface de révolution est déterminée par une de ces cinq équations

$$(1) \qquad r = mx$$

$$(2) \qquad r^2 + x^2 = a^2$$

$$(3) \qquad r^2 = 4ax$$

$$(4) \qquad 9ar^2 = x(x - 3a)^2$$

$$(5) \qquad 2r^4 + 3a^2r^2 - 2xa^3 = 0.$$

Ce sont les seuls cas possibles. Les trois premiers cas étaient déjà connus, les deux autres me semblent nouveaux.

Ausgegeben den 1. Juni 1887. — Paru le 1 Juin 1887.

Inhalt. Table des matières.

Preis des Bandes: 12 Mark. — Prix par volume: 15 Fr.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

10:2

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1887.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

CENTRAL-TRYCKERIET STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

REDACTION

ÜBER DIE BEDEUTUNG DES PRINCIPS DER LEBENDIGEN KRAFT FÜR DIE FRAGE VON DER STABILITÄT DYNAMISCHER SYSTEME

VON

KARL BOHLIN

in STOCKHOLM.

Sehr viele mechanische Probleme, und zwar alle solche, wo die wirkenden Kräfte als partielle Ableitungen eines von der expliciten Zeit unabhängigen Potentials betrachtet werden können, führen auf Differentialgleichungen, zu welchen ein erstes Integral — die Gleichung der lebendigen Kraft — sich unmittelbar ergiebt. Nicht selten erhält man auch aus den Differentialgleichungen einer Aufgabe, es sei einer mechanischen oder irgend welcher anderen, ein erstes Integral, welches, wenn es auch mit dem Namen der lebendigen Kraft nicht zu bezeichnen ist, doch den Charakter des so benannten Integrales besitzt, hauptsächlich insofern die linke Seite der Gleichung unter quadratischer Form auftritt. In solchen Fällen, wo die Veränderlichen, wie bei mechanischen Aufgaben, nur reelle Werthe annehmen können, erlaubt die besagte Form der Gleichung eine Betrachtungsweise, wodurch man oft über die Grenzen der Veränderlichen eine Entscheidung treffen kann. Handelt es sich um die Bewegungen eines Systems materieller Punkte, so ist die Zeit als unabhängige Veränderliche ganz unbeschränkt, die Koordinaten der beweglichen Punkte können aber durch die Natur des Integrals der lebendigen Kraft oder einer entsprechenden Gleichung zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen sein. In den Fällen, wo es gelingt solche Grenzen an-

zugeben, hat man auf die Frage von der Stabilität der Bewegung, unabhängig von der vollständigen Lösung der Differentialgleichungen, eine Antwort gefunden. Eine solche Antwort wird nun im allgemeinen möglich sein, so oft das anzuwendende Integral, kurzweg die Gleichung der lebendigen Kraft, nur die Koordinaten eines einzigen Punktes als Veränderliche enthält. Ausser den Fällen, wo nur *ein* beweglicher Punkt in Frage kommt, gehört hierher ein komplicirterer Fall, welcher einigen Kombinationen von drei Körpern in unserem Sonnensysteme sehr nahe entspricht. Aber auch wenn das Princip der lebendigen Kraft zur vollständigen Entscheidung über die Stabilitätsfrage nicht ausreicht, lassen sich doch im allgemeinen aus demselben gewisse Betrachtungen über die Grenzen der Bewegung ziehen.

Indem wir uns erlauben die erwähnte Betrachtungsweise nebst einigen Beispielen in den folgenden Seiten mitzutheilen, werden wir voraussetzen, dass die Bewegungen in einer Ebene stattfinden. Man überzeugt sich leicht, dass diese Annahme keine wesentliche Beschränkung enthält und dass man nachher ohne Schwierigkeit auf die dritte Dimension Rücksicht nehmen kann.

Um die Begriffe festzuhalten, betrachten wir den folgenden einfachen Fall. Wir nehmen nämlich an, dass die Bewegungsgleichungen eines in der Ebene freien materiellen Punktes P auf ein erstes Integral von der Form

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - f(x, y) + h = 0$$

führen. Hier bezeichnet ds das Differential von dem Wege des Punktes, x und y seine rechtwinkligen Koordinaten und h die Integrationskonstante. In der Function $f(x, y)$ treten aber im allgemeinen die x und y nicht unmittelbar als Koordinaten auf, sondern diese Function ergiebt sich zunächst unter der Form $F(r, \rho)$, wo r und ρ die beiden Abstände des Punktes P von zwei anderen Punkten bedeuten. Da die letztere Form sich als einfacher für die Diskussion erweist, werden wir dieselbe beibehalten, indem wir r und ρ als Koordinaten wählen und folgende Form des Integrals annehmen

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = R, \tag{1}$$

wo die Bezeichnung

$$(2) \qquad R = F(r, \rho) - h$$

angewandt ist. Wir stellen jetzt die Gleichung

$$(3) \qquad R = 0$$

auf. Dieselbe bezeichnet im allgemeinen eine Kurve, welche nach (1) so beschaffen ist, dass die Geschwindigkeit des Punktes m gleich Null ist, so oft der Punkt sich auf dieser Kurve befindet. Ebenso stellt die Gleichung

$$R = c^2$$

eine Kurve dar, wo die Geschwindigkeit des Punktes m den Werth c hat. Es ist einleuchtend, dass diese Kurven in Bezug auf die Verbindungslinie der beiden Anfangspunkte des bipolaren Koordinatsystemes symmetrisch sind. Durch die Kurve (3) wird nun die Ebene in Theile zerlegt und im allgemeinen in solcher Weise, dass die Function R ihr Zeichen ändert, wenn der Punkt (r, ρ) die Kurve überschreitet. Der Zeichenwechsel trifft immer zu, sobald die Kurve (3) nicht eine s. g. Minimikurve ist, welche dadurch charakterisirt wird, dass die Gleichungen

$$\frac{\partial R}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial \rho} = 0$$

gleichzeitig mit (3) bestehen. Abgesehen von solchen Ausnahmefällen nimmt also die Function R in einigen von den Theilen, in welche die Ebene durch (3) zerfällt, positive, in Anderen sicher negative Werthe an. Negative Werthe kann aber die Function R nach (1) niemals annehmen, insofern die r und ρ die Koordinaten des beweglichen Punktes P bezeichnen. Der letztere muss sich also immer in einem positiven Gebiete der Ebene befinden und seine Bewegung wird in solcher Weise durch die Kurve (3) begrenzt. Ist diese Kurve eine geschlossene, so bleibt die Bewegung im gewöhnlichen Sinne stabil. Nun ist es ja mit dem Angeführten keineswegs gesagt, dass der Punkt P diese Grenze je erreichen soll. Wenn er sie aber erreicht, so wird seine Bewegungskurve in dem bezüglichen Punkte im allgemeinen eine Spitze beschreiben, indem die Geschwindigkeit auf dieser Kurve (3) gleich Null ist. Die Existenz und die

Natur der Grenzkurve hängen von der Form der Function $F(r, \rho)$ und von dem Werthe der Integrationskonstante h ab. Die letztere ihrerseits wird durch die Anfangslage und den numerischen Werth (nicht die Richtung) der Anfangsgeschwindigkeit folgendermassen

$$h = F(r_0, \rho_0) - \left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2$$

bestimmt.

Als erstes Beispiel für diese Betrachtungen wählen wir das Zweikörperproblem. Die Gleichung der lebendigen Kraft hat hier die Form

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = 0,$$

wo $\frac{\mu}{a}$ statt h steht. Die Gleiehung (3) wird in diesem Falle von der einfachsten Gestalt; man erhält in der That

$$r = 2a.$$

Wenn a positif ist, so bezeichnet diess einen Kreis, um den einen der materiellen Punkte als Mittelpunkt beschrieben und mit dem Radius $2a$. Nach dem Vorhergehenden, sehen wir sofort ein, dass die Bewegung des zweiten Punktes stets innerhalb dieses Kreises stattfinden muss. Dies ist auch, was von der vollständigen Lösung der Aufgabe bestätigt wird, da ja in der That alle Ellipsen mit der halben grossen Axe a innerhalb des Kreises

$$r = 2a$$

fallen müssen. Wenn die Excentricität der Ellipse gleich Eins wird, so geht diese in eine gerade Linie von der Länge $2a$ über — eine Kurve, welche in der That an dem Kreise eine Spitze macht. Wenn a unendlich oder negativ wird, so existirt die Grenzkurve nicht mehr. In diesen Fällen ist ja auch die Bahn entweder eine Parabel oder eine Hyperbel. Den verschiedenen Annahmen über a entsprechen die bekannten Anfangsbedingungen

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2 \lesseqgtr \frac{2\mu}{r_0}.$$

Gehen wir jetzt zu dem Probleme von der Bewegung eines Punktes,

welcher von zwei festen Centra angezogen wird, über, so erhalten wir aus dem Princip der lebendigen Kraft für diesen Fall, oder

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\rho} - h,$$

die folgende Form der Gleichung (3)

$$\frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\rho} = h,$$

wo r und ρ die beiden Abstände des beweglichen Punktes von den festen Anziehungscentra m und μ bedeuten. Wenn die Integrationskonstante h einen positiven Werth hat, so bezeichnet diese Gleichung eine Kurve von der allgemeinen Natur einer Lemniskate. Ihre Form ist von den Konstanten der Gleichung abhängig; je nachdem h einen hinlänglich grossen oder hinlänglich kleinen Werth besitzt, besteht die Begrenzung der Bewegung entweder aus zwei geschlossenen und ausserhalb einander fallenden Konturen, welche jeden der Punkte m und μ umgeben, oder aus einer einzigen geschlossenen Linie, welche beide diese Punkte umfasst. Diese beiden Formen gehen in einem Grenzfalle in einander über, nämlich wenn die beiden m und μ resp. umschliessenden Gebiete, in einem Punkte der Verbindungslinie dieser beiden Centra, zusammenhängen. Innerhalb eines auf solche Weise abgegrenzten Raumes muss nun der bewegliche Punkt bleiben; die Stabilität seiner Bewegung ist also durch einen positiven Werth von h gesichert.[1] Da die fragliche mechanische Aufgabe vollständig gelöst worden ist, so kann man sich *a posteriori* von der Richtigkeit unserer Schlüsse überzeugen. Wir kommen aber nun zu Fällen, wo diese Kontrolle nicht möglich ist, indem die vollständige Integration der bezüglichen Differentialgleichungen bis jetzt nicht geleistet worden ist.

Wir stellen uns vor, dass ein materieller Punkt μ, mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit n, einen Kreis von dem Radius a um einen zweiten, festen Punkt m beschreibt. Die beiden Punkte attrahiren einen dritten

[1] Mit einem Verfahren, welches JACOBI in seiner vierten Vorlesung »Über Dynamik» auf das n-Körperproblem angewandt hat, zeigt man leicht dass die Bewegung nothwendig instabil ist, wenn h einen negativen Werth hat.

Punkt P, von welchem aber vorausgesetzt wird, dass er auf die Vorigen keine Einwirkung ausübt. Man sucht die Bedingungen dafür, dass die Bewegung des letzteren in Bezug auf die beiden anziehenden Punkte stabil sein soll. Es ist überflüssig zu bemerken, dass die Bewegungen des so fingirten Systemes denjenigen eines eigentlichen Dreikörperproblemes nicht gleich werden können, da es, abgesehen von einem bekannten Specialfalle dieses Problemes, augenscheinlich unmöglich ist, dass Einer von drei einander anziehenden Körpern einen Kreis um einen Anderen beschreibt. Das angenommene System entspricht aber in der That *sehr nahe* einigen Kombinationen im Sonnensysteme, z. B. den beiden Körpern, Jupiter und Sonne, in ihrer gleichzeitigen Anziehung an einen dritten Körper, dessen Masse, wie diejenigen der Kometen oder der kleinen Planeten, zu vernachlässigen ist. Ausserdem scheint der gestellten Aufgabe durch den Umstand einiges Interesse verliehen zu werden, dass die vollständige Bestimmung der Bewegung auf Schwierigkeiten stösst, welche denjenigen des Dreikörperproblems nahe verwandt sind.

Bezeichnet man mit ξ, η die Koordinaten des Punktes P in Bezug auf ein festes Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte in m, mit r und ρ die Abstände des Punktes P von m und μ resp. und mit

$$x' = a\cos(nt + A), \qquad y' = a\sin(nt + A)$$

die Koordinaten von μ, so bekommen die Bewegungsgleichungen von P die folgende Gestalt

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{m\xi}{r^3} + \frac{\mu(\xi - x')}{\rho^3} = 0$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{m\eta}{r^3} + \frac{\mu(\eta - y')}{\rho^3} = 0.$$

Beziehen wir nun durch die Substitutionen

$$\xi = x\cos(nt + A) - y\sin(nt + A)$$

$$\eta = x\sin(nt + A) + y\cos(nt + A)$$

die Lage von P auf ein bewegliches Koordinatensystem, dessen x-Axe

mit der Richtung von m nach μ zusammenfällt, so erhalten wir für die relative Bewegung die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - n^2x + \frac{mx}{r^3} + \frac{\mu(x-a)}{\rho^3} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} - n^2y + \frac{my}{r^3} + \frac{\mu y}{\rho^3} = 0,$$

woraus, der Gleichung der lebendigen Kraft entsprechend, folgendes Integral

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - n^2r^2 - \frac{2m}{r} - \frac{2\mu}{\rho} + h = 0 \tag{4}$$

fliesst. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch durch Anwendung der obigen Substitution auf eine von JACOBI gegebene Formel.[1] Die Gleichung (3) bekommt also in unserem Falle die Form

$$n^2r^2 + \frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\rho} = h. \tag{5}$$

Wenn hierdurch eine Grenzkurve repräsentirt werden soll, ist zunächst erforderlich, dass die Integrationskonstante h einen positiven Wert hat. Hierzu ist aber nach (4) nur nöthig dass entweder die Anfangsgeschwindigkeit nicht zu gross ist oder dass die Anfangswerthe der Abstände r, ρ hinlänglich klein sind. Um die weiteren Bedingungen für die Realität der Kurve zu untersuchen, können wir am besten r und ρ zunächst als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes ansehen. Es ist dabei nur zu bemerken, dass der Umstand, dass die gegenseitigen Abstände ein Dreieck bilden, durch die Ungleichheiten

$$a + r > \rho$$
$$r + \rho > a$$
$$\rho + a > r$$

vertreten werden muss, so wie dass r und ρ nur positive Werthe annehmen können. Es folgt hieraus, dass von allen Punkten der Ebene $r\rho$

[1] *Über Dynamik*, fünfte Vorlesung, Gl. (11).

nur diejenigen in Frage kommen können, welche innerhalb eines durch die Geraden

$$
(6) \qquad \begin{aligned} a + r &= \rho \\ r + \rho &= a \\ \rho + a &= r \end{aligned}
$$

begrenzten Bandes fallen. Hierzu kommt die Gleichung (5), welche wir zunächst unter der Annahme

$$m = 0$$

ins Auge fassen wollen. Führen wir die Bezeichnungen

$$x^2 = \frac{2\mu}{n^2}; \qquad \alpha^2 = \frac{h}{n^2}$$

ein, so folgt also aus (5)

$$
(7) \qquad \begin{aligned} \rho &= -\frac{x^2}{r^2 - \alpha^2} \\ \frac{dr}{d\rho} &= \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{(r^2 - \alpha^2)^2}{r}. \end{aligned}
$$

Mit Hülfe dieser Formeln ist es leicht zu sehen, dass die Kurve, welche übrigens in Bezug auf die ρ-Axe symmetrisch sein muss, einen positiven Zweig hat, welcher die Asymptote

$$r = \alpha$$

besitzt und die ρ-Axe in dem Abstande $\frac{x^2}{\alpha^2}$ von dem Origo senkrecht schneidet. Wegen der Gleichung (4) werden nun von der Ebene $r\rho$ alle Punkte ausgeschlossen, welche auf die konkave Seite der Kurve (5) fallen. Je nach den Werthen von a, α und x wird die letztere die Geraden (6) entweder gar nicht treffen oder eine oder mehrere derselben schneiden. — Stellt man sich in dieser Weise die Gleichungen (6) und (7) geometrisch vor und führt man dann das Bild in bipolare Koordinaten über, so erhellt sofort, dass die Bewegung von P entweder in der ganzen Ebene stattfinden kann oder in irgend einer Weise beschränkt ist. Es giebt im letzteren Falle verschiedene Möglichkeiten. Wenn α

oder, was dasselbe ist, h hinreichend gross ist, zerfällt der für die Bewegung abgegrenzte Raum in zwei Gebiete, von welchen das eine, B, sicher den Punkt μ, möglicherweise auch m umschliesst, während das andere, C, sich von dem Unendlichen aus bis zu einer geschlossenen Grenze streckt, welche ausserhalb des Gebietes B fällt. Die beiden Gebiete können für kleinere Werthe von h durch einen Kanal zusammenfliessen, welcher sich um die Verlängerung der Linie von m nach μ eröffnet. Bei abnehmendem h erweitert sich diese Öffnung mehr und mehr und das ausgeschlossene Gebiet der Ebene drängt sich mehr und mehr zusammen, bis von demselben zuletzt nur ein Punkt zurückbleibt. Von da an ist die Bewegung von P ganz unbeschränkt.

Gehen wir nun zu dem allgemeinen Falle, wo m von Null verschieden ist, über, so erhält man aus (5), indem noch folgende Bezeichnung

$$k^2 = \frac{2m}{n^2}$$

angewandt wird, zur Diskussion der Kurve die Gleichungen

$$\rho = -\varkappa^3 \frac{r}{r^3 - a^2 r + k^2}$$

und

$$\frac{dr}{d\rho} = \frac{1}{\varkappa^3} \cdot \frac{(r^3 - a^2 r + k^2)^2}{2r^3 - k^2}.$$

Ein positiver Theil der Kurve existirt nun immer, sobald

$$\left(\frac{a}{k}\right)^6 > \frac{27}{4},$$

und ist zwischen zwei mit der ρ-Axe parallelen Asymptoten eingeschlossen. Nach dem Vorgange der oben angeführten Betrachtung ist es auch in diesem allgemeinen Falle leicht zu sehen, wie sich die Grenzkurve in der Bewegungsebene gestaltet. Für gewisse Werthe der Konstanten zerfällt das Gebiet der Bewegung in drei Theile, von denen zwei, A und B, die Massenpunkte m und μ resp. umschliessen und gegenseitig ausserhalb einander fallen, während das dritte, C, sich, wie im vorigen Falle, von einer rings um A und B geschlossenen Linie nach dem Unendlichen hin erstreckt. Je nach den Umständen können A mit B und B mit dem äusseren Gebiete C zusammenfliessen.

Als Resultat dieser an anderer Stelle[1] näher ausgeführten Diskussion können wir also behaupten, dass solche Werthe der Integrationskonstante h wirklich beigelegt werden können, dass eine stabile Bewegung des Punktes P sowohl in der Nähe von m als in der Umgebung von μ möglich wird. Dies ist auch, was unserer apriorischen Vorstellung von der Sache entspricht, eine Vorstellung welche ohne Zweifel in unseren Erfahrungen auf dem Gebiete der celesten Bewegungen wurzelt.

Die Möglichkeit der vorhergehenden Schlüsse war davon abhängig, dass die Gleichung (3) in jedem Falle nur die Koordinaten eines einzigen Punktes enthielt. Derselbe Umstand ermöglicht nun in der That im folgenden Specialfalle des Dreikörperproblems eine ähnliche Grenzbestimmung. Wir stellen uns ein festes Koordinatensystem vor und nehmen an, dass die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes μ in einem gewissen Augenblicke längs der y-Axe gerichtet ist. Wir denken uns ferner zwei andere Punkte, jeder von der Masse m, deren Lagen und Geschwindigkeiten in demselben Augenblicke in Bezug auf die y-Axe symmetrisch sind. Es ist einleuchtend, dass diese Bedingungen, wenn sie in einem gewissen Momente gelten, auch in jedem beliebigen Augenblicke der Bewegung bestehen bleiben. In Folge dessen nimmt die Gleichung der lebendigen Kraft des Systemes die folgende Gestalt an

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\mu}{m}\left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} - \frac{m}{2x} + h = 0$$

wo man mit x, y die Koordinaten z. B. desjenigen, der beiden symmetrisch gelegenen Punkte, P, welcher rechts von der y-Axe ist, mit y_0 die Koordinate von μ und mit r den gegenseitigen Abstand von P und μ bezeichnet hat. Die Gleichung der Grenzkurve für den Punkt P wird also

$$\frac{2\mu}{r} + \frac{m}{2x} - h = 0$$

oder, wenn man

$$x = r\cos v$$

setzt und die Bezeichnungen

$$\frac{2\mu}{h} = a, \qquad \frac{m}{4\mu} = e$$

[1] Bihang till Kongl. Svenska Vetenskapsakademiens handlingar, B. 13, N° 1.

einführt,

$$r = a\left[1 + \frac{e}{\cos v}\right].$$

Diess ist die Gleichung einer Konchoide, welche auf ein mit dem Punkte μ bewegliches Koordinatensystem bezogen ist. Wenn $e > 1$ ist, so existirt nur der offene Zweig, welcher rechts von der y-Axe liegt. Hat man $e < 1$, so giebt es auch links von der y-Axe ein geschlossener Zweig mit einer Spitze im Origo. Wir brauchen aber den letzteren nicht zu betrachten; denn bevor der Punkt P zu der linken Seite der y-Axe übergeht stösst er mit dem symmetrischen Punkte auf der y-Axe selbst zusammen und wir werden die Bewegung nicht länger als bis zu einem solchen Momente verfolgen. Wie es leicht zu sehen ist, findet also die Bewegung von P stets innerhalb desjenigen Gebietes der Ebene statt, welches einerseits von der y-Axe und anderseits von der Konchoide eingeschränkt ist. Der Punkt kann sich mithin zwar unendlich weit von μ entfernen aber nur in die Richtung der y-Axe. Man könnte diess so ausdrücken, dass die Bewegung in der Richtung der x-Axe stabil wäre.

Wenn die Anfangsbedingungen im Dreikörperprobleme ganz beliebig sind, hat man von der Gleichung

$$(8) \qquad m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + m''\left(\frac{ds''}{dt}\right)^2 - \frac{c}{r} - \frac{c'}{r'} - \frac{c''}{r''} + h = 0$$

auszugehen. In derselben sind $\frac{ds}{dt}, \frac{ds'}{dt}, \frac{ds''}{dt}$ die Geschwindigkeiten der drei Massen m, m', m''; r, r', r'' diejenigen Seiten des von denselben gebildeten Dreiecks, welche m, m', m'' resp. gegenüber stehen; schliesslich haben wir

$$c = 2m'm''$$

$$c' = 2m''m$$

$$c'' = 2mm'$$

gesetzt. Wir stellen jetzt die Gleichung

$$(9) \qquad \frac{c}{r} + \frac{c'}{r'} + \frac{c''}{r''} = h$$

auf, welche nach Einführung von der Bezeichnung

$$H' = h - \frac{c'}{r'} \tag{10}$$

auch so geschrieben werden kann

$$\frac{c}{r} + \frac{c''}{r''} = H'. \tag{9'}$$

Wenn H' positiv ist, bezeichnet diese Gleichung, wie im Falle von der Anziehung eines Punktes nach zwei festen Centra, eine lemniskatenähnliche Kurve, welche indessen jetzt einen veränderlichen Parameter enthält und auf die beweglichen Punkte m und m'' als Anfangspunkte der Koordinaten bezogen ist. Setzen wir voraus, dass r' immer zwischen zwei endlichen Grenzen liegt, kann man einen so grossen Werth von h wählen, dass H' stets positiv bleibt. Es existirt somit immer die Kurve (9') und der Gleichung (8) zufolge muss der Punkt m' stets innerhalb derselben bleiben. Die Voraussetzung, dass r' eine obere Grenze hat, kann man aber fallen lassen, indem, für grosse Werthe von r', H' das Zeichen von h erhält, d. h. positiv bleibt. Wenn indessen r' sehr viel anwächst, muss die Kurve (9') schliesslich diejenige ihrer Formen annehmen, welche in zwei um jeden der Punkte m und m'' geschlossenen Gebieten besteht. Wenn h positiv ist und wenn m und m'' sich unendlich weit von einander entfernen, so muss also schliesslich m' in der Nähe von dem einen dieser beiden Punkte bleiben. Ganz allgemein können wir also sagen dass, wenn

$$h > \frac{c'}{r'}$$

ist, so ist die Bewegung von m' entweder in Bezug auf m oder in Bezug auf m'' stabil. Für die Punkte m und m'' kann man nun ganz ähnliche Betrachtungen wie für m' machen. Durch Zusammenstellung derselben schliesst man dann unmittelbar, dass die drei Punkte stets in endlichen Abständen von einander liegen müssen, so lange oder sobald die Beziehungen

$$h > \frac{c}{r}, \qquad h > \frac{c'}{r'}, \qquad h > \frac{c''}{r''} \tag{11}$$

gleichzeitig bestehen. — Diese Betrachtungen können nun in verschiedenen

Weisen variirt werden. An der Stelle der Bedingungen (11) könnte man z. B. auch die folgenden

$$h > \frac{c}{r} - m'\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 - m''\left(\frac{ds''}{dt}\right)^2$$

$$h > \frac{c'}{r'} - m''\left(\frac{ds''}{dt}\right)^2 - m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$h > \frac{c''}{r''} - m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - m'\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$$

treten lassen.

Wenn die gegenseitigen Lagen der drei Punkte so beschaffen sind, dass die Gleichung (9) stattfindet, so ist nach (8) die Geschwindigkeit eines jeden derselben gleich Null. In einem solchen Augenblicke machen ihre Bewegungskurven Spitzen; es ist ja in der That einleuchtend, dass jeder Punkt von diesem Augenblicke an in demselben Weg zurückkehren wird, welchen er vorher, bis zu dem fraglichen Zeitmomente, gefolgt hat. Das Integral der Flächen giebt uns leicht eine Bedingung für die Möglichkeit dieser Art von Bewegung. Wenn die Geschwindigkeiten aller drei Punkte gleichzeitig Null werden, so kann nämlich dem fraglichen Integrale oder der Gleichung

$$mR^2\frac{dv}{dt} + m'R'^2\frac{dv'}{dt} + m''R''^2\frac{dv''}{dt} = k$$

nur in dem Falle Genüge geleistet werden, wenn die Konstante der Flächen, k, selbst gleich Null ist. Diess ist nun eine Bedingung, welche in dem oben angeführten Specialfalle des Dreikörperproblems stattfindet, die aber z. B. im Sonnensysteme, wo alle Bewegungen in derselben Richtung vor sich gehen, nicht erfüllt ist.

Wir haben bei den angeführten Beispielen alle Bewegungen als in der Ebene stattfindend angenommen. Es ist aber leicht einzusehen, dass diess eine unwesentliche Beschränkung war und dass die Schlüsse ebenso leicht in drei Dimensionen gemacht werden können. Die aufgestellten Grenzkurven werden dann durch solche Grenzflächen ersetzt, die durch die Drehung der vorigen um ihre resp. Symmetrieaxen entstehen. Dass die Schlüsse ebenso leicht für andere Attraktionsgesetze als das Newton'sche gemacht werden können, ist auch ohne weiteres klar.

Bevor wir diese Mittheilung abschliessen, wollen wir noch ein Paar Worte über die Anwendung der angeführten Betrachtungsweise bei einer speciellen Aufgabe der Störungstheorie zufügen, nämlich bei der Untersuchung über die Existenz der s. g. Libration in der Länge eines Planeten. Bekanntlich wird die gestörte mittlere Länge, ζ, eines Planeten durch Annäherungen bestimmt, deren Grundlage folgende Gleichung

$$(12) \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\sum \alpha_{i,i'} \sin(i\zeta - i'\zeta' + A_{i,i'})$$

bildet. Hier bedeutet ζ' die mittlere Länge des störenden Planeten; die $A_{i,i'}$ wie die $\alpha_{i,i'}$ sind von den Elementen abhängige Grössen, von welchen die letzteren mit der störenden Masse multiplicirt sind; i und i' nehmen die Werthe aller ganzen positiven und negativen Zahlen an. Setzt man die störende Masse gleich Null, so erhält man

$$\zeta = nt + c$$

wo n und c die elliptischen Integrationskonstanten bezeichnen, n die »mittlere Bewegung» und c die »mittlere Epochenlänge». Ebenso erfolgt für den störenden Planeten

$$\zeta' = n't + c'.$$

Diese beiden Ausdrücke werden nun als Anfangswerthe benutzt, welche man in der rechten Seite von (12) einsetzt. Man erhält so

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\sum \alpha_{i,i'} \sin(int - i'n't + ic - i'c' + A_{i,i'})$$

woraus man durch directe Integration als erste Annäherung

$$(13) \qquad \zeta = nt + c + \sum \frac{\alpha_{i,i'}}{(in - i'n')^2} \sin(int - i'n't + ic - i'c' + A_{i,i'}),$$

bekommt. Die zweite Annäherung erfolgt durch Einsetzung von eben diesem Ausdrucke und dem entsprechenden für ζ' in (12), u. s. w. Bei der ersten Annäherung sind die $\alpha_{i,i'}$ und $A_{i,i'}$ als Konstanten zu betrachten. Wir werden sie auch hier, wo es sich nur um ein typisches Beispiel han-

delt, als solche ansehen. Im allgemeinen sind sie doch veränderlich und zwar müssen aus dieser Ursache in einer beliebigen Annäherung statt der $A_{i,i'}$ Ausdrücke von der Form $\sigma_{i,i'}t + A_{i,i'}$ in den Argumenten von (12) auftreten, wo die $\sigma_{i,i'}$ kleine von den Bewegungen der Apsiden und Knoten abhängige Koefficienten sind. In einer neuen Abhandlung[1] über eben diese Fragen hat Herr GYLDÉN auf diese Verallgemeinerung Rücksicht genommen.

Es kann nun aber bekanntlich die angeführte Folge der Annäherungen divergent werden. Die Ursache hievon ist der Umstand, dass die n und n' zwei ganzen Zahlen i_0' und i_0 so nahe proportional sind, dass die entsprechenden Koefficienten in (13)

$$\frac{\alpha_{i_0, i_0'}}{(i_0 n - i_0' n')^2}$$

sehr grosse Werthe annehmen. Wie diese Wirkung der kleinen Divisoren $(i_0 n - i_0' n')$ durch Vorhandensein der s. g. *Libration* kompensirt werden kann, hat Herr GYLDÉN vor längerer Zeit gezeigt und in der citirten Abhandlung näher auseinandergesetzt.

Die typische Form der bezüglichen Annäherungsmetode könnte in folgender Weise dargestellt werden.

Man geht von der nachstehenden Gleichung

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\sum \alpha_{i,i'} \sin(i\zeta - i'n't + A_{i,i'})$$

aus. Vorausgesetzt, dass

$$\zeta = nt + c + P$$

ist, wo P nur periodische Glieder enthält, so geht dieselbe in die folgende

$$\frac{d^2P}{dt^2} = -\sum \alpha_{i,i'} \sin(int - i'n't + ic + iP + A_{i,i'})$$

über. Führt man hier statt P eine Grösse V ein, welche durch folgende Gleichung definirt ist

$$(14) \qquad 2V = i_0nt - i_0'n't + i_0c + i_0P + A_{i_0,i_0'},$$

[1] *Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden.* Acta mathematica 9, p. 185—294.

wo i_0 und i'_0 einem kritischen Gliede entsprechen, so erhält man zur Bestimmung von V die Gleichung

$$(14') \qquad 2\frac{d^2V}{dt^2} = -\Sigma i_0 \alpha_{i,i'} \sin(int - i'n't + ic + iP + A_{i,i'}).$$

Vernachlässigt man hier alle Glieder ausser demjenigen, welches den ganzen Zahlen i_0 und i'_0 entspricht, so erhält man, wenn noch

$$\alpha^2 = i_0 \alpha_{i_0, i'_0}$$

gesetzt wird, die folgende Gleichung

$$(15) \qquad \frac{d^2V}{dt^2} = -\alpha^2 \sin V \cos V,$$

woraus nach einmaliger Integration

$$(16) \qquad \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \sin^2 V$$

kommt. Es bedeutet hier γ^2 die Integrationskonstante. Diese Gleichung bestimmt V als eine elliptische Function von t mit dem Modul

$$k = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Je nach dem Werthe von k, mithin von der Integrationskonstante γ, ist nun die Entwicklung von V verschieden. Wenn

$$k < 1$$

ist, so enthält die Entwicklung von V, wie in (14) vorausgesetzt ist, wirklich ein sekulares Glied, dessen von k abhängiger Koefficient dem Werthe von $i_0 n - i'_0 n'$ gleich sein muss. Von den Grössen γ und n kann man also in diesem Falle nach Belieben die eine oder die andere als die unabhängige Konstante ansehen. Im Falle dagegen, wo

$$k > 1$$

ist, kann die Entwicklung von V nur periodische Glieder enthalten. Nach (14) muss also die Gleichung

$$(17) \qquad i_0 n - i'_0 n' = 0$$

genau erfüllt sein. Das hierdurch ausgesagte Verhältniss ist es, was man Libration nennt. Die mittlere Bewegung n bleibt also in diesem Falle nicht willkürlich, sondern muss so bestimmt werden, dass zwischen n und n' eine vollständige Kommensurabilität herrscht. Die willkürliche Konstante tritt stattdem in dem Koefficienten eines periodischen Gliedes auf.

Diese Schlüsse, welche durch Anwendung bekannter Reihenentwicklungen der elliptischen Functionen gefolgert werden, lassen sich nun auch, durch Anwendung unserer mehrerwähnten Betrachtung auf die Gleichung (16), ohne weiteres machen. Bei diesem Verfahren ist man auch keineswegs auf die beiden Glieder an der rechten Seite von (16) beschränkt, sondern man kann aus (14′) auf einmal alle Glieder mitnehmen, welche nur von V abhängen. Auf solche Weise tritt an die Stelle von (16) eine Gleichung

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = F(V) \tag{18}$$

wo $F(V)$ ausser der Integrationskonstante ein Aggregat von periodischen Gliedern enthält.

Es sei nun $F(V)$ eine beliebige Function, welche so beschaffen ist, dass die Gleichung

$$F(V) = 0 \tag{19}$$

zwei reelle Wurzeln, V_0 und V_1 besitzt. Es wird ferner angenommen, dass zwischen diesen Wurzeln keine dritte Wurzel liegt und dass $F(V)$ eine positive Grösse ist für Werthe von V zwischen V_0 und V_1. Wenn die Anfangsbedingungen so beschaffen sind, dass, für $t = 0$, V zwischen V_0 und V_1 liegt, so folgt aus den Voraussetzungen, dass V für immer zwischen diesen Grenzen in einem Zustande von Libration bleiben muss, wenigstens insofern die Gleichungen

$$F'(V_0) = 0, \qquad F'(V_1) = 0$$

nicht gleichzeitig mit

$$F(V_0) = 0, \qquad F(V_1) = 0$$

bestehen. Denn für Werthe von V, welche unmittelbar ausserhalb den

Grenzen V_0 und V_1 liegen, würde die Function $F(V)$ negative Werthe annehmen, was nach (18) nicht zulässig ist. — Wenn dagegen die Gleichung (19) keine reellen Wurzeln hat, so muss ja in der That V mit t entweder beständig wachsen oder beständig abnehmen. — In dem Falle, dass $F(V)$ gleich einer periodischen Function

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cos V + \dots$$
$$+ \beta_1 \sin V + \dots$$

wäre, ist es hinreichend die Wurzeln, welche zwischen 0 und 2π fallen, zu untersuchen. Aus der Periodicität der Function $F(V)$ folgt ausserdem dass, wenn V_0 eine zwischen 0 und 2π liegende Wurzel der Gleichung

$$F(V) = 0$$

ist, zwischen diesen Grenzen wenigstens noch *eine* Wurzel V_1 liegen muss, vorausgesetzt dass

$$F'(V_0) \gtrless 0$$

ist.

Mit Anwendung von einem durch Herrn Weierstrass gegebenen Verfahren,[1] ist es leicht zu zeigen, dass für den Fall, wo die Gleichung (19) zwei Wurzeln V_0 und V_1 hat, V als eine periodische Function von t darstellbar ist.

Angenommen, dass V_0 und V_1 zwei auf einander folgende reelle Wurzeln der Gleichung

$$F(V) = 0 ,$$

sind, dass aber $F'(V)$ für diese Werthe nicht verschwindet, so folgt, dass

$$F(V) = (V - V_0)(V_1 - V) F_1(V)$$

ist, wo $F_1(V)$ weder für die Werthe V_0, V_1 noch für die dazwischenliegenden Werthe von V Null werden kann. Da nun, wenn der Anfangs-

[1] Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Februar 1866.

werth von V zwischen V_0 und V_1 liegt, nach dem Angeführten folgt, dass folgende Relationen immer bestehen müssen

$$V_0 \leq V \leq V_1,$$

so ist man berechtigt, statt V eine neue Veränderliche v, durch die folgende Gleichung einzuführen:

$$V = \alpha + \beta \cos v,$$

wo

$$\alpha = \frac{V_0 + V_1}{2}, \qquad \beta = \frac{V_0 - V_1}{2}.$$

Man erhält nun

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \beta^2 \sin^2 v \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

und anderseits

$$(V - V_0)(V_1 - V) = \beta^2 \sin^2 v,$$

so dass aus (18)

$$(20) \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = F_1(\alpha + \beta \cos v)$$

folgt. Da die rechte Seite für alle Werthe von v sicher nie Null wird, so muss, dieser Gleichung gemäss, v mit t entweder beständig wachsen oder beständig abnehmen, und zwar so, dass wenn t von $-\infty$ bis $+\infty$ übergeht, v zwischen denselben Grenzen läuft. Es ist also sowohl v eine eindeutige Function $\mathfrak{v}(t)$ von t, als umgekehrt t eine eindeutige Function $\mathfrak{t}(v)$ von v.

Es ist nun

$$\frac{d\mathfrak{t}(v)}{dv} = \frac{1}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}} = \frac{d\mathfrak{t}(v + 2\pi)}{dv},$$

$$(21) \qquad \mathfrak{t}(v) = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}},$$

folglich

$$(22) \qquad \mathfrak{t}(v + 2\pi) = \mathfrak{t}(v) + 2\omega$$

indem 2ω eine gewisse Konstante bezeichnet. Hieraus erhält man

$$\mathsf{v}(t + 2\omega) = \mathsf{v}(t) + 2\pi$$

und also

$$\cos[\mathsf{v}(t + 2\omega)] = \cos\mathsf{v}(t).$$

Man sieht also, dass $\cos v$, und somit auch V, eine periodische Function von t ist mit der Periode 2ω. Um die letztere zu bestimmen setzen wir in (22)

$$v = -\pi.$$

Dann erhält man

$$\mathsf{t}(\pi) = \mathsf{t}(-\pi) + 2\omega$$

und bedenkt man jetzt, dass nach (21)

$$\mathsf{t}(-\pi) = -\mathsf{t}(\pi),$$

so folgt

$$\omega = \mathsf{t}(\pi) = \int\limits_0^\pi \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta\cos v)}} = \int\limits_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{\sqrt{F(V)}}.$$

Als eine überall endliche periodische Function von t, welche ausserdem gerade ist, kann $\cos v$ in folgender Weise entwickelt werden

$$\cos v = A_0 + A_1\cos u + A_2\cos 2u + \dots,$$

wo

$$u = \frac{\pi}{\omega}t$$

ist. Zur Bestimmung der Koefficienten haben wir Gleichungen von der Form

$$\pi A_n = \int\limits_0^\pi \cos v \cos nu\, du \tag{23}$$

oder, da

$$du = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta\cos v)}}$$

ist

$$\omega A_n = \int_0^\pi \cos v \,.\, \cos\left[\frac{n\pi}{\omega} \cdot \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta\cos v)}}\right] \cdot \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta\cos v)}}.$$

Statt dieser Formel, kann man auch die aus (23) durch particlle Integration abzuleitende

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \cdot \int_0^\pi \sin\left[n\frac{\pi}{\omega}\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta\cos v)}}\right] \sin v\, dv$$

benutzen. Das Integral

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta\cos v)}}$$

kann man sich in folgender Weise bestimmt denken. Da die Function

$$\frac{1}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta\cos v)}}$$

eine überall endliche, gerade, und periodische Function ist, so lässt sich dieselbe folgendermassen entwickeln

$$\frac{1}{F_1(\alpha + \beta\cos v)} = \alpha_0 + \alpha_1\cos v + \alpha_2\cos 2v + \ldots,$$

und die Koefficienten sind durch die Formel

$$\pi\alpha_n = \int_0^\pi \frac{\cos n v}{F_1(\alpha + \beta\cos v)}\, dv$$

bestimmt.

Dieselben kann man also immer, wenigstens durch mechanische Quadratur, berechnen. Hiernach ergiebt sich

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(a + \beta \cos v)}} = \alpha_0 v + \alpha_1 \sin v + \frac{\alpha_2}{2} \sin 2v + \ldots .$$

Die Koefficienten A_n lassen sich sodann bestimmen entweder durch mechanische Quadratur oder auch analytisch mittels Entwicklungen nach Cylinderfunctionen.

ZUR THEORIE DER KRUMMEN OBERFLÄCHEN

VON

R. LIPSCHITZ

in BONN.

Vor einiger Zeit wurde ich veranlasst, mich mit der Frage nach denjenigen Oberflächen zu beschäftigen, bei welchen die Differenz der Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte denselben Werth hat. Die Methode zur Behandlung derartiger Aufgaben, welche von mir in den *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften* (Sitzungsberichte der Berliner Akademie v. 14. December 1882 und 8. Februar 1883) entwickelt ist, giebt für die erwähnte Forderung eine angemessene Formulirung, und erlaubt, alle Oberflächen aufzusuchen, welche dieser Forderung und ausserdem noch einer gewissen Beschränkung genügen. Die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer solchen Oberfläche lassen sich mit Hülfe von elliptischen Integralen als Functionen von zwei unabhängigen Elementen darstellen. Nachdem Herr Hermite die Güte gehabt hat, die Ausdrücke in den Comptes rendus der Pariser Akademie v. 14. Februar 1887, S. 418,[1] mitzutheilen, erlaube ich mir, die Ableitung hier folgen zu lassen.

Wie in der angeführten Abhandlung denkt man sich in jedem Punkte der zu betrachtenden nicht abwickelbaren Oberfläche die Normale construirt, und werden die rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ des zu der Normale gehörenden Punktes einer Gauss'schen Kugel vermöge der Gleichungen

$$\xi = \cos\vartheta, \qquad \eta = \sin\vartheta\cos\varphi, \qquad \zeta = \sin\vartheta\sin\varphi$$

[1] Vgl. Comptes rendus v. 21 Februar 1887, S. 534.

durch die unabhängigen Polarcoordinaten ϑ und φ ausgedrückt; es erstreckt sich ϑ von 0 bis π, φ von 0 bis 2π. Für einen Punkt der Oberfläche, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, bezeichnen ρ_1 und ρ_2 die Hauptkrümmungsradien, und wird die Lage der Hauptkrümmungsrichtungen durch den Stellungswinkel σ bestimmt. Zieht man durch den Punkt (x, y, z) eine Parallele zu der x-Axe, und projicirt jene auf die Tangentialebene, so bedeutet σ den Winkel, welchen die betreffende Projection mit der zu ρ_1 gehörenden Hauptkrümmungsrichtung bildet. Alsdann werden ρ_1, ρ_2, σ als Functionen der Variabeln ϑ und φ aufgefasst, und die a. a. O. in III mit (26) bezeichnete Gleichung

$$(1)\qquad \frac{\partial[\rho_1+\rho_2+(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}]}{\partial\varphi}+i\cos\vartheta[\rho_1+\rho_2+(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}]$$
$$=i\frac{\partial[\rho_1+\rho_2-(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}]}{\partial\vartheta},$$

in welcher $i=\sqrt{-1}$ ist, enthält die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine Oberfläche existirt, zu welcher die Functionen ρ_1, ρ_2, σ gehören. Die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes der Oberfläche ergeben sich hierauf durch die Integration der a. a. O. in III, (27) aufgestellten Differentiale dx, dy, dz, bei welchen die Bedingungen der Integrabilität in Folge der befriedigten partiellen Differentialgleichung erfüllt sind. Die Ausdrücke von dx, dy, dz lassen sich nach I, (32) der Abhandlung *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements* (Sitzungsberichte der Berliner Akademie v. 10. Mai 1883) beziehungsweise als die reellen Theile der folgenden Verbindungen darstellen,

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&-\sin\vartheta\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}(d\vartheta+i\sin\vartheta d\varphi)+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}(d\vartheta-i\sin\vartheta d\varphi)\right),\\
&(\cos\vartheta\cos\varphi+i\sin\varphi)\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}(d\vartheta+i\sin\vartheta d\varphi)+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}(d\vartheta-i\sin\vartheta d\varphi)\right),\\
&(\cos\vartheta\sin\varphi-i\cos\varphi)\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}(d\vartheta+i\sin\vartheta d\varphi)+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}(d\vartheta-i\sin\vartheta d\varphi)\right).
\end{aligned}\right.$$

Um in der Gleichung (1) die Bestandtheile von einander zu trennen, in welchen die Summe, und diejenigen, in welchen die Differenz der

Hauptkrümmungsradien vorkommt, kann man dieselbe, nachdem sie mit $\sin\vartheta$ multiplicirt ist, in die folgende Gestalt bringen

$$(3)\quad \frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\varphi}\sin\vartheta - i\frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta}\sin^2\vartheta + \frac{\partial[(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}\sin^2\vartheta]}{\sin\vartheta\,\partial\varphi} + i\frac{\partial[(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta} = 0.$$

Demnach liefert die Trennung des Reellen und Imaginären die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\varphi}\sin\vartheta &= -\frac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\cos 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\sin\vartheta\,\partial\varphi} - \frac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\sin 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta} \\ \frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta}\sin^2\vartheta &= \frac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\cos 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta} - \frac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\sin 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\sin\vartheta\,\partial\varphi}. \end{aligned}\right.$$

Da die nach ϑ und φ genommenen partiellen Differentialquotienten der Summe $(\rho_1+\rho_2)$ durch die partiellen Differentialquotienten der Verbindungen $(\rho_1-\rho_2)\cos 2\sigma$ und $(\rho_1-\rho_2)\sin 2\sigma$ ausgedrückt sind, so leuchtet ein, dass, wenn zu der Bestimmung einer Oberfläche nur die beiden letzteren als Functionen von ϑ und φ gegeben sind, die für die Existenz der Oberfläche nothwendige und hinreichende Bedingung in einer einzigen, nur reelle Grössen enthaltenden partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung besteht, welche feststellt, dass für das aus (4) abzuleitende Differential der Summe $(\rho_1+\rho_2)$ die Bedingung der Integrabilität erfüllt ist. Bei denjenigen Oberflächen, in welchen die Differenz $(\rho_1-\rho_2)$ constant ist, und die gegenwärtig ins Auge gefasst werden sollen, wird durch die so eben erwähnte partielle Differentialgleichung angegeben, in welcher Abhängigkeit der Stellungswinkel σ von den Variabeln ϑ und φ stehen muss, und sobald diese partielle Differentialgleichung erfüllt ist, erhält man zuerst $(\rho_1+\rho_2)$ und darauf x, y, z, die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Oberfläche, durch die Integration vollständiger Differentiale.

Ich suche jetzt die Oberflächen zu ermitteln, für welche die Differenz $(\rho_1-\rho_2)$ constant ist, ferner der Stellungswinkel σ nicht von der

Variable φ und nur von der Variable ϑ abhängt. Dann gehen die partiellen Differentialgleichungen (4) in die folgenden über

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\varphi} = -\dfrac{1}{\sin\vartheta}\,\dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\sin 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta} \\[2ex] \dfrac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta} = \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}\,\dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\cos 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta}, \end{cases}$$

und die Bedingung der Integrabilität für das Differential $d(\rho_1+\rho_2)$ besteht in der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung der zweiten Ordnung, welche die Abhängigkeit des Stellungswinkels σ von der Variable ϑ charakterisirt

$$(6)\qquad \frac{d\left(\dfrac{1}{\sin\vartheta}\,\dfrac{d[(\rho_1-\rho_2)\sin 2\sigma\sin^2\vartheta]}{d\vartheta}\right)}{d\vartheta} = 0.$$

Die Grösse $(\rho_1-\rho_2)$ bildet, da sie constant ist, einen fortzulassenden Factor. Mit Hülfe von zwei willkürlichen Constanten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}$ ergiebt sich sofort die vollständige Integration

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sin\vartheta}\,\dfrac{d(\sin 2\sigma\sin^2\vartheta)}{d\vartheta} = -\mathfrak{M}, \\[2ex] \sin 2\sigma\sin^2\vartheta = \mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta. \end{cases}$$

Hieraus folgt, indem

$$(8)\qquad \sin^4\vartheta - (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta)^2 = F(\cos\vartheta)$$

gesetzt wird

$$(9)\qquad \cos 2\sigma\sin^2\vartheta = \sqrt{F(\cos\vartheta)}.$$

Wegen der Gleichungen (5) erhält die Summe $(\rho_1+\rho_2)$ den Ausdruck

$$(10)\qquad \rho_1+\rho_2 = (\rho_1-\rho_2)\left(\int \frac{d(\cos 2\sigma\sin^2\vartheta)}{d\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi\right),$$

wo bei der auszuführenden Integration eine additive willkürliche Constante hinzukommt. Indem man über diese so wie über die schon eingeführten Constanten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}$ auf alle zulässigen Arten verfügt, wird die Gesammtheit der Oberflächen, welche den aufgestellten Forderungen entsprechen, erschöpft.

Das in (10) vorkommende Integral kann durch theilweise Integration so umgeformt werden

$$(11)\qquad \int \frac{d(\cos 2\sigma \sin^2\vartheta)}{d(\cos\vartheta)}\,\frac{d(\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta} = \cos 2\sigma + 2\int \cos 2\sigma \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta$$

$$= \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + 2\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta.$$

Vermöge dessen bekommen die Differentiale der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes der Oberfläche beziehungsweise die Ausdrücke

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}
dx &= \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\Bigg\{-\left(2\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \frac{2\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi\right)\sin\vartheta\, d\vartheta \\
&\qquad + (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta)\,d\varphi\Bigg\}, \\
dy &= \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\Bigg\{\Bigg[\left(2\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \frac{2\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi\right)\cos\vartheta\cos\varphi \\
&\qquad + \frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\sin\varphi\Bigg]d\vartheta + \Bigg[-\left(2\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \mathfrak{M}\varphi\right)\sin\varphi \\
&\qquad - \frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi\Bigg]\sin\vartheta\, d\varphi\Bigg\}, \\
dz &= \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\Bigg\{\Bigg[\left(2\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \frac{2\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi\right)\cos\vartheta\sin\varphi \\
&\qquad - \frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cos\varphi\Bigg]d\vartheta + \Bigg[\left(2\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \mathfrak{M}\varphi\right)\cos\varphi \\
&\qquad - \frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi\Bigg]\sin\vartheta\, d\varphi\Bigg\}.
\end{aligned}\right.$$

Durch die Integration wird ausser dem auf der rechten Seite von (11) erscheinenden elliptischen Integrale noch ein zweites eingeführt; der Kürze halber will ich dieselben so bezeichnen

$$(13)\qquad \int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta = P, \qquad \int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\,d\vartheta = Q.$$

Auf diese Weise entstehen für x, y, z die Darstellungen

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\left[(2P+\mathfrak{M}\varphi)\cos\vartheta - 2Q + \mathfrak{L}\varphi\right] \\ y &= \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\left((2P+\mathfrak{M}\varphi)\sin\vartheta\cos\varphi - \frac{\mathfrak{L}\cos\vartheta+\mathfrak{M}}{\sin\vartheta}\sin\varphi\right) \\ z &= \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\left((2P+\mathfrak{M}\varphi)\sin\vartheta\sin\varphi + \frac{\mathfrak{L}\cos\vartheta+\mathfrak{M}}{\sin\vartheta}\cos\varphi\right), \end{aligned}\right.$$

und ρ_1, ρ_2, σ sind durch die Gleichungen bestimmt

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sin 2\sigma\sin^2\vartheta = \mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta \\ &\cos 2\sigma\sin^2\vartheta = \sqrt{F(\cos\vartheta)} \\ &\quad \rho_1+\rho_2 = (\rho_1-\rho_2)\left(2P + \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi\right). \end{aligned}\right.$$

Die beiden mit P und Q bezeichneten Integrale unterscheiden sich insofern von einander, als für die besondern Werthe der Constanten $\mathfrak{L} = 0$, $\mathfrak{M} \gtrless 0$ und $\mathfrak{L} \gtrless 0$, $\mathfrak{M} = 0$ das erstere die Eigenschaft, ein elliptisches Integral zu sein, verliert, während das zweite dieselbe beibehält.

Bei der Voraussetzung, dass $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ gleichzeitig verschwinden, wird

$$F(\cos\vartheta) = \sin^4\vartheta,$$

mithin

$$P = \int\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta = \log\sin\vartheta + \mathfrak{A},$$

$$Q = \int\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} \qquad = \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta + \mathfrak{B},$$

und daher nehmen x, y, z die Gestalt an

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= (\rho_1-\rho_2)\left((\log\sin\vartheta+\mathfrak{A})\cos\vartheta - \log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} - \mathfrak{B}\right) \\ y &= (\rho_1-\rho_2)(\log\sin\vartheta+\mathfrak{A})\sin\vartheta\cos\varphi \\ z &= (\rho_1-\rho_2)(\log\sin\vartheta+\mathfrak{A})\sin\vartheta\sin\varphi. \end{aligned}\right.$$

Hier ist die betreffende Oberfläche eine Rotationsfläche.

Bonn d. 4. April 1887.

BEWEIS EINES SATZES AUS DER THEORIE DER SUBSTITUTIONEN

VON

R. LIPSCHITZ
in BONN.

In der Abhandlung *Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies* (Journal für Mathematik, Bd. 47, S. 312) hat Herr HERMITE den Satz ausgesprochen, dass, wenn eine Substitution dreier Variabeln nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution hervorbringt, die zu der Substitution gehörende mit einer unbestimmten Grösse s gebildete charakteristische Determinante nur für solche Werthe von s verschwinden kann, die gleich μ^{ten} Wurzeln der Einheit sind. Dieser Satz ist von Herrn CAMILLE JORDAN in dem *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique* (Journal für Mathematik, Bd. 84, S. 112) in der folgenden Weise auf Substitutionen von beliebig vielen Variabeln ausgedehnt worden. Jede Substitution von n Variabeln

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{array}\right.$$

welche nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution erzeugt, kann in die kanonische Gestalt

$$(2)\qquad t_1 = \omega_1 u_1, \qquad t_2 = \omega_2 u_2, \qquad \ldots, \qquad t_n = \omega_n u_n$$

gebracht werden, wo die sämmtlichen Constanten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ μ^{te} Wurzeln der Einheit sind, unter denen mehrere einander gleich oder auch alle von einander verschieden sein können. Den bei der Verwandlung von (1) in die kanonische Gestalt anzuwendenden Transformationen entsprechen solche Transformationen der zu (1) gehörenden bilinearen Form

$$(3) \qquad (a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n)z_1 + \ldots + (a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n)z_n,$$

durch welche die bilineare Form

$$(4) \qquad y_1z_1 + y_2z_2 + \ldots + y_nz_n$$

in sich selbst übergeht. Wenn für die Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Substitution

$$(5) \qquad \left| \begin{array}{l} y_1 = g_{11}u_1 + g_{12}u_2 + \ldots + g_{1n}u_n \\ y_2 = g_{21}u_1 + g_{22}u_2 + \ldots + g_{2n}u_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = g_{n1}u_1 + g_{n2}u_2 + \ldots + g_{nn}u_n \end{array} \right.$$

benutzt wird, und man das zu g_{hk} gehörende, durch die von Null verschiedene Determinante $|g_{hk}|$ dividirte adjungirte Element mit G_{hk} bezeichnet, so muss für die Variabeln z_h die Substitution gebraucht werden

$$(6) \qquad \left| \begin{array}{l} z_1 = G_{11}w_1 + G_{12}w_2 + \ldots + G_{1n}w_n \\ z_2 = G_{21}w_1 + G_{22}w_2 + \ldots + G_{2n}w_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_n = G_{n1}w_1 + G_{n2}w_2 + \ldots + G_{nn}w_n, \end{array} \right.$$

damit die vorgeschriebene Gleichung

$$(7) \qquad y_1z_1 + y_2z_2 + \ldots + y_nz_n = u_1w_1 + u_2w_2 + \ldots + u_nw_n$$

entsteht. Bildet man dagegen die Gleichung

$$(8) \qquad \begin{array}{l} (a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n)z_1 + \ldots + (a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n)z_n \\ = (c_{11}u_1 + \ldots + c_{1n}u_n)w_1 + \ldots + (c_{n1}u_1 + \ldots + c_{nn}u_n)w_n, \end{array}$$

so leuchtet ein, dass die mit der rechten Seite correspondirende Substitution

$$(9)\qquad \begin{cases} t_1 = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \dots + c_{1n}u_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ t_n = c_{n1}u_1 + c_{n2}u_2 + \dots + c_{nn}u_n \end{cases}$$

hervorgebracht wird, indem man zuerst die zu (5) gehörende inverse Substitution

$$(10)\qquad \begin{cases} t_1 = G_{11}x_1 + G_{21}x_2 + \dots + G_{n1}x_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ t_n = G_{1n}x_1 + G_{2n}x_2 + \dots + G_{nn}x_n, \end{cases}$$

hierauf (1) und zuletzt (5) anwendet. Unter der Voraussetzung des von Herrn Camille Jordan herrührenden Satzes muss die Substitution (5) so eingerichtet sein, dass (9) die Gestalt von (2) annimmt. Da nun (2) nach μ-facher Wiederholung unzweifelhaft die identische Substitution liefert, so erkennt man leicht, dass, wenn eine Substitution (1) in die kanonische Gestalt (2) gebracht werden kann, auch umgekehrt (1) die Eigenschaft haben muss, nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution zu erzeugen. Mithin folgt aus dem angeführten Satze des Herrn Camille Jordan, dass eine Substitution (2) die genannte Eigenschaft hat oder nicht hat, je nachdem sie in die kanonische Gestalt (2) verwandelt werden kann oder nicht.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine Substitution (1) nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution erzeuge, können auf verschiedene Weise ausgedrückt werden. Zu der Substitution (2) gehört die mit einer unbestimmten Grösse s gebildete charakteristische Determinante

$$(\omega_1 - s)(\omega_2 - s)\dots(\omega_n - s),$$

und dieselbe ist ausserdem so beschaffen, dass alle ihre Elementartheiler von der ersten Ordnung sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass der grösste gemeinsame Theiler aller partiellen Determinanten der $(n-1)^{\text{ten}}$

Ordnung, durch die Determinante dividirt, einen Bruch liefert, dessen Zähler constant ist, und dessen Nenner nur verschiedene lineare Functionen von s als Factoren enthält. Sobald eine Substitution (1) in die kanonische Form (2) gebracht werden kann, verwandelt sich die mittelst der unbestimmten Grösse s aus (3) und (4) gebildete bilineare Form

$$(11)\qquad (a_{11}y_1+\dots+a_{1n}y_n)z_1+\dots+(a_{n1}y_1+\dots+a_{nn}y_n)z_n-s(y_1z_1+\dots+y_nz_n)$$

durch die Substitutionen (5) und (6) in die bilineare Form

$$(12)\qquad \omega_1u_1w_1+\dots+\omega_nu_nw_n-s(u_1w_1+\dots+u_nw_n),$$

Weshalb die zu (11) gehörende Determinante

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-s, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn}-s \end{vmatrix}$$

ebenfalls die angeführten Eigenschaften der obigen Determinante

$$(\omega_1-s)(\omega_2-s)\dots(\omega_n-s)$$

besitzt. Auch folgt unmittelbar aus den Principien der Abhandlung, in welcher Herr Weierstrass den Begriff der Elementartheiler eingeführt hat, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen,* (Monatsbericht der Berliner Akademie v. 18 Mai 1868, S. 314), dass, wenn die bezeichneten Determinanten in ihren Elementartheilern übereinstimmen, die bilineare Form (11) in die Form (12) transformirt werden kann. Hiernach ist es gestattet, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Substitution (1) nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution liefert, so auszusprechen, dass die Determinante (13) nur für solche Werthe von s, die μ^{te} Wurzeln der Einheit sind, verschwinde, und dass ihre sämmtlichen Elementartheiler von der ersten Ordnung seien.[1] Der zweiten Bedingung kann man nach einer oben gemachten Bemerkung

[1] S. H. Minkowski, *Über den arithmetischen Begriff der Aequivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen,* Journal für Mathematik, Bd. 100, S. 450.

auch den Ausdruck geben, dass der grösste gemeinsame Theiler der sämmtlichen partiellen Determinanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, durch die Determinante dividirt, gleich einem Bruche wird, dessen Zähler constant und dessen Nenner gleich einem Product aus linearen Functionen von s ist, die alle unter einander verschieden sind.

Die Kriterien für die in Rede stehende Eigenschaft einer Substitution von n Variabeln lassen sich, wie ich jetzt zeigen werde, in der zuletzt erwähnten Fassung durch sehr einfache Betrachtungen zur Evidenz bringen, bei denen von der Zerlegung der rationalen ganzen Functionen einer Veränderlichen in Factoren des ersten Grades kein Gebrauch gemacht wird.

Es möge eine gegebene Substitution (1) in μ-facher Wiederholung zur Anwendung kommen, indem man die nach einander einzuführenden Systeme von je n Variabeln mit x_h, y_h, $y_h^{(2)}$, ..., $y_h^{(\mu)}$ bezeichnet. Alsdann ergiebt das System (1) mit Benutzung einer unbestimmten Grösse s das System von Gleichungen

$$(14)\qquad \begin{cases} x_1 - sy_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n - sy_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n - sy_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n - sy_n, \end{cases}$$

und ebenso entsteht nach einander eine Reihe von Systemen, dessen erstes ich hinschreibe

$$(15)\qquad \begin{cases} y_1 - sy_1^{(2)} = a_{11}y_1^{(2)} + a_{12}y_2^{(2)} + \ldots + a_{1n}y_n^{(2)} - sy_1^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n - sy_n^{(2)} = a_{n1}y_1^{(2)} + a_{n2}y_2^{(2)} + \ldots + a_{nn}y_n^{(2)} - sy_n^{(2)}. \end{cases}$$

Wenn man nun das System (15) mit s, die auf dasselbe folgenden beziehungsweise mit s^2, s^3, ..., $s^{\mu-1}$ multiplicirt, alle addirt, und die Abkürzung

$$(16)\qquad \eta_h = y_h + sy_h^{(2)} + \ldots + s^{\mu-1}y_h^{(\mu)}$$

einführt, so erhält man das System von Gleichungen

$$(17)\quad \begin{cases} x_1 - s^\mu y_1^{(\mu)} = a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \cdots + a_{1n}\eta_n - s\eta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n - s^\mu y_n^{(\mu)} = a_{n1}\eta_1 + a_{n2}\eta_2 + \cdots + a_{nn}\eta_n - s\eta_n. \end{cases}$$

Ich mache jetzt die Voraussetzung, dass die Substitution (1) nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution erzeuge, oder, dass, in den eingeführten Bezeichnungen, die Gleichungen

$$(18)\qquad y_1^{(\mu)} = x_1, \quad \ldots, \quad y_n^{(\mu)} = x_n$$

gelten. Dadurch wird aus (17) das System

$$(19)\quad \begin{cases} (1 - s^\mu)x_1 = (a_{11} - s)\eta_1 + a_{12}\eta_1 + \cdots + \qquad a_{1n}\eta_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (1 - s^\mu)x_n = \qquad a_{n1}\eta_1 + a_{n2}\eta_2 + \cdots + (a_{nn} - s)\eta_n. \end{cases}$$

Weil nun die n Verbindungen η_h nach (16) gleich homogenen linearen Functionen der Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sind, welche folgendermassen ausgedrückt werden sollen,

$$(20)\qquad \eta_h = q_{h1}y_1 + q_{h2}y_2 + \cdots + q_{hn}y_n,$$

so kann durch das System (19) für jeden Werth von s, welcher den Ausdruck $(s^\mu - 1)$ nicht zum Verschwinden bringt, nur diejenige Abhängigkeit der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von den Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dargestellt werden, welche ursprünglich in (1) ausgedrückt ist; oder, wenn jede der Gleichungen in (19) durch $(1 - s^\mu)$ dividirt wird, so müssen die auf der rechten Seite befindlichen homogenen linearen Functionen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ respective mit denjenigen identisch sein, die in (1) auftreten. Wenn man daher die in (13) dargestellte Determinante mit $\mathfrak{F}(s)$, die zu dem System (20) gehörende Determinante $|q_{hk}|$ mit $\mathfrak{Q}(s)$, die zu der Substitution (1) gehörende $|a_{hk}|$ mit A bezeichnet, so folgt aus der hervorgehobenen Übereinstimmung zwischen (1) und (19) die Gleichung

$$(20')\qquad A(1 - s^\mu)^n = \mathfrak{F}(s)\mathfrak{Q}(s).$$

Die Determinante A muss wegen der Gleichungen (18) so beschaffen sein, dass

$$(21)\qquad A^{\mu} = 1$$

ist. Die Gleichung (20′) zeigt, dass $\mathfrak{F}(s)$ nur für solche Werthe von s verschwinden kann, die μ^{te} Wurzeln der Einheit sind, wie behauptet war, und giebt gleichzeitig an, wie die Determinante $\mathfrak{Q}(s)$ durch $\mathfrak{F}(s)$ bestimmt wird.

Wenn man annimmt, dass die Determinante $\mathfrak{F}(s)$ so gebildet werde, als ob die Elemente a_{hk} von einander unabhängig wären, so kann man die zu (13) gehörenden partiellen Determinanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung als partielle Differentialquotienten von $\mathfrak{F}(s)$ nach den a_{hk} darstellen, und erhält aus (19) durch Auflösung für die Verbindungen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ die Ausdrücke

$$(22)\qquad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{\dfrac{\partial \mathfrak{F}(s)}{\partial a_{11}} x_1 + \dfrac{\partial \mathfrak{F}(s)}{\partial a_{21}} x_2 + \ldots + \dfrac{\partial \mathfrak{F}(s)}{\partial a_{n1}} x_n}{\mathfrak{F}(s)} (1 - s^{\mu}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \eta_n = \dfrac{\dfrac{\partial \mathfrak{F}(s)}{\partial a_{1n}} x_1 + \dfrac{\partial \mathfrak{F}(s)}{\partial a_{2n}} x_2 + \ldots + \dfrac{\partial \mathfrak{F}(s)}{\partial a_{nn}} x_n}{\mathfrak{F}(s)} (1 - s^{\mu}). \end{cases}$$

Nach (16) sind die η_h gleich homogenen linearen Functionen der Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$, deren Coefficienten ganze Functionen der unbestimmten Grösse s sind; sie verwandeln sich durch Anwendung von (1) in homogene lineare Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deren Coefficienten ebenfalls ganze Functionen von s sind. Diese Coefficienten finden sich auf der rechten Seite von (22) individuell dargestellt. Mithin muss jeder der n^2 Ausdrücke

$$\frac{\dfrac{\partial \mathfrak{F}(s)}{\partial a_{hk}}}{\mathfrak{F}(s)} (1 - s^{\mu})$$

gleich einer ganzen Function von s sein. Es hat daher der grösste gemeinsame Theiler der zu $\mathfrak{F}(s)$ gehörenden partiellen Determinanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung die Eigenschaft, durch $\mathfrak{F}(s)$ dividirt, und mit der

Function $(1 - s^\mu)$, die nur ungleiche Factoren enthält, multiplicirt, gleich einer ganzen Function von s zu sein, womit der zweite Theil der Behauptung bewiesen ist.

Wenn umgekehrt eine Substitution (1) so beschaffen ist, dass die zu derselben gehörende Determinante $\mathfrak{F}(s)$ die so eben erwähnten Eigenschaften besitzt, so lassen sich mit n unbeschränkt veränderlichen Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n Ausdrücke bilden, wie sie sich auf der rechten Seite von (22) befinden, und dieselben sind nach den getroffenen Voraussetzungen ganze Functionen der unbestimmten Grösse s vom $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grade. Dieselben mögen nach den Potenzen von s entwickelt, und wie in (16) bezeichnet werden. Dann folgt aus (22) das System (19), und wenn hier die Ausdrücke (16) der η_h eingesetzt werden, so erkennt man, dass wegen der Unbestimmtheit der Grösse s das System (1) oder (14), hierauf (15) gelten muss, und alle darauf folgenden beschriebenen Systeme gelten müssen, und dass als letztes das System (18) besteht. Diese Erscheinungen drücken aber aus, dass (1) nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution hervorbringt. Hiermit ist der Nachweis vollendet, dass die aufgestellten Bedingungen nothwendig und hinreichend sind.

Bonn d. 4. April 1887.

DIE MINIMALFLÄCHEN

MIT EINEM

SYSTEM SPHÄRISCHER KRÜMMUNGSLINIEN

VON

HERMANN DOBRINER
in FRANKFURT a. M.

In engem Anschluss an die in meiner letzten Abhandlung[1] benutzten Methoden lässt sich auch die Frage nach den Minimalflächen erledigen, die ein System sphärischer Krümmungslinien besitzen. Diese repräsentiren in gewissem Sinne nur einen Grenzfall der entsprechenden Flächen constanter Krümmung, und man hätte an den Entwickelungen der citirten Abhandlung verhältnissmässig nur geringe Veränderungen vorzunehmen, um auch für die neuen Flächen die constituirenden Gleichungen zu finden. Indessen gelangt man zu denselben schneller und erhält sie auch sofort in ihrer einfachsten Gestalt, wenn man sich, statt auf die Gleichungen (5) zurückzugehn, der WEIERSTRASS'schen Formeln bedient. Die Anwendung derselben ist in diesem Falle ermöglicht, wenn man die Krümmungsradien in ihrer Abhängigkeit von den Parametern der Krümmungslinien kennt. Ich werde daher der Kürze wegen den Gang, der zu den Ausdrücken für die Krümmungsradien führt, nur andeuten, dann mit Hilfe der WEIERSTRASS'schen Formeln die Gleichungen der Fläche aufstellen und erst am Schluss die Gleichung der Kugel geben, auf welcher die Krümmungslinie $v = Const.$ liegt.

---

[1] Dieses Journal Bd. 9, p. 73—104.

Die Bedingung $\rho_1 = -\rho_2 = \rho$ hat die Relationen

$$P = Q = \frac{1}{f} = -\frac{1}{g} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

zur Folge, welche man an Stelle des Gleichungssystems (9) der weitern Untersuchung zu Grunde zu legen hat. Man findet dann zunächst die Gleichungen (14) wiederum in ihrer alten Gestalt, für $R\cos\sigma$ eine im Vergleich mit (15) complicirte Formel, und schliesslich für q_1 und q_2 Differentialgleichungen, die ihrer Form nach nicht mit (20) sondern mit (25) zusammenfallen; dies kennzeichnet das vorliegende Problem zu einem Grenzfall des frühern. Ersetzt man in (25)

$$p_1 \text{ durch } iq_1, \qquad p_2 \text{ durch } q_2 \text{ und } u \text{ durch } iv,$$

so erhält man die Gleichungen für q_1 und q_2. Ihre expliciten Ausdrücke in v gehn durch dieselben Vertauschungen aus (33) hervor, mithin ist auch das System der l, m, n wesentlich identisch mit dem der λ, μ, ν. Bezeichnen λ', μ', ν' die Ausdrücke, in welche λ, μ, ν übergehn, wenn man in (49) u durch iv ersetzt, so ist

$$l_h = \mu'_h, \qquad m_h = \nu'_h, \qquad n_h = \lambda'_h. \qquad (h=1,2,3)$$

Hinsichtlich der Quantitäten p_1 und p_2, sowie überhaupt hinsichtlich aller von dem Parameter u abhängigen Grössen behalten die frühern Resultate unverändert Geltung.

Nun war (p. 102)

$$P = -\frac{\Sigma_h n_h \pi_h}{\Sigma_h l_h \lambda_h}$$

und darin (p. 103)

$$\pi_1 = -\sqrt{s}\,\frac{\vartheta_1\vartheta_2(a)\vartheta_3(a)}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_{11}^2(a)}\cdot\frac{\vartheta_1(u_1)}{\vartheta_{11}(u_1)}, \text{ etc.}$$

wenn für den Factor $\frac{du_1}{du}$ sein Werth aus (30) gesetzt wird. Mithin ist

$$\sqrt{\rho} = \frac{1}{P} = -\frac{\Sigma_h \mu'_h \lambda_h}{\Sigma_h \lambda'_h \pi_h},$$

$$\sqrt{\rho} = \frac{i\vartheta_{11}^2(a)}{\sqrt{s}\,\vartheta_{11}(2a)}\cdot\frac{e^{v_2}\Sigma_h \vartheta_h\vartheta_h(a)\vartheta_h(u_1)\vartheta_h(v_1+a) + e^{-v_2}\Sigma_h \vartheta_h\vartheta_h(a)\vartheta_h(u_1)\vartheta_h(v_1-a)}{\Sigma_h \vartheta_h^2\vartheta_h(u_1)\vartheta_h(v_1)}.$$

Die drei Summen $\sum_h$ lassen sich mit Hilfe der Thetaformel:[1]

$$\sum_h \vartheta_h \vartheta_h(x)\vartheta_h(y)\vartheta_h(z) = 2\vartheta_{11}(s)\vartheta_{11}(s-x)\vartheta_{11}(s-y)\vartheta_{11}(s-z)$$

$$2s = x + y + z \qquad {\scriptstyle (h=1,2,3)}$$

durch je ein Thetaprodukt wiedergeben, so dass man für $\sqrt{\rho}$ den einfachen Ausdruck:

$$\text{(a)} \qquad \sqrt{\rho} = \frac{i\vartheta_{11}^2(a)}{\sqrt{s}\,\vartheta_{11}(2a)} \cdot \frac{e^{\tau_2}\vartheta_{11}(\sigma+a)\vartheta_{11}(\sigma_1-a) + e^{-\tau_2}\vartheta_{11}(\sigma-a)\vartheta_{11}(\sigma_1+a)}{\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)}$$

erhält, wenn man abkürzend

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} \sigma &= \frac{u_1+v_1}{2} = \frac{\sqrt{s}}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{u+iv}{2}, \\ \sigma_1 &= \frac{u_1-v_1}{2} = \frac{\sqrt{s}}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{u-iv}{2} \end{aligned}$$

setzt.

Benutzt man ferner die Bezeichnungen

$$\text{(c)} \qquad \left| \begin{aligned} \tau &= \quad u_2 + v_2 = -\frac{\vartheta'_{11}(a)}{\vartheta_{11}(a)}(u_1+v_1) + Const., \\ \tau_1 &= -u_2 + v_2 = +\frac{\vartheta'_{11}(a)}{\vartheta_{11}(a)}(u_1-v_1) + Const. \end{aligned} \right.$$

und setzt

$$\text{(d)} \qquad \left| \begin{aligned} \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(\sigma+a)}{\vartheta_{11}(\sigma-a)} &= t, \\ \frac{e^{\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1-a)}{\vartheta_{11}(\sigma_1+a)} &= t_1, \end{aligned} \right.$$

so wird

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\sigma} &= -\frac{e^{\tau}\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(2a)\vartheta_{11}^2(\sigma)}{\vartheta_{11}^2(a)\vartheta_{11}^2(\sigma-a)}, \\ \frac{dt_1}{d\sigma_1} &= +\frac{e^{\tau_1}\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(2a)\vartheta_{11}^2(\sigma_1)}{\vartheta_{11}^2(a)\vartheta_{11}^2(\sigma_1+a)}; \end{aligned}$$

---

[1] Man erhält dieselbe durch Subtraction aus zwei von JACOBI angegebenen Formeln (Werke, Bd. I, p. 507 (3) und (4)); sie ist ein specieller Fall der allgemeinen Formel, die Herr PRYM die RIEMANN'sche Thetaformel genannt hat.

und

$$\rho = \frac{\vartheta_{11}'^2}{s} \cdot \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{d\sigma_1}{dt_1} (1 + tt_1)^2.$$

Die Grössen t, t_1 sowie σ, σ_1 und τ, τ_1 sind für reelle Werthe der Variabeln u und v conjugirt complex, wenn man die Constante a als rein imaginär voraussetzt.

Von einem Ausdrucke für den Krümmungsradius, der sich von dem obigen nur durch einen constanten Faktor unterscheidet, ausgehend, leitet ENNEPER [1] die WEIERSTRASS'schen Gleichungen für die Coordinaten eines Punktes der Minimalfläche ab. Hier erscheinen sie in der Form:

$$x = R \int \frac{\vartheta_{11}'^2}{s} (1 - t^2) \frac{d\sigma}{dt} d\sigma,$$

$$y = R \int \frac{i\vartheta_{11}'^2}{s} (1 + t^2) \frac{d\sigma}{dt} d\sigma,$$

$$z = R \int \frac{2\vartheta_{11}'^2}{s} t \frac{d\sigma}{dt} d\sigma,$$

wenn man durch das vorgesetzte R den reellen Teil des nachfolgenden Integrals bezeichnet. Es ist also:

$$x = R \int \frac{\vartheta_{11}' \vartheta_{11}^2(a)}{s \vartheta_{11}(2a) \vartheta_{11}^2(\sigma)} [e^\tau \vartheta_{11}^2(\sigma + a) - e^{-\tau} \vartheta_{11}^2(\sigma - a)] d\sigma,$$

$$y = R \int \frac{\vartheta_{11}' \vartheta_{11}^2(a)}{is \vartheta_{11}(2a) \vartheta_{11}^2(\sigma)} [e^\tau \vartheta_{11}^2(\sigma + a) + e^{-\tau} \vartheta_{11}(\sigma - a)] d\sigma,$$

$$z = R \int - \frac{2\vartheta_{11}' \vartheta_{11}^2(a)}{s \vartheta_{11}(2a) \vartheta_{11}^2(\sigma)} \vartheta_{11}(\sigma + a) \vartheta_{11}(\sigma - a) d\sigma,$$

und nach der Integration:

$$x = -R \frac{2\vartheta_{11}^4(a)}{s\vartheta_{11}^2(2a)} \cdot \frac{e^\tau \vartheta_{11}(\sigma + 2a) + e^{-\tau} \vartheta_{11}(\sigma - 2a)}{2\vartheta_{11}(\sigma)},$$

$$y = -R \frac{2\vartheta_{11}^4(a)}{s\vartheta_{11}^2(2a)} \cdot \frac{e^\tau \vartheta_{11}(\sigma + 2a) - e^{-\tau} \vartheta_{11}(\sigma - 2a)}{2i\vartheta_{11}(\sigma)},$$

$$z = -R \frac{2\vartheta_{11}^4(a)}{s\vartheta_{11}^2(2a)} \cdot \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta_{11}'} \left[\frac{d \log \vartheta_{11}(\sigma)}{d\sigma} - \sigma \frac{d^2 \log \vartheta_{11}(a)}{da^2} \right]$$

---

[1] Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 9, p. 103—107.

oder, wenn man noch die reelle Constante

$$-\frac{s\vartheta_{11}^2(2a)}{2\vartheta_{11}^4(a)} \quad \text{mit} \quad C$$

bezeichnet:

$$(\mathrm{e})\quad \left\{\begin{aligned} Cx &= \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(\sigma+2a)+e^{-\tau}\vartheta_{11}(\sigma-2a)}{2\vartheta_{11}(\sigma)}+\frac{e^{\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)+e^{-\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1+2a)}{2\vartheta_{11}(\sigma_1)},\\ Cy &= \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(\sigma+2a)-e^{-\tau}\vartheta_{11}(\sigma-2a)}{2i\vartheta_{11}(\sigma)}-\frac{e^{\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)-e^{-\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1+2a)}{2i\vartheta_{11}(\sigma_1)},\\ Cz &= \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}\left[\frac{\vartheta'_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)-\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta'_{11}(\sigma_1)}{\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)}-v_1\frac{d^2\log\vartheta_{11}(a)}{da^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

Ich gehe dazu über die Gleichung der Kugel aufzustellen, auf der die Krümmungslinie $v = Const.$ liegt.

Man setze

$$Cz + v_1\frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}\cdot\frac{d^2\log\vartheta_{11}(a)}{da^2} = Cz_1$$

und

$$\frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}[\vartheta'_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)-\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta'_{11}(\sigma_1)] = \Delta,$$

so dass

$$\Delta = C\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)z_1$$

wird. Dann ist

$$\begin{aligned} &C^2\vartheta_{11}^2(\sigma)\vartheta_{11}^2(\sigma_1)(x^2+y^2+z_1^2)\\ &= \vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)\left[e^{2v_2}\vartheta_{11}(\sigma+2a)\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)+e^{-2v_2}\vartheta_{11}(\sigma-2a)\vartheta_{11}(\sigma_1+2a)\right]\\ &+\Delta^2+\vartheta_{11}^2(\sigma_1)\vartheta_{11}(\sigma+2a)\vartheta_{11}(\sigma-2a)+\vartheta_{11}^2(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)\vartheta_{11}(\sigma_1+2a). \end{aligned}$$

Nun stellt die Determinante Δ eine gerade θ-Function zweiter Ordnung mit der Characteristik (o) in Bezug auf das Argument $\frac{u_1}{2}$ dar; sie lässt sich daher durch zwei besondere, von einander unabhängige θ-Functionen gleicher Art linear ausdrücken. Wir wählen die beiden Darstellungen:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}[\vartheta'_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)-\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta'_{11}(\sigma_1)]\\ &= A\,\vartheta_{11}(\sigma+2a)\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)+B\,\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)\\ &= A_1\vartheta_{11}(\sigma-2a)\vartheta_{11}(\sigma_1+2a)+B_1\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1), \end{aligned}$$

und bestimmen die Coefficienten A und A_1, indem wir $\sigma_1 = 0$, $\sigma = v_1$ setzen, und die Coefficienten B, B_1, indem wir $\sigma_1 = \pm 2a$, $\sigma = \pm 2a + v_1$, annehmen.

Wir finden

$$\Delta = C\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)z_1$$

$$= + \frac{\vartheta_{11}(v_1)}{\vartheta_{11}(v_1 + 2a)}\vartheta_{11}(\sigma + 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 - 2a)$$

$$+ \vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)\frac{\vartheta'_{11}(v_1 + 2a)\vartheta_{11}(2a) - \vartheta_{11}(v_1 + 2a)\vartheta'_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(v_1 + 2a)}$$

$$= - \frac{\vartheta_{11}(v_1)}{\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}\vartheta_{11}(\sigma - 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 + 2a)$$

$$+ \vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)\frac{\vartheta'_{11}(v_1 - 2a)\vartheta_{11}(2a) + \vartheta_{11}(v_1 - 2a)\vartheta'_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)},$$

und daraus:

$$\text{(f)}\quad \left|\begin{aligned} &\frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(\sigma + 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 - 2a) + e^{-2v_2}\vartheta_{11}(\sigma - 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 + 2a)}{\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)} \\ &\qquad = Cz_1\,\frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)} \\ &\qquad - \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}\cdot\frac{e^{2v_2}\vartheta'_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta'_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)} \\ &\qquad + \frac{\vartheta'_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}\cdot\frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) + e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)}. \end{aligned}\right.$$

Δ^2 ist eine gerade θ-Function vierter Ordnung, die wir linear durch drei von einander unabhängige Thetaproducte darstellen können. Setzen wir die Gleichung in der Form

$$\Delta^2 = A_2\left[\vartheta^2_{11}(\sigma_1)\vartheta_{11}(\sigma + 2a)\vartheta_{11}(\sigma - 2a) + \vartheta^2_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1 + 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 - 2a)\right]$$

$$+ B_2\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)\Delta + C_2\vartheta^2_{11}(\sigma)\vartheta^2_{11}(\sigma_1)$$

an und entwickeln, indem wir $\sigma_1 = \sigma - v$ setzen, beide Seiten nach Po-

tenzen von σ, so erhalten wir durch Vergleichung der Coefficienten von σ^0, σ^1, σ^2:

$$A_2 = -1,$$

$$B_2 = \frac{2\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d \log \vartheta_{11}(v_1)}{dv_1},$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\vartheta'^2_{11}(2a) - \vartheta_{11}(2a)\vartheta''_{11}(2a)}{\vartheta'^2_{11}} + \frac{\vartheta_{11}(v_1 + 2a)\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta^2(v_1)} \\ &\quad + \frac{\vartheta^2_{11}(2a)}{\vartheta'^3_{11}} \cdot \frac{\vartheta'_{11}\vartheta'^2_{11}(v_1) - 2\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(v_1)\vartheta''_{11}(v_1) + \vartheta'''_{11}\vartheta^2_{11}(v_1)}{\vartheta^2(v_1)} \\ &= \frac{2\vartheta'_{11}\vartheta'^2_{11}(2a) - 2\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(2a)\vartheta''_{11}(2a) + \vartheta'''_{11}\vartheta^2_{11}(2a)}{\vartheta'^3_{11}} - \frac{\vartheta^2_{11}(2a)\vartheta''_{11}(v_1)}{\vartheta'^2_{11}\vartheta_{11}(v_1)}. \end{aligned}$$

Mithin ist:

$$\text{(g)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta^2 + \vartheta^2_{11}(\sigma_1)\vartheta_{11}(\sigma + 2a)\vartheta_{11}(\sigma - 2a) + \vartheta^2_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1 + 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 - 2a) \\ &\qquad = \vartheta^2_{11}(\sigma)\vartheta^2_{11}(\sigma_1)\left[\frac{2\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d \log \vartheta_{11}(v_1)}{dv_1} Cz_1 + C_2\right]. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichung der Kugel erhält man nun, wenn man (f) und (g) berücksichtigt, in folgender Gestalt:

$$\text{(h)} \qquad C^2(x^2 + y^2) + (Cz + V)^2 = W,$$

$$\text{(i)} \quad \left\{ \begin{aligned} V &= \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d^2 \log \vartheta_{11}(a)}{da^2} v_1 - \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d \log \vartheta_{11}(v_1)}{dv_1} \\ &\qquad - \frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{2\vartheta_{11}(v_1)} \\ W &= \left[\frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d \log \vartheta_{11}(v_1)}{dv_1} + \frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{2\vartheta_{11}(v_1)}\right]^2 \\ &\quad - \frac{\vartheta^2_{11}(2a)\vartheta''_{11}(v_1)}{\vartheta'^2_{11}\vartheta_{11}(v_1)} - \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{e^{2v_2}\vartheta'_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta'_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)} \\ &\qquad + \frac{\vartheta'_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) + e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)} \\ &\qquad + \frac{2\vartheta'_{11}\vartheta'^2_{11}(2a) - 2\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(2a)\vartheta''_{1}(2a) + \vartheta'''_{11}\vartheta^2_{11}(2a)}{\vartheta'^3_{11}}. \end{aligned} \right.$$

Die Krümmungslinien $v_1 = Const.$ liegen also sämmtlich auf Kugeln, die ihre Mittelpunkte auf der z-Axe haben. Die Curven $v_1 = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots$ bilden insofern Ausnahmen, als ihre osculirenden Kugeln in Ebenen degeneriren, die der xy-Ebene parallel sind. Man kann übrigens leicht nachweisen, dass diese Curven alle einander ähnlich sind.

Die Krümmungslinien $u = 0, \pm 2\omega, \pm 4\omega, \ldots$ sind gleichfalls plan und zwar in Ebenen gelegen, welche durch die z-Axe gehn. Sie zerlegen die Minimalfläche in congruente Teile, von denen jeder mit dem benachbarten Teilstücke zur Deckung gelangt, wenn man die ganze Fläche um die z-Axe dreht und zwar um den Winkel

$$\varepsilon = 4ia + \omega \frac{2i\vartheta'_{11}(a)}{\vartheta_{11}(a)},$$

worin ω der Periodicitätsmodul der ϑ-Functionen ist.

SUR CERTAINES OPÉRATIONS FONCTIONNELLES REPRÉSENTÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES

PAR

S. PINCHERLE
À BOLOGNE.

Le présent travail a pour objet d'esquisser quelques points de la théorie des expressions propres à représenter des fonctions analytiques et données sous forme d'intégrales définies. Je me borne ici aux expressions de la forme

$$\int A(x, y)\varphi(y)dy,$$

où l'intégrale est prise le long d'une ligne quelconque du plan y. Je me place à un point de vue qui n'est pas sans précédents,[1] mais qui, à ce que je crois, n'a pas encore été abordé d'une manière générale. Je considère en effet l'expression ci-dessus comme un algorithme appliqué au *sujet* variable $\varphi(y)$ et dont les propriétés essentielles dépendent de la fonction $A(x, y)$. Ces propriétés sont de deux sortes, formelles et effectives, et bien que la démarcation entre elles ne soit pas toujours nettement tranchée, je m'en occuperai séparément dans les deux parties de ce mémoire.

---

[1] V. à ce sujet une courte notice historique placée en tête de mon mémoire *Sopra alcune operazioni funzionali.* Memorie dell' Accad. di Bologna, S. IV, T. VII, 1886.

I.

1. Soit $A(x, y)$ une fonction analytique de deux variables. D'après la définition de M. WEIERSTRASS, cette fonction est régulière dans le domaine d'une couple de valeurs (x_0, y_0) quand elle est développable, sous les conditions

$$|x - x_0| < \delta, \qquad |y - y_0| < \delta'$$

en une série de puissances entières et positives de $x - x_0$, $y - y_0$. La fonction $A(x, y)$ pourra d'ailleurs avoir des singularités quelconques, et chaque point $\bar{y}$, pris dans le plan y, déterminera dans le plan x le système, *correspondant à* $\bar{y}$, des singularités de la fonction $A(x, \bar{y})$.

Soit l une ligne, définie analytiquement, et ayant une longueur finie et déterminée, tracée dans le plan y. Si l'on fait varier y le long de cette ligne, les singularités correspondante décrivent dans le plan x, certains lieux géométriques correspondants à l; (*coupures,* selon l'expression de M[rs] HERMITE et GOURSAT). Dans les cas les plus communs, ces coupures sont des lignes, mais elles peuvent être aussi des points ou des aires. J'indiquerai par T_x un champ connexe, pris dans le plan x, et tel que les coupures correspondant à l n'aient aucun point commun avec T_x.

2. Cela posé:

A. »Si $\varphi(y)$ est une fonction à une seule valeur, finie et continue, arbitrairement donnée pour les points de la ligne l, l'expression

$$\int_l A(x, y)\varphi(y)dy \tag{1}$$

où l'intégration est faite le long de la ligne l, représente, à l'intérieur du champ T_x, une fonction analytique et monogène[1] de x.»

Prenons en effet un point quelconque x_0 à l'intérieur de T_x. Du point x_0 comme centre, décrivons un cercle (cercle r) avec un rayon r au plus égal à la limite inférieure des distances de x_0 aux coupures correspondant à l. Pour tout point y de la ligne l, la fonction $A(x, y)$ est régulière pour les valeurs de x comprises dans un cercle de centre x_0 et

[1] Dans le sens adopté par M[rs] WEIERSTRASS et MITTAG-LEFFLER.

de rayon au moins égal à r; elle peut par conséquent se développer en une série de puissances de $x - x_0$, dont les coefficients sont des fonctions de y régulières en chaque point de l. Si donc l'on pose

$$(2) \qquad A(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(x_0, y)(x - x_0)^n,$$

on aura

$$| A^{(n)}(x_0, y) | < \frac{M}{r'^n},$$

où M est une quantité positive au moins égale à la limite des modules de $A(x, y)$ pour x intérieur au cercle r et y pris le long de la ligne l, et r' est un nombre positif moindre que r. Pour les couples de valeurs de x, y prises comme on vient de le dire, la série (2) est donc convergente absolument et uniformément; on peut la multiplier par $\varphi(y)dy$ et intégrer le long de l, et il vient:

$$\int_l A(x, y)\varphi(y)dy = \sum (x - x_0)^n \int_l A^{(n)}(x_0, y)\varphi(y)dy.$$

L'expression (1) équivaut donc, à l'intérieur du cercle r, à une série convergente de puissances entières et positives de $x - x_0$, et représente par conséquent une fonction analytique, c. q. f. d.[1]

3. Il est clair que la fonction ainsi définie peut être continuée analytiquement de proche en proche pour tout l'intérieur du champ T_x, et qu'elle représente par conséquent, à l'intérieur de ce champ, une seule et même fonction $f(x)$ monogène. Toutefois, si l'on considère un champ T'_x satisfaisant aux mêmes hypothèses que T_x, mais tel que l'on ne puisse passer de T_x à T'_x sans traverser les coupures, la même expression (1) représentera en général dans les deux champs deux fonctions analytiques différentes.

[1] Ce théorème, sous des hypothèses différentes et pour y réel, se trouve démontré dans l'*Habilitationsschrift* du jeune et regretté géomètre L. Scheeffer; un théorème semblable est admis aussi par M. Goursat au début de son beau mémoire *Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies* (ce journal T. 2). J'ai cru devoir reprendre ce théorème, d'abord parce qu'il est fondamental pour ce qui va suivre, ensuite parce que la démonstration que j'en donne, faite au point de vue de M. Weierstrass, est toute différente de celle de Scheeffer, fondée sur le concept de fonction de variable complexe selon Cauchy et Riemann.

4. Une démonstration tout-à-fait semblable servirait à prouver les deux propositions suivantes:

B. »Dans le champ T_x, la dérivée de la fonction $f(x)$ s'obtient en dérivant sous le signe.»

C. »L'expression

$$\int_{l_1}\int_{l} A(x, y)B(y, t)\varphi(t)dydt,$$

sous des hypothèses analogues et dans un champ T_x défini comme ci-dessus, représente une fonction analytique de x; et sous les mêmes hypothèses, on peut intervertir l'ordre des intégrations.»

5. On pourrait aisément rendre moins restrictives les hypothèses faites sur la fonction $\varphi(y)$, mais cela n'est pas nécessaire pour le but de ce travail. Au contraire, je supposerai dorénavant que $\varphi(y)$ soit une fonction analytique de la variable y, régulière pour tous les points de la ligne l.

6. Si l'on pose

$$f(x) = \int_{l} A(x, y)\varphi(y)dy,$$

où x est pris dans le champ T_x, on peut regarder $A(x, y)$ comme une fonction donnée, fixe, tandis que $\varphi(y)$ pourra varier, tout en restant comprise en certaines classes déterminées. Je regarderai l'expression (1) comme un algorithme ou une *opération fonctionnelle* exécutée sur la fonction $\varphi(y)$. La nature de cette opération dépend surtout de la fonction $A(x, y)$, que j'appellerai *fonction caractéristique* de l'algorithme.

La fonction caractéristique et la ligne d'intégration restant fixées, la relation entre $\varphi(y)$ et $f(x)$ peut s'écrire d'une façon abrégée:

$$f(x) = A(\varphi). \tag{3}$$

Lorsque la fonction $\varphi(y)$ varie, sans cesser d'appartenir à une certaine classe déterminée, la fonction $f(x)$ varie d'une façon correspondante, en restant comprise dans certaines classes déterminées par la relation (3). Cette relation peut donc servir à exprimer, non seulement une dépendance entre les deux fonctions f et φ, mais encore une correspondance entre deux classes de fonctions analytiques. Pour en donner un exemple,

il suffit de rappeler la transformation de LAPLACE, qui n'est autre chose qu'une correspondance de cette espèce, et dont M. POINCARÉ a tout récemment renouvelé l'usage d'une façon si efficace, dans l'étude des intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires.[1]

7. Remarquons une fois pour toutes que pour chaque ligne d'intégration l, il existe en général des fonctions analytiques telles que

$$\int_l f(y)dy = 0. \tag{4}$$

J'indique ces fonctions par $\omega_i(y)$.

La fonction

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\omega_i(y)$$

où les fonctions $a_i(x)$ sont arbitraires, satisfait pareillement à l'équation (4) quel que soit n et même pour $n = \infty$ si la série est intégrable terme à terme. (Il suffit pour cela qu'elle soit convergente uniformément ou qu'elle satisfasse à l'autre condition moins restrictive récemment donnée par M. ARZELÀ[2]).

8. L'un des problèmes les plus importants qui se présentent dans l'étude de la correspondance définie par la relation (3), est le suivant:

»Etant données la fonction caractéristique $A(x, y)$, la ligne d'intégration l, et une fonction $f(x)$ dans le champ T_x, déterminer la fonction $\varphi(y)$.»

Ce problème, qu'on a appelé »inversion des intégrales définies»,[3] et qui se présente fréquemment en Physique mathématique et notamment dans la théorie du potentiel, a été traité dans de nombreux cas particuliers, mais il n'est pas à ma connaissance qu'il en ait été fait une étude générale. Pour l'historique de la question, je renvoie à mon mémoire déjà cité, publié par l'Académie de Bologne.

---

[1] American Journal of Mathematics, T. 7. — Acta Mathematica, T. 8.

[2] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1885.

[3] LAURENT, *Sur le calcul inverse des intégrales définies.* Journal de Mathém., S. III, T. IV. Dans ce mémoire le problème est énoncé en général, mais la solution n'en est donnée que pour deux cas particuliers.

Remarquons, en passant, que dans la plupart des cas, le problème du développement d'une fonction en série de fonctions données, se ramène à une question d'inversion d'intégrales définies.

Le problème d'inversion équivaut à la recherche de l'opération inverse de $A(\varphi)$. D'après le § 7, cette opération sera en général multiforme; or, je me propose d'étudier le cas où l'une des déterminations de cette opération inverse peut se représenter par un algorithme de la même espèce que $A(\varphi)$. En d'autres termes, je m'occuperai du cas où il existe une fonction $\mathbf{A}(y, t)$ et une ligne d'intégration λ telles que l'on ait (au moins pour certaines classes de fonctions φ et f):

$$\varphi(y) = \int_\lambda \mathbf{A}(y, t) f(t) dt$$

comme conséquence de

$$f = A(\varphi).$$

En ce cas, le problème d'inversion revient à la recherche de la fonction $\mathbf{A}(y, t)$, que j'appellerai fonction *réciproque* de $A(x, y)$.

Je ferai précéder cette recherche des considérations suivantes.

9. Soient deux opérations A, B définies par les fonctions caractéristiques $A(x, y)$, $B(y, t)$. Si l'on exécute sur une fonction φ, d'abord l'opération B, puis l'opération A sur le résultat obtenu, cette double opération pourra s'appeler le *produit* des deux opérations A, B, et on pourra l'indiquer par

$$AB(\varphi).$$

On doit toujours supposer vérifiées les conditions sous lesquelles ces opérations ont une signification déterminée, p. ex. les conditions suffisantes énoncées au § 2. Je n'insisterai donc pas ici sur ces conditions, d'autant plus qu'il ne s'agit pour le moment que du côté *formel* de la question. On a, en indiquant par l' la ligne d'intégration dans le plan t:

$$AB(\varphi) = \int_l A(x, y) \int_{l'} B(y, t) \varphi(t) dt dy$$

que l'on peut écrire (§ 4, C)

$$\int_{l'} \int_l A(x, y) B(y, t) dy \varphi(t) dt;$$

d'où il suit que l'opération $AB(\varphi)$ est de la même nature que $A(\varphi)$, et a pour fonction caractéristique

$$\int_l A(x, y) B(y, t) dy.$$

On définirait de même le *produit* de trois ou d'un nombre quelconque d'opérations de la même nature que A.

10. Le produit des opérations A, tel qu'on vient de le définir, satisfait aux lois distributives et associatives. Cela se vérifie sans difficulté. Mais le produit de deux opérations A ne satisfait pas, en général, à la loi commutative.

11. Si $\mathbf{A}(y, t)$ est la fonction réciproque de $A(x, y)$ on aura

$$A\mathbf{A}(\varphi) = \varphi,$$

c'est-à-dire la fonction

$$U(x, t) = \int A(x, y) \mathbf{A}(y, t) dy$$

est telle, qu'au moins pour certaines classes de fonctions φ et certaines portions du plan x convenablement choisies, on a

(5) $$U(\varphi) = \varphi.$$

Telle est par exemple, pour les fonctions φ régulières dans une aire limitée par une courbe fermée, la fonction $\frac{1}{t - x}$.

12. Avant d'aller plus loin, il nous faut examiner une espèce particulière d'opérations (3): ce sont celles *qui conservent la dérivation;* c'est-à-dire (en indiquant les dérivées par des accents) telles que l'on ait:

(6) $$A(\varphi) = f, \qquad A(\varphi') = f'.$$

On peut faire sur ces opérations les remarques suivantes:

a. Les fonctions U telles que (5) conservent la dérivation.

b. Si une opération A conserve la dérivation, sa réciproque $\mathbf{A}$ la conserve aussi.

c. Si une opération A conserve la dérivation, les fonctions $A(y^n)$ ne sont autre chose que les polynômes de M. Appell.[1]

---

[1] *Sur une classe de polynômes.* (Annales de l'Ecole Normale supérieure, 1880.)

En effet, d'après l'hypothèse (6), l'opération A appliquée à une constante donnera une constante; appliquée à y, elle donnera donc une fonction linéaire en x; appliquée à y^n, elle donnera un polynôme de degré n en x. De plus, par la même hypothèse (6), si l'on pose

$$A(y^n) = a_n(x)$$

on a

$$\frac{da_n(x)}{dx} = nA(y^{n-1}) = na_{n-1}(x),$$

ce qui est précisément la définition des polynômes de M. APPELL.

d. Réciproquement, si une opération A est telle que les fonctions $A(y^n)$ constituent un système de polynômes de M. APPELL, cette opération conserve la dérivation, au moins pour les séries de puissances. Cela se vérifie aisément.

13. Le produit de deux opérations qui conservent la dérivation jouit de la même propriété. En effet, si les opérations A et B conservent la dérivation, on a d'après ce qui précède:

$$A(y^n) = \alpha_0 x^n + n\alpha_1 x^{n-1} + \binom{n}{2}\alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_n, \tag{7}$$

$$B(y^n) = \beta_0 x^n + n\beta_1 x^{n-1} + \binom{n}{2}\beta_2 x^{n-2} + \ldots + \beta_n; \tag{7'}$$

or, formons

$$AB(t^n) = \int_l\int_l A(x, y)B(y, t)t^n dt dy,$$

on aura

$$AB(t^n) = \int_l A(x, y)\left[\beta_0 y^n + n\beta_1 y^{n-1} + \binom{n}{2}\beta_2 y^{n-2} + \ldots + \beta_n\right]dy,$$

d'où

$$AB(t^n) = \beta_0 a_n(x) + n\beta_1 a_{n-1}(x) + \ldots + \beta_n a_0.$$

Mais ceci est encore un des systèmes de polynômes en question, et précisément celui que M. APPELL indique par $(AB)_n$;[1] d'où suit que l'opération AB, au moins formellement et pour les séries de puissances, conserve encore la dérivation.

---

[1] Loc. cit., § 3.

14. Il résulte de ce qui précède que la recherche de la fonction réciproque d'une fonction $A(x, y)$ qui conserve la dérivation, pour une ligne d'intégration donnée, dépend de la recherche des polynômes que M. APPELL nomme *inverses* des polynômes $a_n(x)$: or comme on peut toujours construire ces polynômes inverses, il s'ensuit que l'on peut, au moins formellement, intervertir l'opération A.

15. Cherchons la forme générale des fonctions $A(x, y)$ qui conservent la dérivation. A cet effet, soit

$$A(x, y) = \frac{\partial \overline{A}(x, y)}{\partial y};$$

on aura, par hypothèse,

$$(8) \qquad \left| \begin{aligned} &\int_l \frac{\partial \overline{A}(x, y)}{\partial y} \varphi(y) dy = f(x), \\ &\int_l \frac{\partial \overline{A}(x, y)}{\partial y} \varphi'(y) dy = f'(x). \end{aligned} \right.$$

Intégrons par parties la première de ces équations, et nous aurons:

$$f(x) = \left[\overline{A}(x, y)\varphi(y)\right]_l - \int_l \overline{A}(x, y)\varphi'(y)dy.$$

Or supposons que l'on ait:

$$(9) \qquad \left[\overline{A}(x, y)\varphi(y)\right]_l = 0,$$

il vient

$$f(x) = -\int_l \overline{A}(x, y)\varphi'(y)dy;$$

d'où, en dérivant sous le signe et en tenant compte de la seconde des équations (8), on a:

$$(10) \qquad \int_l \left(\frac{\partial \overline{A}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \overline{A}(x, y)}{\partial y}\right)\varphi'(y)dy = 0.$$

Cette équation est satisfaite quelle que soit la fonction φ si l'on prend

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = 0,$$

d'où

$$A(x, y) = \Phi(y - x),$$

où Φ est une fonction arbitraire.

16. Revenons maintenant à la question générale que nous avons posée au § 8, c'est à dire à la détermination de la fonction réciproque d'une fonction quelconque $A(x, y)$. Je remarque que ce problème, et par suite celui de l'inversion d'une intégrale définie de la forme (1), sera formellement résolu si l'on pourra déterminer une fonction $B(y, t)$ telle que le produit AB conserve la dérivation. En effet, il suffira alors de déterminer la fonction $C(x, y)$, réciproque de la fonction caractéristique de l'opération AB, ce qui est possible d'après le § 14; on aura donc

$$ABC(\varphi) = \varphi,$$

et puisque les opérations (3) obéissent à la loi associative, on aura,

$$BC = \mathbf{A}.$$

Notre problème est donc ramené à la recherche de la fonction $B(y, t)$. S'il est possible, il admettra en général une infinité de solutions.

17. Posons à cet effet:

$$E(x, y) = \int_l A(x, y) B(y, t)\, dy;$$

il suffira que la fonction $E(x, t)$ satisfasse à l'équation aux limites (9) et à l'équation

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t} = \int_l \left(\frac{\partial A}{\partial x} B + A \frac{\partial B}{\partial t}\right) dy = 0. \tag{11}$$

Or, si nous indiquons, comme au § 7, les fonctions dont l'intégrale est nulle le long de la ligne d'intégration par $\omega_i(y)$, l'équation précédente équivaut à

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} B(y, t) + \frac{\partial B(y, t)}{\partial t} A(x, y) = \Sigma \lambda_i(x, t)\, \omega_i(y)$$

où les λ_i sont des fonctions arbitraires. On résout facilement cette équation linéaire du premier ordre en B; mais l'intégrale dépend de x, y et t, tandis que B ne doit contenir que y et t. On devra donc déterminer les fonctions arbitraires λ_i et la fonction arbitraire amenée par l'intégration, en sorte que l'on ait $\frac{\partial B}{\partial x} = 0$ et que l'équation aux limites soit satisfaite. Si cela est possible, le problème est résolu.

Comme on l'a déjà remarqué *à priori,* lorsque le problème est possible, B contiendra encore des fonctions arbitraires même après qu'on aura satisfait aux conditions ci-dessus. En effet, lorsqu'on a trouvé une fonction B, on peut en déduire une infinité d'autres. Une détermination spéciale des fonctions arbitraires nous donnera (§ 14) la fonction réciproque de $A(x, y)$.

18. Le procédé que je viens d'indiquer pour résoudre le problème de l'inversion des intégrales définies, est assez long dans la pratique; toutefois il peut être simplifié selon les formes particulières des fonctions caractéristiques et des lignes d'intégration.

Voici quelques remarques qui peuvent servir à l'abréger dans certains cas particuliers:

a. Si une opération A peut s'écrire sous forme de *produit* de deux autres opérations:

$$A = MN,$$

et que l'opération M conserve la dérivation, il suffira que NB conserve la dérivation pour qu'il en soit de même de AB. Cette remarque pourra, dans certains cas, simplifier la recherche de la fonction B.

b. Si la fonction $A(x, y)$ est de la forme $M(x, y)\varphi(y)$ et admet pour fonction réciproque $B(y, t)$, la fonction $M(x, y)$ aura pour fonction réciproque $\frac{B(y, t)}{\varphi(y)}$.

c. Si la fonction $A(x, y)$ admet pour fonction réciproque $B(y, t)$, la fonction $\frac{\partial A(x, y)}{\partial y}$ admet pour fonction réciproque $\int^y B(y, t)dy$, sous la condition que l'équation aux limites soit satisfaite; on trouve un résultat analogue pour les dérivées partielles d'ordre supérieur par rapport à y de la fonction $A(x, y)$.

19. Pour le moment, je me bornerai à examiner un seul cas particulier du problème précédent: celui où les fonctions A et B vérifient l'équation

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} B(y, t) + \frac{\partial B(y, t)}{\partial t} A(x, y) = 0. \tag{12}$$

Si de telles fonctions existent, l'équation (11) sera satisfaite, quelle que soit la ligne d'intégration. Or l'équation (12) peut s'écrire:

$$\frac{\frac{\partial A(x, y)}{\partial x}}{A(x, y)} = -\frac{\frac{\partial B(y, t)}{\partial t}}{B(y, t)};$$

mais ici le second membre ne contient pas x; il faudra donc qu'il en soit de même du premier, qui devra par conséquent être une fonction de y seulement. On aura donc:

$$\frac{\partial}{\partial x} \log A(x, y) = f(y),$$

d'où, en indiquant par $\chi(y)$ une fonction arbitraire:

$$A(x, y) = \chi(y) e^{xf(y)}. \tag{13}$$

Il en résulte

$$\frac{\partial}{\partial t} \log B(y, t) = -f(y)$$

et par conséquent

$$B(y, t) = \tau(y) e^{-tf(y)}, \tag{14}$$

où $\tau(y)$ est encore une fonction arbitraire. Comme on l'a vu plus haut (§ 17), pour une détermination spéciale de cette fonction $\tau(y)$, on obtiendra la fonction $\mathbf{A}(y, t)$ réciproque de $A(x, y)$. Cette détermination dépendra de $f(y)$, de $\chi(y)$ et des lignes d'intégration.

20. La transformation de Laplace, celle d'Abel, la transformation analogue

$$\int e^{\frac{x}{y}} \varphi(y) \frac{dy}{y}$$

où l'intégration est étendue à un contour fermé et qui est si utile pour

la génération de fonctions trascendantes entières,[1] ne sont que des cas particuliers de la transformation dont la fonction caractéristique a la forme (13). Ces opérations fonctionnelles s'appliquent, comme on sait,[2] soit à la transformation de certaines équations différentielles en d'autres, soit à la transformation de certaines classes d'équations différentielles linéaires en équations linéaires aux différences finies.

On trouve dans les oeuvres de RIEMANN (p. 140) la solution du problème d'inversion d'une intégrale définie, dont la fonction caractéristique présente un cas particulier de la forme (13). RIEMANN, sous la condition que l'équation aux limites soit vérifiée, obtient en effet, l'expression réciproque de

$$f(x) = \int y^{-x}\varphi(y)\frac{dy}{y},$$

sous la forme

$$\varphi(y) = \int y^t f(t)\,dt,$$

ce qui peut parfaitement se déduire des formules précédentes.

II.

21. J'ai montré aux §§ 1 et 2 que l'expression

$$A(\varphi) = \int_l A(x, y)\varphi(y)\,dy \tag{1}$$

représente, dans tout champ connexe qui n'a aucun point commun avec les coupures correspondant à la ligne l, une fonction ou branche de fonction analytique monogène. J'ai considéré l'expression $A(\varphi)$ comme

---

[1] V. mon mémoire déjà cité. (Mem. dell' Accad. di Bologna, S. IV, T. VII, §§ 24 et suiv.)

[2] Pour les applications récentes de ces transformations, v. surtout les mémoires, déjà cités, de M. POINCARÉ; et encore HJ. MELLIN, *Zur Theorie der Gammafunction*, § 12 (Acta Mathematica, T. 8), et *Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen* (Ibid. T. 9), ainsi que ma note insérée aux Rendiconti del R. Istituto Lombardo, juin 1886.

une opération appliquée au *sujet* φ, et j'ai indiqué une méthode pour la résolution, au moins formelle, de l'équation

$$A(\varphi) = \psi,$$

où φ est une fonction inconnue: ce qui revient à la recherche de l'opération $\mathbf{A}$ réciproque de A, telle que

$$\varphi = \mathbf{A}(\psi).$$

Je me propose maintenant de donner les propriétés, non plus seulement formelles, mais effectives de l'opération A; je serai toutefois forcé de me borner, pour le moment, au cas où la ligne d'intégration est fermée, et plus particulièrement au cas où elle se réduit à une circonférence quelconque du plan y. Pour abréger, j'indiquerai par (α, ρ) une circonférence de centre $y = \alpha$ et de rayon ρ.

La fonction caractéristique $A(x, y)$ sera aussi soumise à quelques restrictions. Je supposerai que les points singuliers de cette fonction soient les couples de valeurs qui vérifient l'équation algébrique de degré m

$$f(x, y) = 0; \tag{2}$$

je supposerai encore que $A(x, y)$ soit une fonction uniforme, et soit nulle du 1er ordre pour $y = \infty$, sauf pour un nombre fini de valeurs de x; mais ces deux dernières restrictions seraient faciles à lever par des méthodes connues.

22. Examinons d'abord de plus près les coupures correspondant à la circonférence (α, ρ).[1] Pour chaque point $\bar{x}$ du plan x, l'équation (2) donne m valeurs pour $y - \alpha$; nous pourrons figurer les modules de ces valeurs par des ordonnées élevées au point $\bar{x}$ perpendiculairement au plan x. Le lieu des extrémités de ces ordonnées sera une surface S_α, formée en général de plusieurs nappes; ces nappes peuvent, en certains cas, se recouvrir en tout ou en partie, ou se rencontrer suivant des lignes ou en des points singuliers de la surface.

Si l'on coupe la surface S_α par un plan w parallèle au plan des x et à la distance ρ, la section se projette en vraie grandeur sur le plan

---

[1] Cfr. mon mémoire *Studi sopra alcune operazioni funzionali*, § 33. Mem. della R. Accad. delle Scienze di Bologna, S. IV, T. VII, 1886.

x en une courbe C_ρ, lieu des points pour lesquels au moins une des solutions de l'équation (2) vérifie la condition

$$|y - \alpha| = \rho.$$

Or, les ordonnées élevées au plan x jusqu'à la rencontre du plan sécant w pourront, pour certaines régions du plan x, ne rencontrer aucun point de la surface S_α; pour d'autres régions, elles rencontreront une, deux, ..., m nappes de la surface; et ces diverses régions du plan x, connexes ou non, seront séparées l'une de l'autre par des branches de la courbe C_ρ. J'indiquerai par

$$E_i(\alpha, \rho), \qquad {\scriptstyle (i=0,1,2,\dots,m)}$$

la région du plan x telle que l'ordonnée élevée en l'un de ses points jusqu'à la rencontre du plan w rencontre i nappes (distinctes ou coïncidentes) de la surface S_α; en sorte que pour tout point de $E_i(\alpha, \rho)$, i racines de l'équation (2) vérifient l'inégalité

$$|y - \alpha| < \rho.$$

23. Je vais maintenant étudier plus en détail l'opération $A(\varphi)$, en commençant par le cas où la variable x est prise à l'intérieur du champ que je viens d'indiquer par $E_m(\alpha, \rho)$. Pour de telles valeurs de x, toutes les singularités de $A(x, y)$ sont, par définition, à l'intérieur du cercle (α, ρ); on peut donc écrire, pour x intérieur à $E_m(\alpha, \rho)$ et pour $|y| \geqq \rho$:

$$A(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x)}{(y - \alpha)^{n+1}}. \tag{3}$$

Soit maintenant $\varphi(y)$ une fonction analytique uniforme quelconque, mais qui n'a aucune singularité le long de la circonférence (α, ρ): on aura dans la couronne circulaire comprise entre les circonférences $(\alpha, \rho - \varepsilon)$ et $(\alpha, \rho + \varepsilon)$, où ε est une quantité positive suffisamment petite:

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (y - \alpha)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c'_n}{(y - \alpha)^{n+1}}.$$

Pour abréger, j'indiquerai les deux séries du second membre respectivement par [1]

$$i_\rho \varphi \quad \text{et} \quad j_\rho \varphi.$$

[1] Cfr. mon mémoire cité, § 2 et passim.

La première est convergente dans tout le cercle $(\alpha, \rho + \varepsilon)$; la seconde l'est en dehors du cercle $(\alpha, \rho - \varepsilon)$.

Or, on vérifie immédiatement que

$$(4) \qquad A(j_\rho \varphi) = 0, \qquad A(i_\rho \varphi) = A(\varphi)$$

et que

$$(5) \qquad A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A_n(x).$$

On voit donc que pour les valeurs de x prises à l'intérieur de $E_m(\alpha, \rho)$, il suffit d'appliquer l'opération A aux séries de puissances convergentes dans un cercle $(\alpha, \rho + \varepsilon)$. L'opération A fait correspondre à ces séries, des séries de fonctions $A_n(x)$ ayant les mêmes coefficients, convergentes uniformément au moins dans le champ $E_m(\alpha, \rho)$, et qui représentent dans ce champ la même fonction que l'intégrale (1).

24. Examinons les cas les plus remarquables auxquels peut donner lieu l'opération A appliquée à une fonction $\varphi(y)$ régulière dans le cercle (α, ρ), la circonférence comprise.

a. Supposons que la fonction $\varphi(y)$ ait un seul point singulier β, situé en dehors de (α, ρ). On a alors, en négligeant une constante additive:

$$\varphi(y) = \sum \frac{a_n}{(y-\beta)^{n+1}};$$

mais puisque $A(x, y)$ est régulière en dehors de (α, ρ), on a par le théorème de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\rho \frac{A(x, y)}{(y-\beta)^{n+1}}\,dy = -\frac{1}{\lfloor n}\,\frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial \beta^n}.$$

On a donc

$$(6) \qquad A(\varphi) = -2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lfloor n}\,\frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial \beta^n}.$$

Ce développement est convergent dans tout le champ $E_m(\alpha, \rho)$ et y coïncide avec le développement (5); mais il converge aussi en dehors de ce champ. En effet, pour une valeur quelconque $\bar{x}$ de x on a:

$$A(\bar{x}, y) = \sum_0^{\infty} \frac{(y-\beta)^n}{\lfloor n}\,\frac{\partial^n A(\bar{x}, \beta)}{\partial \beta^n};$$

la série du second membre converge dans un cercle de centre β et de rayon égal à la plus petite distance $\partial(\bar{x})$ du point β aux points singuliers de $A(\bar{x}, y)$. On aura donc, en indiquant (cfr. FROBENIUS, Journal de CRELLE, T. 73) par la notation $a_n \sim b_n$ que les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont le même cercle de convergence,

$$\frac{1}{\underline{|n}} \frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial \beta^n} \sim \frac{1}{\partial(x)^n},$$

et $\partial(x)$ ne devient nul qu'aux m points x qui vérifient l'équation

$$f(x, \beta) = 0.$$

Par conséquent, si l'on excepte ces points en nombre fini, la série

$$\sum \frac{a_n}{\underline{|n}} \frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial \beta^n}$$

converge partout uniformément. Elle représente par conséquent une fonction uniforme ayant un nombre fini de points singuliers.

b. Supposons que $\varphi(y)$ ait un nombre fini de points singuliers $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$. Cette fonction pourra s'écrire

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,n}}{(y - \beta_\nu)^{n+1}},$$

d'où l'on tire comme précédemment, par le théorème de CAUCHY:

$$(7) \qquad A(\varphi) = -2\pi i \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,n}}{\underline{|n}} \frac{\partial^n A(x, \beta_\nu)}{\partial \beta_\nu^n}.$$

Le même raisonnement appliqué ci-dessus sert à démontrer que cette expression coïncide avec la série (5) dans le champ $E_m(\alpha, \beta)$ et représente d'ailleurs une fonction uniforme régulière dans tout le plan, sauf aux points en nombre fini qui vérifient l'une des équations

$$f(x, \beta_\nu) = 0. \qquad {\scriptstyle (\nu=1, 2, \ldots, p)}$$

Cette fonction est donc dans tout le plan, (sauf les dits points) la continuation analytique de la fonction représentée dans $E_m(\alpha, \beta)$ par la série (5) ou l'intégrale (1).

c. Supposons enfin que la fonction $\varphi(y)$ soit singulière en une infinité de points donnés

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots$$

de telle façon que la différence

$$\varphi(y) - G_\nu\left(\frac{1}{y - \beta_\nu}\right),$$

où $G_\nu(z)$ est une fonction donnée, se comporte régulièrement au point β_ν. Le groupe (β_ν) pourrait avoir des groupes limites de n'importe quelle sorte; je me bornerai toutefois au cas le plus simple, où il n'y a qu'un point limite b. [1] Dans ce cas, on peut procéder comme il suit:

Développons $G_\nu\left(\frac{1}{y-\beta_\nu}\right)$ en série convergente en dehors du cercle $(b, |b - \beta_\nu|)$:

$$G_\nu\left(\frac{1}{y - \beta_\nu}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{\nu, n}}{(y - b)^{n+1}};$$

et posons

$$F_\nu(y) = \sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{h_{\nu, n}}{(y - b)^{n+1}};$$

la fonction représentée par cette série étant régulière dans tout le plan, sauf aux points β_ν et b. D'après les démonstrations connues des théorèmes de M. Mittag-Leffler, on sait qu'on peut déterminer les nombres m_ν de telle sorte que l'on ait

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(y) + \overline{G}\left(\frac{1}{y - \beta}\right);$$

ou encore, en distribuant les termes de la série additive $\overline{G}$ dans les fonctions $F_\nu(y)$, que l'on pourra indiquer par $\overline{F}_\nu(y)$ après ce changement, on aura

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{F}_\nu(y), \tag{8}$$

---

[1] Les cas plus généraux peuvent se traiter sans difficulté d'après celui-ci, et en se servant des méthodes employées par M. Mittag-Leffler dans la démonstration des théorèmes de son grand mémoire: *Sur la représentation des fonctions uniformes.* (Acta Mathematica, T. 4.)

et en dehors du cercle $(b, |b - \beta_\nu|)$, $\overline{F}_\nu(y)$ aura un développement de la forme

$$\sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{k_{\nu,n}}{(y-b)^{n+1}}.$$

Or, si l'on fait abstraction des premiers termes de la série (8), les cercles $(b, |b - \beta_\nu|)$ seront assez petits pour être extérieurs au cercle (α, ρ); par conséquent, sur la circonférence de ce cercle la série (8) convergera uniformément, et l'on aura en ce cas pour $A(\varphi)$ l'expression:

$$A(\varphi) = -2\pi i \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{k_{\nu,n}}{\lfloor n} \frac{\partial^n A(x, b)}{\partial b^n}. \tag{9}$$

Je dis maintenant que cette expression, qui coïncide avec $A(\varphi)$ dans le champ $E_m(\alpha, \rho)$, représente dans tout le plan x une même fonction analytique monogène, régulière partout, sauf aux points x racines des équations

$$f(x, b) = 0, \qquad f(x, \beta_\nu) = 0. \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,3,\ldots,\infty)}$$

Démonstration. Prenons un point $x = \xi$ quelconque, qui ne soit racine d'aucune des équations ci-dessus, et supposons que λ indique la plus petite distance de b aux points racines de $f(\xi, y) = 0$. Je pose

$$\delta_\nu = |b - \beta_\nu|, \qquad \lim_{\nu=\infty} \delta_\nu = 0;$$

je pourrai donc toujours déterminer μ assez grand pour que l'on ait, pour $\nu \geqq \mu$:

$$\delta_\nu < \lambda.$$

Or, d'après le procédé de démonstration du théorème de M. Mittag-Leffler, les nombres m_ν sont tellement choisis que l'on ait

$$\sum_{m_\nu}^{\infty} \left| \frac{k_{\nu,n}}{(y-b)^{n+1}} \right| < \varepsilon_\nu,$$

où ε_ν est une quantité positive donnée. Mais cette série converge en dehors

du cercle (b, δ_ν); on en déduit donc par un théorème connu sur les séries de puissances

$$|k_{\nu,n}| < \delta'_\nu \varepsilon_\nu,$$

où δ'_ν est une quantité supérieure à δ_ν d'aussi peu que l'on voudra.

D'un autre côté, la série

$$A(\xi, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-b)^n}{|\underline{n}} \frac{\partial^n A(\xi, b)}{\partial b^n}$$

converge évidemment dans le cercle (b, λ); on aura donc par le même théorème sur les séries:

$$\frac{1}{|\underline{n}} \left| \frac{\partial^n A(\xi, b)}{\partial b^n} \right| < \frac{M}{\lambda'^n},$$

où M est un nombre positif et λ' une quantité positive moindre que λ d'aussi peu que l'on voudra.

Si donc je considère la série:

$$A(\overline{F}_\nu) = \sum_{m_\nu}^{\infty} \frac{k_{\nu,n}}{|\underline{n}} \frac{\partial^n A(\xi, b)}{\partial b^n},$$

j'aurai:

$$|A(\overline{F}_\nu)| < M \sum_{m_\nu}^{\infty} \frac{\delta'^n_\nu \varepsilon_\nu}{\lambda'^n};$$

mais puisque l'on a $\delta_\nu < \lambda$, on peut supposer aussi $\delta'_\nu < \lambda'$ et par conséquent:

$$|A(\overline{F}_\nu)| < M\varepsilon_\nu \left(\frac{\delta'_\nu}{\lambda'}\right)^{m_\nu} \frac{1}{1 - \frac{\delta'_\nu}{\lambda'}},$$

et puisque les quantités δ'_ν décroissent quand ν croît, on aura en indiquant par M' une quantité positive:

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} |A(\overline{F}_\nu)| < M' \sum_{\mu}^{\infty} \varepsilon_\nu.$$

Il suit de là que la série

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} \sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{k_{\nu,n}}{|\underline{n}} \frac{\partial^n A(x, b)}{\partial b^n}$$

est convergente absolument et uniformément pour toutes les valeurs de x telle que la quantité λ soit $> \delta_\nu$ pour $\nu \geqq \mu$. Elle représente donc pour ces valeurs une fonction analytique régulière. La somme complémentaire

$$\sum_{\nu=0}^{\mu-1} A\left[\overline{F}_\nu(y)\right]$$

rentre dans le cas b précédent, et représente une fonction analytique régulière partout, sauf aux points tels que

$$f(x, \beta_\nu) = 0; \qquad (\nu=1, 2, \dots, \mu-1)$$

le théorème se trouve donc démontré.

25. En même temps que le champ $E_m(\alpha, \rho)$, on peut considérer le champ $E_m(\alpha_1, \rho_1)$ et il pourra se faire que ces deux champs aient une partie commune. Par exemple, si le cercle (α_1, ρ_1) est intérieur au cercle (α, ρ), le champ $E_m(\alpha_1, \rho_1)$ sera nécessairement compris dans le champ $E_m(\alpha, \rho)$.

Or, soient deux champs $E_m(\alpha, \rho)$, $E_m(\alpha_1, \rho_1)$ qui aient une partie commune; les deux cercles auront aussi une partie commune dans laquelle on pourra décrire un cercle intérieur (α_2, ρ_2); et le champ $E_m(\alpha_2, \rho_2)$ sera intérieur à $E_m(\alpha, \rho)$ et $E_m(\alpha_1, \rho_1)$. D'après le théorème de Cauchy, si $\varphi(y)$ est une fonction uniforme régulière dans les cercles (α, ρ) et (α_1, ρ_1), on aura pour un point x pris à l'intérieur de $E_m(\alpha_2, \rho_2)$:

$$A_\rho(\varphi) = A_{\rho_1}(\varphi) = A_{\rho_2}(\varphi).$$

Par conséquent, on aura aussi en indiquant par $A_n^{(1)}(x)$, $A_n^{(2)}(x)$ les fonctions analogues au système $A_n(x)$ dans les nouveaux champs considérés:

$$\sum c_n A_n(x) = \sum c_n^{(1)} A_n^{(1)}(x) = \sum c_n^{(2)} A_n^{(2)}(x).$$

Ces formules nous donnent, pour les développements (5), un concept tout à fait analogue à celui de la *continuation analytique* pour les séries de puissances; ainsi la série $\sum c_n^{(2)} A_n^{(2)}(x)$ peut être regardée comme la continuation analytique de la série $\sum c_n A_n(x)$, la série $\sum c_n^{(1)} A_n^{(1)}(x)$ comme la continuation de la série $\sum c_n^{(2)} A_n^{(2)}(x)$ et ainsi de suite. Notons encore

que les coefficients c_n, $c_n^{(1)}$, $c_n^{(2)}$, ... sont précisément ceux des continuations analytiques correspondantes de la série

$$(10) \qquad \varphi(y) = \Sigma c_n (y - \alpha)^n.$$

26. On pourrait ajouter ici plusieurs remarques sur les développements (5); je me bornerai aux suivantes:

a. Etant donnée la série de puissances $\varphi(y)$ de la forme (10), on aura

$$A(\varphi) = c_0 A_0(x) + c_1 A_1(x) + c_2 A_2(x) + \dots,$$

$$A\left(\frac{\varphi}{y-\alpha}\right) = c_1 A_0(x) + c_2 A_1(x) + c_3 A_2(x) + \dots.$$

d'où

$$(11) \qquad A\left\{\varphi(y)\left(h_0 + \frac{h_1}{y-\alpha} + \dots + \frac{h_p}{(y-\alpha)^p}\right)\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 c_n + \lambda_1 c_{n+1} + \dots + \lambda_p c_{n+p}) A_n(x).$$

De cette formule et du § 24, b, on déduit sans difficulté le théorème suivant:[1]

»De même qu'une fonction rationnelle est représentée par une série récurrente de puissances, de même une fonction de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{p} \left(k_{\nu,0} A(x, \alpha_\nu) + k_{\nu,1} \frac{\partial A(x, \alpha_\nu)}{\partial \alpha_\nu} + \dots + k_{\nu, r_\nu} \frac{\partial^{r_\nu} A(x, \alpha_\nu)}{\partial \alpha_\nu^{r_\nu}}\right)$$

est représentée par une série récurrente de fonctions $A_n(x)$.»

La réciproque de ce théorème n'est vraie que dans le cas où l'on sait qu'avec les fonctions $A_n(x)$ on ne peut former des développements de zéro (*Nullentwickelungen*).

b. La formule (11) peut s'étendre au cas où le multiplicateur de $\varphi(y)$ devient une série de puissances. Dans ce cas, on aura

$$A\left\{\varphi(y) \sum \frac{h_\mu}{(y-\alpha)^\mu}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \lambda_\mu c_{n+\mu} A_n(x).$$

[1] V. dans mon mémoire déjà cité, §§ 24—29, plusieurs applications de ce théorème, notamment la transformation des fonctions rationnelles en intégrales des équations différentielles ou aux différences linéaires et à coefficients constants.

Sous les conditions de convergence, qui sont satisfaites si $\varphi(y)$ et

$$\sum \frac{h_\mu}{(y-a)^\mu}$$

ont une circonférence commune de convergence, le second membre peut s'écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (h_0 A_n + h_1 A_{n-1} + \ldots + h_n A_0).$$

En posant

$$h_n(A) = h_0 A_n + h_1 A_{n-1} + \ldots + h_n A_0, \tag{12}$$

on trouve aisément que ces polynômes généraux $h_n(A)$ jouissent de propriétés distributives analogues à celles des polynômes de M. Appell.

c. Si l'on particularise la fonction caractéristique $A(x, y)$, l'opération A pourra servir, non seulement à la transformation des fonctions φ, mais encore à la transformation des équations fonctionnelles auxquelles elles satisfont. Cette transformation s'opère au moyen de la relation (11) et des égalités

$$A\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \sum n c_n A_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} A(\varphi) = \sum c_n \frac{dA_n(x)}{dx}.$$

Je me propose de revenir sur l'étude de cette transformation d'équations fonctionnelles (équations différentielles, aux différences, etc.) notamment pour le cas où la fonction caractéristique est l'intégrale d'une équation linéaire aux dérivées partielles. Pour le moment, je me bornerai à citer les transformations des équations différentielles linéaires en équations différentielles ou aux différences finies linéaires, données par les opérations considerées aux §§ 19—20, et en particulier par la transformation de Laplace. Rappelons aussi les transformations d'équations linéaires données par M. Appell aux §§ 14—16 de son mémoire déjà cité: *Sur une classe de polynômes.*

---

27. Nous avons considéré jusqu'ici le cas où la variable x est prise à l'intérieur du champ $E_m(\alpha, \rho)$. Supposons maintenant qu'elle soit prise

à l'intérieur du champ $E_0(\alpha, \rho)$. Pour de telles valeurs de x, aucune singularité de $A(x, y)$ ne se trouve à l'intérieur du cercle (α, ρ); on peut donc écrire, pour x à l'intérieur de $E_0(\alpha, \rho)$ et pour $|y| \leq \rho$:

$$A(x, y) = \sum_0^\infty \frac{1}{\underline{|n}} \frac{\partial^n A(x, \alpha)}{\partial \alpha^n} (y - \alpha)^n.$$

Soit maintenant $\varphi(y)$ une fonction analytique uniforme, pour laquelle je conserve les mêmes hypothèses et notations qu'au § 23; on aura:

$$A(i_\rho \varphi) = 0, \qquad A(\varphi) = A(j_\rho \varphi) \tag{13}$$

et

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n'}{\underline{|n}} \frac{\partial^n A(x, \alpha)}{\partial \alpha^n}. \tag{14}$$

Ce développement se continue analytiquement dans les champs $E_0(\alpha_1, \rho_1)$, $E_0(\alpha_2, \rho_2)$, ... dont chacun a une partie commune avec le précédent, au moyen des développements

$$\sum \frac{c_n^{(1)}}{\underline{|n}} \frac{\partial^n A(x, \alpha_1)}{\partial \alpha_1^n}, \qquad \sum \frac{c_n^{(2)}}{\underline{|n}} \frac{\partial^n A(x, \alpha_2)}{\partial \alpha_2^n}, \quad \ldots.$$

Je n'insiste pas sur des remarques analogues à celles que l'on a faites pour le cas précédent, et qu'il serait facile de répéter ici.

28. Enfin, on peut considérer le cas où l'on prend x dans une des aires

$$E_1(\alpha, \rho), \qquad E_2(\alpha, \rho), \quad \ldots, \quad E_{m-1}(\alpha, \rho).$$

Les fonctions analytiques représentées par $A(\varphi)$ dans ces divers champs se déduisent de celles qu'on vient d'étudier, par l'application du théorème de M. Hermite;[1] je ne reviens pas ici sur cette application que j'ai déjà donnée,[2] non plus que sur les conséquences qu'on en déduit.

---

[1] Voir le mémoire: *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* (Acta Soc. Scient. Fennicæ, T. 12, 1881.)

[2] V. mon mémoire déjà cité, § 34, et ma note *Sur une formule dans la théorie des fonctions* (Öfversigt af Svenska Vetensk. Akad. Förhandl. 1886, p. 51—55).

29. Nous avons appris, aux §§ 16 et 17, à déterminer formellement la fonction $\mathbf{A}(y, t)$ que nous avons appelée *réciproque* de $A(x, y)$.

Supposons à présent que cette fonction ait une existence effective, et que les singularités de cette fonction soient les couples de valeurs qui vérifient une équation de degré m':

$$\mathfrak{F}(y, t) = 0.$$

J'indiquerai par $\mathbf{E}_h(\alpha, \rho)$ la région du plan t où h singularités de $\mathbf{A}(y, t)$ tombent à l'intérieur du cercle (α, ρ). Supposons enfin que la ligne d'intégration l' de l'opération réciproque soit dans le champ $\mathbf{E}_0(\alpha, \rho)$.

Cela posé, proposons-nous le problème suivant. Etant donnée une fonction $\psi(x)$ dans le champ $E_m(\alpha, \rho)$, on demande de la développer en série de fonctions $A_n(x)$:

$$\psi(x) = \sum c_n A_n(x), \tag{15}$$

problème qui revient à la détermination du système de coefficients c_n.

A cet effet, formons

$$\int_{l'} \mathbf{A}(y, t)\psi(t)dt = \varphi(y);$$

puisque la ligne l' est contenue dans le champ $\mathbf{E}_0(\alpha, \rho)$, on aura le long de cette ligne:

$$\mathbf{A}(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-\alpha)^n}{\underline{|n}} \frac{\partial^n \mathbf{A}(\alpha, t)}{\partial \alpha^n},$$

d'où

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (y-\alpha)^n$$

avec

$$c_n = \frac{1}{\underline{|n}} \int_{l'} \frac{\partial^n \mathbf{A}(\alpha, t)}{\partial \alpha^n} \psi(t)dt. \tag{16}$$

Cette formule (lorsque elle a un sens) nous détermine les coefficients du développement cherché (15). Ce développement pourra n'être pas unique, parce que la ligne l' elle-même pourra admettre plusieurs déter-

minations, et alors on pourra former avec les fonctions $A_n(x)$ des développements de zéro.[1]

30. En certains cas, le problème précédent se simplifie beaucoup. Si, par exemple, la fonction $\psi(x)$ est déjà connue sous la forme

$$\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,n}}{\lfloor n} \frac{\partial^n A(x, a_\nu)}{\partial a_\nu^n}, \qquad |\alpha_\nu - \alpha| > \rho',$$

les coefficients c_n s'obtiennent sans recourir à la fonction réciproque: ils ne sont en effet que les coefficients du développement de la fonction

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,n}}{(y - a_\nu)^{n+1}}$$

en série de puissances entières et positives de $y - \alpha$.

En particulier, si la fonction $\psi(x)$ est de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{r_\nu} \frac{a_{\nu,n}}{\lfloor n} \frac{\partial^n A(x, a_\nu)}{\partial a_\nu^n},$$

elle est développable en une série de fonctions $A_n(x)$ à coefficients récurrents.

31. Supposons que nous ayons obtenu le développement d'une fonction $\psi(x)$ en série $A_n(x)$, et cherchons le développement de la même fonction en série de polynômes $h_n(A)$. (V. § 26 b); en faisant désormais $\alpha = 0$ pour simplifier l'écriture.

Soit donc

$$A(\varphi) = \psi(x), \qquad \varphi(y) = \Sigma c_n y^n, \qquad \psi(x) = \Sigma c_n A_n(x);$$

on aura à résoudre l'équation fonctionnelle en φ_1:

$$A(\varphi_1 \chi) = \psi(x), \tag{17}$$

où l'on a posé

$$\chi(y) = \sum \frac{h_\mu}{y^\mu};$$

[1] Sur ces développements, v. pour un cas particulier remarquable: FROBENIUS, *Über die Entwickelungen,* etc. (Journal de CRELLE, T. 73.) V. aussi mon second mémoire *Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie* etc. (Annali di Matematica, S. II, T. XII, p. 127.)

c'est-à-dire que l'on demande le système de coefficients c'_n tel que:

$$\varphi_1(y) = \Sigma c'_n y^n, \quad \text{d'où} \quad \psi(x) = \Sigma c'_n h_n(A).$$

Or, cette équation (17) se résout sans difficulté, par suite de la remarque du § 26, en prenant

$$\varphi_1(y) = i_\rho \frac{\varphi(y)}{\chi(y)},$$

ce qui signifie que l'on développe le quotient $\frac{\varphi}{\chi}$ en série de LAURENT dans une couronne qui comprenne la circonférence ρ; et que l'on prend la partie de cette série qui contient les puissances positives de y.

32. L'on peut encore se proposer la solution de l'équation fonctionnelle en φ_1

$$A(\varphi_1\chi) = 0. \tag{18}$$

Il suffira pour cela que la fonction $\varphi_1\chi$ soit développable sur la circonférence $(0, \rho)$ et en dehors, en une série de puissances négatives de y, $(i\varphi_1\chi = 0)$. D'où il résulte, puisque φ_1 doit être régulière dans tout le cercle $(0, \rho)$, circonférence comprise, que φ_1 doit se réduire à une fonction rationnelle, diviseur de χ. Cette fonction φ_1 nous donne donc les coefficients (récurrents) d'un développement de zéro en série de polynômes $h_n(A)$.

---

33. Comme application de ce qui précède, supposons que la fonction caractéristique soit de la forme $A(y-x)$, où $A(z) = \sum \frac{a_n}{z^{n+1}}$ est une fonction uniforme dont toutes les singularités (qu'il n'est pas nécessaire, pour le moment, de spécifier davantage) sont à l'intérieur du cercle $(0, R)$. Le champ du plan x, pour lequel les singularités de $A(y-x)$ sont toutes à l'intérieur du cercle $(0, \rho > R)$, est l'intérieur du cercle $(0, \rho - R)$.

Pour tout point α du cercle $(0, \rho - R)$, la fonction $A(y-\alpha)$ admet le développement en série:

$$A(y-x) = \sum \frac{A_n(x)}{y^{n+1}}$$

convergente pour toutes les valeurs de $|y| > \rho$. Les fonctions $A_n(x)$ forment un système de polynômes de M. Appell; en effet, on a, en indiquant les dérivées par des accents:

$$A'(y-x) = \sum \frac{A'_n(x)}{y^{n+1}} = \sum \frac{(n+1)A_n(x)}{y^{n+2}},$$

d'où

$$A'_n(x) = nA_{n-1}(x),$$

qui est la relation caractéristique de ces polynômes.

34. Si $\varphi(y)$ est une fonction analytique uniforme qui n'a aucune singularité le long de la circonférence $(0, \rho)$, et en conservant les notations du § 23, on aura:

$$A(\varphi) = A(i\varphi) = \Sigma c_n A_n(x).$$

C'est là le développement que M. Appell indique par $\varphi(A)$. Ce développement converge dans le cercle $(0, \rho - R)$, si $i\varphi$ converge dans le cercle ρ.[1]

On pourra sans difficulté répéter pour ce cas particulier les considérations faites au § 24, au sujet des divers cas auxquels pourra donner lieu la fonction $\varphi(y)$.

35. Etant donnée une fonction $\psi(x)$, on demande de la développer en série de polynômes $A_n(x)$. Les coefficients du développement seront donnés par la formule (16), où $\mathbf{A}(y, t)$ est la fonction réciproque de $A(x, y)$. Mais pour déterminer cette fonction, il suffit de la prendre sous la forme

$$\mathbf{A}(y-t) = \sum \frac{\alpha_n}{(y-t)^{n+1}}$$

de telle sorte que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} A(x-y)\mathbf{A}(y-t)\,dy = \frac{1}{t-x};$$

d'où l'on déduit aisément le système d'équations qui détermine les coefficients α_n:

$$(19)\qquad \begin{cases} \alpha_0 a_0 = 1, \\ \alpha_0 a_n + \binom{n}{1}\alpha_1 a_{n-1} + \binom{n}{2}\alpha_2 a_{n-2} + \dots + \alpha_n a_0 = 0. \end{cases}$$

[1] Cfr. ma note: *Alcune osservazioni sui polinomi del prof.* Appell. (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, S. IV, T. II.)

De ces relations il résulte

$$\sum \frac{\alpha_n}{\lfloor n} z^n = \frac{1}{\sum \frac{a_n}{\lfloor n} z^n}, \tag{19'}$$

ce qui prouve que les polynômes de M. Appell formés avec les coefficients α sont les *inverses*[1] de ceux formés avec les coefficients a.

Les équations (19) donnent la solution *formelle* du problème; ce sera une solution *effective* s'il existe une circonférence $(0, \rho)$ le long de laquelle les deux séries

$$A(x-y) = \sum \frac{A_n(x)}{y^{n+1}}, \qquad \mathbf{A}(y-t) = \sum \frac{y^n}{\lfloor n} \mathbf{A}^{(n)}(t)$$

convergent ensemble uniformément. Toutefois, la transformation de Laplace permet facilement de déduire la solution effective du problème de la solution formelle.

36. Nous trouvons ainsi, pour les coefficients de développement de $\psi(x)$ en série de $A_n(x)$, la formule

$$2\pi i c_n = \frac{1}{\lfloor n} \int_{(\rho)} \mathbf{A}^{(n)}(t) \psi(t) dt.$$

Supposons que la fonction $\mathbf{A}(t)$ soit, dans un cas particulier, de la forme:

$$\mathbf{A}(t) = \sum \frac{h_\nu}{t - \alpha_\nu}$$

où les points α_ν sont intérieurs au cercle ρ; d'ailleurs les formules (19) ou (19') permettent de trouver quelle sera, dans ce cas, la forme des polynômes $A_n(x)$. Il en résulte

$$\frac{\mathbf{A}^{(n)}(t)}{\lfloor n} = \sum \frac{h_\nu}{(t-\alpha_\nu)^{n+1}}$$

d'où, si le cercle de convergence de ψ est plus grand que ρ:

$$2\pi i c_n = h_1 \psi^{(n)}(\alpha_1) + h_2 \psi^{(n)}(\alpha_2) + \ldots + h_\nu \psi^{(n)}(\alpha_\nu) + \ldots.$$

[1] Appell, Mém. cité, § 3.

La fonction $\psi(x)$ satisfait donc, dans ces hypothèses, à l'équation

$$(20) \qquad \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [h_1 \psi^{(n)}(\alpha_1) + h_2 \psi^{(n)}(\alpha_2) + \dots] A_n(x).$$

C'est là une formule donnée par M. HALPHEN. (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1881, T. 93, p. 781.)

Une autre formule trouvée par le même auteur (ibid., p. 832) se déduit avec la même facilité. Nous venons d'apprendre à résoudre l'équation en $F(y)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int A(y-x) F(y) dy = f(x).$$

Or en mettant $x+t$, $y+t$ à la place de x, y, il vient:

$$f(x+t) = \frac{1}{2\pi i} \int A(y-x) F(y+t) dy;$$

et d'après les développements ci-dessus:

$$(21) \qquad f(x+t) = \sum A_n(x) \frac{F^{(n)}(t)}{\underline{|n}}.$$

C'est la seconde formule de M. HALPHEN, qu'on peut regarder comme une généralisation du théorème de TAYLOR. Il s'y manifeste une sorte de *dualité,* qu'il serait aisé de poursuivre, entre les systèmes de polynômes de M. APPELL et les systèmes de dérivées successives d'une même fonction.

ÜBER EINE GATTUNG TRANSCENDENTER RAUMCOORDINATEN

VON

OTTO STAUDE
in DORPAT.

Die bekannte Darstellung der geodätischen Linie auf den Flächen 2. Grades durch hyperelliptische Functionen zweier Veränderlicher und verschiedene ähnliche Anwendungen der genannten Functionen weisen auf eine Gattung transcendenter Raumcoordinaten hin, durch deren Einführung jene Anwendungen auf einen gemeinsamen Ausgangspunct zurückgeführt werden. Statt zur Darstellung einzelner Raumgebilde einen oder zwei Parameter durch die Integralsummen des JACOBI'schen Umkehrproblems zu definiren, kann man nämlich zuerst darauf ausgehen, alle Puncte des Raumes durch drei unabhängige Summen von je drei hyperelliptischen Integralen darzustellen und die geometrische Discussion entsprechender räumlicher Gebilde an den Gebrauch dieser transcendenten Coordinaten zu knüpfen. Im Folgenden sind als typische Formen drei verschiedene Darstellungen der Puncte des Raumes durch drei unabhängige Parameter der angedeuteten Art in Kürze zusammengestellt.

Dabei ist nicht sowohl auf die mannigfachen geometrischen Sätze Rücksicht genommen, welche als gemeinsame Folgerungen aus jeder einzelnen dieser Darstellungen sich ergeben, als vielmehr auf mechanische Bedeutungen der letzteren. An den herangezogenen einfachsten Beispielen mechanischer Vorgänge, deren analytische Behandlung auf hyperelliptische Functionen 1. oder 2. Ordnung führt, wird überdies auf eine charakteristische Unterscheidung der betreffenden Bewegungsvorgänge hinge-

Acta mathematica. 10. Imprimé le 15 Juin 1887.

wiesen. Bei der Anwendung der hyperelliptischen Functionen auf die Darstellung der Bewegungen kommt nämlich wesentlich in Frage, wie viele von den reellen Periodicitätsmoduln, respective Systemen zusammengehöriger Periodicitätsmoduln bei dem einzelnen Falle zur Geltung gelangen. Dieser Frage parallel geht die andere, ob die betreffende Bewegung eine unmittelbar periodische oder eine nur unter gewissen Bedingungen periodisch werdende ist. Eine darauf beruhende Gruppirung aller Bewegungsvorgänge[1] findet an den hier behandelten Darstellungen der Raumpuncte ihre einfachste Erläuterung.

§ 1. *Darstellung der Puncte des Raumes durch die Umkehrfunctionen hyperelliptischer Integrale 2. Gattung vom Geschlecht 2.*

Die gewöhnlichen Coordinaten x, y, z eines Punctes im Raume drücken sich durch die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν desselben in der bekannten Weise aus:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}}, \\ y &= \sqrt{\frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}}, \\ z &= \sqrt{\frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

wo α, β, γ die Constanten des elliptischen Coordinatensystems bedeuten und die Ungleichungen

$$-\infty < \lambda < \gamma < \mu < \beta < \nu < \alpha$$

bestehen.

---

[1] Vgl. *Über periodische und bedingt periodische Bewegungen*, Sitzungsberichte der Naturforschergesellschaft bei der Universität Dorpat, 1886; *Über bedingt periodische Bewegungen*, ebend., 1887.

Zwischen den elliptischen Coordinaten λ, μ, ν und drei neuen Coordinaten u_1, u_2, u_3 mögen nun die folgenden Relationen angenommen werden:

$$(2)\quad \begin{cases} u_1 = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda-\mu_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int\limits_{\gamma}^{\mu} \frac{(\mu-\mu_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int\limits_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu-\mu_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}, \\ u_2 = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int\limits_{\gamma}^{\mu} \frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int\limits_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}, \\ u_3 = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int\limits_{\gamma}^{\mu} \frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int\limits_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}, \end{cases}$$

worin:

$$(3)\quad r(\rho) = (\alpha-\rho)(\beta-\rho)(\gamma-\rho)(\mu_0-\rho)(\lambda_0-\rho)$$

ist und λ_0, μ_0 zwei besondere Werthe der gleichnamigen Coordinaten λ, μ bedeuten. Indem man aus diesen 3 Gleichungen, welche das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale 2. Gattung[1] vom Geschlecht 2 enthalten, die symmetrischen Functionen (1) der elliptischen Coordinaten λ, μ, ν berechnet, erhält man x, y, z als eindeutige Functionen der drei neuen Coordinaten u_1, u_2, u_3 dargestellt, nämlich:

$$(4)\quad \begin{cases} x = \frac{\theta}{\theta_{45}}\left\{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\,\frac{\theta_{45}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)} + \frac{\theta_{40}(u_1, u_2)}{\theta_{50}(u_1, u_2)} E(u_1, u_2, u_3)\right\}, \\ y = \frac{\theta_{43}}{\theta_{45}}\left\{\sqrt{\beta-\lambda_0}\,\frac{\theta_{35}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)} - \frac{\theta_{03}(u_1, u_2)}{\theta_{50}(u_1, u_2)} E(u_1, u_2, u_3)\right\}, \\ z = \frac{\theta_{41}}{\theta_{45}}\left\{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\,\frac{\theta_{31}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)} - \frac{\theta_{01}(u_1, u_2)}{\theta_{50}(u_1, u_2)} E(u_1, u_2, u_3)\right\}, \end{cases}$$

worin:

$$(5)\quad \begin{aligned} E(u_1, u_2, u_3) &= u_3 + \frac{\theta_{45}''^{(11)} + \theta_{45}''^{(21)}}{\theta_{45}} u_1 + \frac{\theta_{45}''^{(12)} + \theta_{45}''^{(22)}}{\theta_{45}} u_2 \\ &\quad - \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_2}. \end{aligned}$$

---

[1] Vgl. CLEBSCH-GORDAN, *Theorie der ABEL'schen Functionen*, Leipzig 1866, S. 150.

Dabei ist, mit den modificirten WEIERSTRASS'schen Indices[1] bezeichnet,

$$\Theta_{ik}(u_1, u_2) = \vartheta_{ik}(v_1, v_2),$$

wo $\vartheta_{ik}(v_1, v_2)$ die gewöhnliche Thetafunction zweier Argumente v_1, v_2 und dreier Parameter a_{11}, a_{12}, a_{22} und ferner

$$(6)\quad \left| \begin{array}{l} v_1 = \dfrac{u_1 B_2 - u_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \dfrac{\pi i}{2}, \qquad v_2 = \dfrac{A_1 u_2 - A_2 u_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \dfrac{\pi i}{2}; \\[2ex] a_{11} = -\dfrac{C_1 B_2 - C_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\pi, \qquad a_{12} = -\dfrac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\pi, \\[2ex] a_{22} = -\dfrac{A_1 D_2 - A_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\pi \end{array} \right.$$

zu setzen ist. Die reellen Constanten dieser Ausdrücke haben die Werthe:

$$(7)\quad A_h = \int_\gamma^{\mu_0} d\omega_h, \quad B_h = -\int_\beta^{\alpha} d\omega_h, \quad C_h = \int_{\lambda_0}^{\gamma} d\omega'_h; \quad D_h = -\int_\alpha^{\infty} d\omega'_h;$$

sie sind auf reellem Integrationswege mit den Differentialen:

$$d\omega_1 = \frac{(\rho - \mu_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, \quad d\omega_2 = \frac{(\rho - \lambda_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, \quad d\omega'_1 = \frac{(\rho - \mu_0)d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}, \quad d\omega'_2 = \frac{(\rho - \lambda_0)d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}$$

zu berechnen, in welchen $\sqrt{\pm r}$ den positiven Werth der betreffenden Quadratwurzel bedeutet.

Aus der in (4) gegebenen Parameterdarstellung aller Raumpuncte durch eindeutige vierfach periodische Functionen dreier unabhängiger Argumente u_1, u_2, u_3 gehen als specielle Fälle die verschiedenen bekannten Parameterdarstellungen im Gebiete der confocalen Flächen 2. Grades hervor:

Die Functionen (4) sind in u_3 linear; für $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$ mit zwei Constanten a_1, a_2, erhält man daher in (4) die Puncte einer geraden

[1] Vgl. Acta mathematica, Bd. 8, S. 84.

Linie, welche, wie ihre Differentialgleichungen in elliptischen Coordinaten:

$$
(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{(\lambda-\mu_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\dfrac{(\mu-\mu_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\dfrac{(\nu-\mu_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=0, \\[2ex] \dfrac{(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\dfrac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\dfrac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=0, \end{cases}
$$

erkennen lassen, mit den Flächen

$$\nu=\alpha,\qquad \nu=\beta,\qquad \mu=\gamma,\qquad \mu=\mu_0,\qquad \lambda=\lambda_0$$

des confocalen Flächensystems der elliptischen Coordinaten je 2 unendlich nahe Puncte gemein hat, also gemeinsame Tangente der Flächen $\lambda=\lambda_0$ und $\mu=\mu_0$ ist[1]. Die Formeln (4) liefern in diesem Falle mit $u_3=ct$, unter c eine Constante und unter t die Zeit verstanden, zugleich die Gleichungen der Trägheitsbewegung eines materiellen Punctes im Raume und die Beziehung zwischen den beiderseitigen Integrationsconstanten in den zwei von Jacobi gegebenen Formen[2] der Gleichungen der Trägheitsbewegung als der Integralgleichungen des Systems von Differentialgleichungen, welches aus (8) unter Hinzufügung der dritten Gleichung

$$
(8')\qquad \frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=c\,dt
$$

entsteht.

Für $\lambda=\lambda_0$ verschwinden in den 3 Gleichungen (2) die ersten Glieder der rechten Seiten, und zwischen den entstehenden 3 Summen u_1, u_2, u_3 von je 2 Integralen besteht die Relation:

$$(9)\qquad E(u_1,\ u_2,\ u_3)=0,$$

die mit Rücksicht auf die Definition (5) nichts anderes ist, als die Darstellung der Summe zweier Integrale 2. Gattung u_3 durch die Summen je zweier Integrale 1. Gattung u_1 und u_2. Die Gleichung (9) ist die

[1] Vgl. Klein, *Zur geometrischen Deutung des Abel'schen Theorems*, Mathem. Ann. Bd. 28, S. 533.

[2] Vgl. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, herausg. von Clebsch, S. 233.

Gleichung des Ellipsoides $\lambda = \lambda_0$ in den Coordinaten u_1, u_2, u_3. Zugleich reduciren sich die Formeln (4) für die Puncte dieses Ellipsoides auf die bekannten Formeln:[1]

$$(10)\qquad \left| \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{\alpha - \lambda_0}} &= \frac{\theta\theta_{45}(u_1, u_2)}{\theta_{45}\theta(u_1, u_2)}, \\ \frac{y}{\sqrt{\beta - \lambda_0}} &= \frac{\theta_{42}\theta_{35}(u_1, u_2)}{\theta_{45}\theta(u_1, u_2)}, \\ \frac{z}{\sqrt{\gamma - \lambda_0}} &= \frac{\theta_{41}\theta_{51}(u_1, u_2)}{\theta_{45}\theta(u_1, u_2)}. \end{aligned} \right.$$

Besteht zwischen u_1, u_2, u_3 neben der Gleichung (9) noch die fernere Gleichung $u_2 = a_2$, so erhält man in (10) die geodätischen Linien und zugleich die Gleichungen der Trägheitsbewegung eines materiellen Punctes auf dem Ellipsoid $\lambda = \lambda_0$, deren Differentialgleichungen lauten:

$$\frac{(\mu - \lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \frac{(\nu - \lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} = 0$$

$$\frac{(\mu - \mu_0)(\mu - \lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \frac{(\nu - \mu_0)(\nu - \lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} = c\,dt.$$

Man hat in der letzteren Auffassung u_1 durch die Gleichung:

$$u_1 = c\int_{t_0}^{t} \frac{(\mu_0 - \lambda_0)\,dt}{(\mu - \lambda_0)(\nu - \lambda_0)}$$

mit einer Constanten t_0 als eindeutige Function von t für alle reellen Werthe von t definirt zu denken.[2] In den Formeln (4) vereinigen sich also die Darstellungen der Trägheitsbewegung eines materiellen Punctes im Raume und auf der Fläche zweiten Grades.

---

[1] Vgl. Acta mathematica, Bd. 8, S. 84.

[2] Vgl. WEIERSTRASS, *Über geodätische Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid*, Monatsberichte der Berliner Akademie 1861, S. 986.

§ 2. *Darstellung der Puncte des Raumes durch die Umkehrfunctionen hyperelliptischer Integrale* 3. *Gattung vom Geschlecht* 2.

Die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν mögen ferner ersetzt werden durch 3 Coordinaten u_1, u_2, u_3, welche mit ihnen verbunden sind durch folgende Gleichungen:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
u_1 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_2 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_3 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},
\end{aligned}\right.$$

wo jetzt unter $r(\rho)$, anders als in § 1, eine ganze Function 6. Grades:

$$(2)\qquad r(\rho) = -(\alpha-\rho)(\beta-\rho)(\gamma-\rho)(\mu_0-\rho)(\lambda_0-\rho)(\lambda_1-\rho)$$

verstanden wird und λ_0, λ_1, μ_0 ($\lambda_1 < \lambda_0$) specielle Werthe der gleichnamigen Coordinaten sind. Es ist daher jetzt u_3 eine Summe von hyperelliptischen Integralen 3. Gattung mit den logarithmischen Unendlichkeitspuncten $\rho = \infty$.

Die Berechnung der symmetrischen Functionen § 1, (1) der oberen Grenzen λ, μ, ν der Integralsummen u_1, u_2, u_3 giebt jetzt:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{(\alpha-\lambda_0)(\alpha-\lambda_1)}} &= \frac{P(u_1, u_2, u_3)}{T(u_1, u_2, u_3)},\\
\frac{y}{\sqrt{(\beta-\lambda_0)(\beta-\lambda_1)}} &= \frac{Q(u_1, u_2, u_3)}{T(u_1, u_2, u_3)},\\
\frac{z}{\sqrt{(\gamma-\lambda_0)(\gamma-\lambda_1)}} &= \frac{R(u_1, u_2, u_3)}{T(u_1, u_2, u_3)},
\end{aligned}\right.$$

worin T, P, Q, R die Bedeutung haben:

$$(4)\qquad T(u_1, u_2, u_3)$$
$$= \sqrt{(\alpha-\lambda_0)P^2(u_1, u_2, u_3)+(\beta-\lambda_0)Q^2(u_1, u_2, u_3)+(\gamma-\lambda_0)R^2(u_1, u_2, u_3)+(\lambda_0-\lambda_1)S^2(u_1, u_2, u_3)},$$

$$(5)\quad\left|\begin{array}{l} P(u_1, u_2, u_3) = \theta_{05}(c_1, c_2)\{e^{iu_3'}\theta_{40}(u_1-c_1, u_2-c_2) - e^{-iu_3'}\theta_{40}(u_1+c_1, u_2+c_2)\}, \\ Q(u_1, u_2, u_3) = \theta_{21}(c_1, c_2)\{e^{iu_3'}\theta_{03}(u_1-c_1, u_2-c_2) - e^{-iu_3'}\theta_{03}(u_1+c_1, u_2+c_2)\}, \\ R(u_1, u_2, u_3) = \theta_{23}(c_1, c_2)\{e^{iu_3'}\theta_{01}(u_1-c_1, u_2-c_2) - e^{-iu_3'}\theta_{01}(u_1+c_1, u_2+c_2)\}, \\ S(u_1, u_2, u_3) = \theta_{40}(c_1, c_2)\{e^{iu_3'}\theta_{05}(u_1-c_1, u_2-c_2) - e^{-iu_3'}\theta_{05}(u_1+c_1, u_2+c_2)\}, \end{array}\right.$$

wo ferner:

$$(6)\qquad u_3' = u_3 - i\frac{\partial \log \theta_{45}(c_1, c_2)}{\partial c_1}u_1 - i\frac{\partial \log \theta_{45}(c_1, c_2)}{\partial c_2}u_2$$

ist und die rein imaginären Constanten c_1, c_2 die Werthe haben:

$$(7)\qquad c_1 = \int_{\lambda_1}^{-\infty}\frac{(\rho-\mu_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}},\qquad c_2 = \int_{\lambda_1}^{-\infty}\frac{(\rho-\lambda_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}.$$

Die Argumente und Parameter der Thetafunctionen haben die Werthe wie in den Formeln § 1, (6), (7) nur dass in diesen $r(\rho)$ jetzt die neue Bedeutung (2) besitzt. Die Quadratwurzel T verschwindet, wie leicht aus bekannten Sätzen über das gleichzeitige Verschwinden mehrerer Thetafunctionen $\theta_\alpha(u_1, u_2)$ hergeleitet werden kann, für kein reelles Werthepaar u_1, u_2, u_3; sie hat überdies, wie auch P, Q, R, S für reelle Argumente u_1, u_2, u_3 auch reelle Werthe. Die doppelt gestrichene Quadratwurzel bedeutet den positiven Werth von T.

Die Darstellung (3) der Puncte des Raumes durch fünffach periodische Functionen der drei Argumente u_1, u_2, u_3 ist im reellen Gebiete eine eindeutige, sobald man für T einmal das positive Vorzeichen festgesetzt hat. Aus dieser Parameterdarstellung aller Raumpuncte ergeben sich folgende specielle Formen:

Wenn man die beiden Variablen u_1, u_2 constant, gleich a_1, a_2 setzt, so bleibt in den Formeln (3) nur u_3' variabel, und man übersieht, dass bei den gemachten Festsetzungen die Formeln (3) eine Ellipse darstellen,

deren Mittelpunct der Coordinatenanfang ist. Aus den Differentialgleichungen dieser Ellipse in elliptischen Coordinaten:

$$(8)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{(\lambda-\mu_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\dfrac{(\mu-\mu_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\dfrac{(\nu-\mu_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=0, \\[2ex] \dfrac{(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\dfrac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\dfrac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=0, \end{array}\right.$$

folgt anderseits sofort, dass diese Ellipse mit den Flächen

$$\nu=\alpha,\qquad \nu=\beta,\qquad \mu=\gamma,\qquad \mu=\mu_0,\qquad \mu=\lambda_0,\qquad \lambda=\lambda_1,$$

so oft sie denselben begegnet, je zwei unendlich nahe Puncte gemein hat, also die Flächen μ_0, λ_0, λ_1 je in zwei diametral gegenüberliegenden Puncten berührt.[1]

Mit $u_3 = gt$ hat man in (3) unmittelbar die Gleichungen der Centralbewegung eines materiellen Punctes x, y, z unter Einfluss der vom Coordinatenanfang ausgehenden Anziehungskraft von der Grösse $g^2 r$, unter r die Entfernung des bewegten Punctes von letzterem verstanden.[2]

Für $\lambda = \lambda_0$ verschwinden in den 3 Gleichungen (1) die ersten Glieder der rechten Seiten und zwischen den entstehenden 3 Summen von je 2 Integralen besteht die Relation:

$$(9)\qquad u_3 = \frac{1}{2i}\log\frac{\theta(u_1+c_1,\ u_2+c_2)}{\theta(u_1-c_1,\ u_2-c_2)} + i\frac{\partial\log\theta_{45}(c_1,\ c_2)}{\partial c_1}u_1 + i\frac{\partial\log\theta_{45}(c_1,\ c_2)}{\partial c_2}u_2,$$

welche die Darstellung der Summe zweier Integrale 3. Gattung u_3 durch die Summen je zweier Integrale 1. Gattung u_1, u_2 ist. Man kann diese Relation auch schreiben:

$$\frac{e^{iu'_3}}{e^{-iu'_3}} = \frac{\theta(u_1+c_1,\ u_2+c_2)}{\theta(u_1-c_1,\ u_2-c_2)}.$$

[1] Vgl. *Über Verallgemeinerungen des Graves'schen Theorems in der analytischen Mechanik*, Berichte d. K. Sächs. Ges. d. W., 1886; ferner Klein: *Zur geometrischen Deutung des Abel'schen Theorems der hyperelliptischen Integrale*, Mathematische Annalen, Bd. 28.

[2] Vgl. Jacobi, a. a. O., S. 234.

Die Formeln (3) reduciren sich in Folge derselben auf:

$$
(10)\qquad \left|\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{(\alpha-\lambda_0)(\alpha-\lambda_1)}} &= \frac{\theta\,\theta_{45}(u_1,\,u_2)}{T},\\
\frac{y}{\sqrt{(\beta-\lambda_0)(\beta-\lambda_1)}} &= \frac{\theta_{43}\,\theta_{35}(u_1,\,u_2)}{T},\\
\frac{z}{\sqrt{(\gamma-\lambda_0)(\gamma-\lambda_1)}} &= \frac{\theta_{41}\,\theta_{51}(u_1,\,u_2)}{T},
\end{aligned}\right.
$$

mit

$$
T=\sqrt{(\alpha-\lambda_0)\theta^2\theta^2_{45}(u_1,u_2)+(\beta-\lambda_0)\theta^2_{43}\theta^2_{35}(u_1,u_2)+(\gamma-\lambda_0)\theta^2_{41}\theta^2_{51}(u_1,u_2)+(\lambda_0-\lambda_1)\theta^2_{45}\theta^2(u_1,u_2)},
$$

wie leicht aus den Additionstheoremen der Thetafunctionen folgt. Diese Formeln (10) gehen ihrerseits mit $\lambda_1 = -\infty$ in die Formeln § 1, (4) über, da neben (10) noch die Gleichung:

$$
\sqrt{\frac{(\mu-\lambda_1)(\nu-\lambda_1)}{(\alpha-\lambda_1)(\beta-\lambda_1)(\gamma-\lambda_1)}} = \frac{\theta_{45}\,\theta(u)}{T}
$$

besteht. Die in den Gleichungen (10) enthaltene Darstellung der Puncte des Ellipsoides λ_0 durch zwei unabhängige Parameter ist im reellen Gebiete eindeutig.

Besteht neben der Gleichung (9) auch noch die Gleichung $u_2 = a_2$, so erhält man in (10) die Puncte derjenigen Curven auf dem Ellipsoid λ_0, welche von den eben erwähnten Ellipsen umhüllt werden und ähnlich wie die geodätischen Linien verlaufen, eindeutig durch den Parameter u_1 dargestellt. Macht man u_1 durch die Formel:

$$
u_1 = \int_{t_0}^{t} \frac{g(\mu_0-\lambda_0)\,dt}{(\mu-\lambda_0)(\nu-\lambda_0)}
$$

eindeutig von der Zeit t abhängig, so sind die Gleichungen (10) die Bewegungsgleichungen eines Punctes, der auf dem Ellipsoid λ_0 unter dem Einfluss der Centralkraft g^2r sich bewegt.

In der Parameterdarstellung (3) vereinigen sich also die Gleichungen der freien und der an das Ellipsoid λ_0 gebundenen Bewegung eines materiellen Punctes unter Einfluss einer centralen Anziehungskraft, welche der Entfernung direct proportional ist.

§ 3. *Darstellung der Puncte des Raumes durch die Umkehrfunctionen hyperelliptischer Integrale* 1. *Gattung vom Geschlecht* 3.

Es sollen endlich die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν mit 3 anderen Coordinaten u_1, u_2, u_3 durch die folgenden Relationen verbunden sein:

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_1 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda-\mu_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu} \frac{(\mu-\mu_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu-\mu_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_2 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu} \frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_3 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu} \frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},
\end{aligned}
\right.
$$

worin:

$$(2)\qquad r(\rho) = (\alpha-\rho)(\beta-\rho)(\gamma-\rho)(\mu_0-\rho)(\lambda_0-\rho)(\lambda_1-\rho)(\lambda_2-\rho)$$

und μ_0, λ_0, λ_1, $\lambda_2(\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2)$ besondere Werthe der gleichnamigen Coordinaten sind. Die Integrale in diesen Gleichungen sind von der 1. Gattung vom Geschlecht 3.

Um die symmetrischen Functionen der elliptischen Coordinaten λ, μ, ν durch u_1, u_2, u_3 darzustellen, setzt man:

$$(3)\qquad \theta\begin{pmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3'\end{pmatrix}(u_1, u_2, u_3) = \vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3'\end{pmatrix}(v_1, v_2, v_3) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_3} e^{A+2V}$$

mit:

$$A = a_{11}\left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2 + a_{22}\left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)^2 + a_{33}\left(m_3+\frac{\varepsilon_3}{2}\right)^2$$

$$+ 2a_{23}\left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(m_3+\frac{\varepsilon_3}{2}\right) + 2a_{31}\left(m_3+\frac{\varepsilon_3}{2}\right)\left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right) + 2a_{12}\left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right),$$

$$V = \left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(v_1+\varepsilon_1'\frac{\pi i}{2}\right) + \left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(v_2+\varepsilon_2'\frac{\pi i}{2}\right) + \left(m_3+\frac{\varepsilon_3}{2}\right)\left(v_3+\varepsilon_3'\frac{\pi i}{2}\right).$$

Dabei bestehen zwischen u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 die Relationen:

$$v_h = (c_{h1}u_1 + c_{h2}u_2 + c_{h3}u_3)\pi i, \tag{4}$$ $(h = 1, 2, 3)$

und haben die 9 Coefficienten c_{h1}, c_{h2}, c_{h3} die Bedeutung:

$$c_{h_1 k_1} = \frac{1}{\Delta}(A^{h_2}_{k_2}A^{h_3}_{k_3} - A^{h_2}_{k_3}A^{h_3}_{k_2}),$$

wo die Indicestripel $h_1 h_2 h_3$ und $k_1 k_2 k_3$ unabhängig von einander die Zahlentripel 123, 231, 312 durchlaufen und

$$\Delta = \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{vmatrix}.$$

Die Parameter a_{hk} der Thetafunction haben die Werthe:

$$a_{hk} = -(c_{h1}B^k_1 + c_{h2}B^k_2 + c_{h3}B^k_3)\pi, \tag{5}$$ $(h, k = 1, 2, 3)$

wobei $a_{hk} = a_{kh}$. Endlich sind unter A^k_h, B^k_h die auf reellem Integrationswege berechneten reellen Constanten zu verstehen:

$$\begin{aligned}
A^1_h &= 2\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\omega_h - 2\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_h + 2\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_h, & B^1_h &= 2\int_{\lambda_2}^{\lambda_1} d\omega'_h \\
A^2_h &= \qquad\qquad - 2\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_h + 2\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_h, & B^2_h &= -2\int_{\lambda_0}^{\gamma} d\omega'_h \\
A^3_h &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_h, & B^3_h &= 2\int_{\mu_0}^{\beta} d\omega'_h,
\end{aligned} \tag{6}$$

mit folgender Bedeutung der Differentiale $d\omega_h$ und $d\omega'_h$:

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= \frac{(\rho-\mu_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, & d\omega_2 &= \frac{(\rho-\lambda_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, & d\omega_3 &= \frac{(\rho-\mu_0)(\rho-\lambda_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, \\
d\omega'_1 &= \frac{(\rho-\mu_0)d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}, & d\omega'_2 &= \frac{(\rho-\lambda_0)d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}, & d\omega'_3 &= \frac{(\rho-\mu_0)(\rho-\lambda_0)d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}},
\end{aligned} \tag{7}$$

unter $\sqrt{\pm r}$ allgemein die positive Quadratwurzel aus der positiven reellen Grösse $\pm r$ verstanden.

Indem man endlich die Thetafunctionen mit den WEIERSTRASS'schen Indices[1] bezeichnet, erhält man:

$$(8)\qquad \left| \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} &= \frac{\theta_{056}\cdot\theta_{146}(u_1,\ u_2,\ u_3)}{\theta_{146}\cdot\theta_{056}(u_1,\ u_2,\ u_3)}, \\ \frac{y}{\sqrt{\beta-\lambda_0}} &= \frac{\theta_{0}\cdot\theta_{145}(u_1,\ u_2,\ u_3)}{\theta_{146}\cdot\theta_{056}(u_1,\ u_2,\ u_3)}, \\ \frac{z}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}} &= \frac{\theta_{136}\cdot\theta_{137}(u_1,\ u_2,\ v_3)}{\theta_{146}\cdot\theta_{056}(u_1,\ u_2,\ u_3)}, \end{aligned} \right.$$

wo den ohne Argumente geschriebenen Thetafunctionen die Argumente 0, 0, 0 zuzudenken sind. Die Coordinaten x, y, z werden hierbei reell für reelle Werthe von u_1, u_2, u_3.

Diese eindeutige Parameterdarstellung der Puncte des Raumes durch

---

[1] Vgl. HENOCH, *De Abelianarum functionum periodis,* (Berolini, 1867) S. 15, wobei im vorliegenden Text nur die zweiziffrigen Indices bei HENOCH durch Hinzufügung der Ziffer 7 in dreiziffrige verwandelt sind, sodass von den 64 Thetafunctionen 8 je eine der Zahlen 0, 1, 2, ..., 7, 56 aber je 3 dieser Zahlen als Indices bekommen. Eine zweite Indicesbezeichnung wäre dadurch geboten, dass eine Thetafunction keinen Index, 28 Thetafunctionen je 2 der Zahlen 0, 1, 2, ..., 7 und 35 je eine Scheidung der 8 Zahlen in 2 Quadrupel als Charakteristik bekommen. Man kann es dann für den hyperelliptischen Fall so einrichten, dass die gerade Thetafunction, welche für $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ verschwindet, keinen Index bekommt, die 28 ungeraden Thetafunctionen je 2 Indices und die 35 übrigen geraden der Spaltung der in irgend einer Reihenfolge mit $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_7$ bezeichneten 8 Zahlen 0, 1, 2, ..., 7 in 4 Quadrupel so entsprechen, dass sich die Nullwerthe der Thetafunctionen mit der Charakteristik $\begin{pmatrix} i_0 i_1 i_2 i_3 \\ i_4 i_5 i_6 i_7 \end{pmatrix}$, mit einem Proportionalitätsfactor k und der Abkürzung $(i_1 i_2) = (a_{i_1} - a_{i_2})$, durch die 8 Verzweigungspuncte $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_7$ so darstellen:

$$k\cdot\theta\begin{pmatrix} i_0 i_1 i_2 i_3 \\ i_4 i_5 i_6 i_7 \end{pmatrix} = \sqrt[4]{(i_0 i_1)(i_0 i_2)(i_0 i_3)(i_2 i_3)(i_3 i_1)(i_1 i_2)\cdot(i_4 i_5)(i_4 i_6)(i_4 i_7)(i_6 i_7)(i_7 i_5)(i_5 i_6)}.$$

Man vgl. über die verschiedene Indicesbezeichnung auch NÖTHER, *Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten,* Mathematische Annalen, Bd. 16, S. 270.

6-fach periodische Functionen dreier Argumente hat ebenfalls eine mechanische Bedeutung.[1] Setzt man nämlich

$$u_1 = a, \qquad u_2 = b, \qquad u_3 = c + gt,$$

unter a, b, c, g Constanten, unter t die Zeit verstehend, so stellen die Gleichungen (8) die freie Bewegung eines Punctes im Raume unter Einfluss der Kräftefunction:

$$(9) \qquad U = -\frac{1}{2}g^2\{L(\lambda + \mu + \nu) - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)\}$$

dar. Die 7 Grössen a, b, c, λ_0, μ_0, λ_1, λ_2 vertreten die 6 Integrationsconstanten der Bewegung; zwischen ihnen besteht eine Relation:

$$\lambda_0 + \mu_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = L,$$

welche sie mit der gegebenen Constanten L der Kräftefunction verbindet.

Diese Bewegung dürfte insofern ein gewisses Interesse beanspruchen, als sie ein typisches Beispiel einer durch hyperelliptische Functionen 2. Ordnung dargestellten Bewegung abgiebt. Sie lässt daher in einfachster Form ein charakteristisches Merkmal solcher Bewegungen hervortreten, das der *bedingten Periodicität*.

Um darauf einzugehen, bemerkt man zunächst, dass die 3 imaginären Systeme zusammengehöriger Periodicitätsmoduln für den Bewegungsvorgang im gewöhnlichen Sinne keine Bedeutung haben. Aber auch die 3 reellen Systeme verlieren ihre directe Bedeutung, da eine Änderung der 3 Argumente u_1, u_2, u_3 um ein System zusammengehöriger Periodicitätsmoduln durch die Festhaltung der Werthe u_1 und u_2 ausgeschlossen wird und daher die betrachtete Bewegung als eine *nicht periodische* sich ergiebt. Dagegen zeigt die Bahncurve des bewegten Punctes eine dreifache Art von Windungen, die man in gewissem Sinne als den Ausdruck der dreifachen reellen Periodicität der betrachteten hyperelliptischen Functionen ansehen kann. Die Bahncurve bewegt sich nämlich, wie man aus ihren Differentialgleichungen in elliptischen Coordinaten

[1] Vgl. Jacobi, a. a. O., S. 219.

leicht erkennt, in dem ringförmigen Raume, welcher von je einem ringförmig geschlossenen Theile der beiden Ellipsoide λ_0 und λ_1 einerseits und von zwei getrennten, je ringförmig geschlossenen Theilen des einschaligen Hyperboloides μ_0 anderseits begrenzt wird. Die Bahncurve umläuft in immer wiederholten Längswindungen diesen in sich zurückkehrenden ringförmigen Raum, macht dabei aber zugleich Querwindungen, indem sie abwechselnd den einen und anderen begrenzenden Theil des Hyperboloides μ_0 berührt, und Tiefenwindungen, indem sie abwechselnd die begrenzenden Theile des einen und anderen der Ellipsoide λ_0 und λ_1 berührt. Die Bahncurve wird sich dabei im Allgemeinen niemals schliessen, da niemals in demselben Zeitpuncte eine Längs-, eine Breiten- und eine Tiefenwindung gleichzeitig sich vollenden. Aber die Bewegung kann insofern als eine *zweifach bedingt periodische Bewegung* bezeichnet werden, als sie in eine periodische Bewegung übergeht, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind, welche das periodische Zusammentreffen der 3 Windungsformen der Bahncurve zum Ausdruck bringen. Man kann diese Bedingungen unmittelbar aufstellen. Wenn man nämlich der Einfachheit wegen die Constanten a, b, c specialisirt und $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = gt$ setzt, so erhält man zunächst:

$$v_1 = c_{13} gt\pi i = \frac{A_1^2 A_2^3 - A_2^2 A_1^3}{\Delta} gt\pi i,$$

$$v_2 = c_{23} gt\pi i = \frac{A_1^3 A_2^1 - A_2^3 A_1^1}{\Delta} gt\pi i,$$

$$v_3 = c_{33} gt\pi i = \frac{A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2}{\Delta} gt\pi i.$$

Damit wird das Argument $2V$ der Exponentialgrösse der Thetafunction (3) abgesehen von dem additiven Gliede:

$$(m_1\varepsilon_1' + m_2\varepsilon_2' + m_3\varepsilon_3')\pi i + (\varepsilon_1\varepsilon_1' + \varepsilon_2\varepsilon_2' + \varepsilon_3\varepsilon_3')\frac{\pi i}{2}:$$

$$(10)\quad \begin{aligned} 2V = \{&(2m_1 + \varepsilon_1)(A_1^2 A_2^3 - A_2^2 A_1^3) + (2m_2 + \varepsilon_2)(A_1^3 A_2^1 - A_2^3 A_1^1) \\ &+ (2m_3 + \varepsilon_3)(A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2)\}\frac{gt\pi i}{\Delta}. \end{aligned}$$

Es seien jetzt, unter l, m, n ganze Zahlen verstanden, die beiden Bedingungen erfüllt:

$$(11)\qquad \left|\begin{array}{l} l\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\omega_1 - m\int\limits_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_1 + n\int\limits_{\beta}^{\alpha} d\omega_1 = 0, \\ l\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\omega_2 - m\int\limits_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_2 + n\int\limits_{\beta}^{\alpha} d\omega_2 = 0 \end{array}\right.$$

und sei zur Abkürzung:

$$(12)\qquad l\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\omega_3 - m\int\limits_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_3 + n\int\limits_{\beta}^{\alpha} d\omega_3 = gT$$

gesetzt. Man kann diese Gleichungen mit $m' = m - l$, $n' = n - m$ auch schreiben:

$$lA_1^1 + m'A_1^2 + n'A_1^3 = 0,$$

$$lA_2^1 + m'A_2^2 + n'A_2^3 = 0,$$

$$lA_3^1 + m'A_3^2 + n'A_3^3 = 2gT.$$

Hieraus folgt:

$$A_1^2 A_2^3 - A_2^2 A_1^3 = \frac{\Delta l}{2gT}, \qquad A_1^3 A_2^1 - A_2^3 A_1^1 = \frac{\Delta m'}{2gT}, \qquad A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2 = \frac{\Delta n'}{2gT}$$

und somit:

$$2V = \{(2m_1 + \varepsilon_1)l + (2m_2 + \varepsilon_2)m' + (2m_3 + \varepsilon_3)n'\}\frac{\pi i t}{2T}.$$

Einer Änderung des Argumentes t um $4T$ entspricht also eine Änderung des Argumentes $2V$ um ein Vielfaches von $2\pi i$, wobei die Thetafunction (3) ungeändert bleibt.

Während also die Coordinaten x, y, z des bewegten Punctes im Allgemeinen nichtperiodische Functionen der Zeit sind, werden sie periodisch mit der Periode $4T$, sobald die Integrationsconstanten μ_0, λ_0, λ_1, λ_2 die Bedingungen (11) erfüllen.

Diese Bedingungen hängen übrigens von dem anfänglichen Orte des bewegten Punctes zur Zeit $t = 0$ nicht ab, auch wenn a, b, c beliebige Werthe haben.

Neben diese Bewegung, welche auf das vollständige Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale 3. Gattung:

$$
(13)\quad \left|\begin{array}{l}
\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\int\limits_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int\limits_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=a_1\\
\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\int\limits_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int\limits_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=a_2\\
\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\int\limits_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int\limits_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=gt
\end{array}\right.
$$

führt, stellt sich eine unter Einfluss derselben Kräftefunction (9) vor sich gehende, aber an das Ellipsoid λ_0 gebundene Bewegung, entsprechend den Gleichungen:

$$
(14)\quad \left|\begin{array}{l}
\int\limits_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int\limits_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=a_2\\
\int\limits_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int\limits_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=gt,
\end{array}\right.
$$

wo $r(\rho)$ wieder die in (2) definirte ganze Function 7. Grades ist. Diese Gleichungen geben bekanntlich im complexen Grössengebiet keine eindeutige Umkehrung. Wohl aber ergeben sich die Coordinaten x, y, z des bewegten Punctes, als symmetrische Functionen der oberen Grenzen μ, ν des vorliegenden unvollständigen Umkehrproblems (14), betrachtet für alle reellen Werthe der Variablen a_2 und gt, als eindeutige doppelt reell periodische Functionen von a_2 und gt.[1] Bei constantem a_2, wie im vorliegenden Falle, sind die Coordinaten x, y, z des bewegten Punctes *einfach bedingt periodische Functionen* der Zeit. Die einzige Bedingung nämlich:

$$-m\int\limits_{\gamma}^{\mu_0}d\omega_2+n\int\limits_{\beta}^{\alpha}d\omega_2=0$$

[1] Vgl. *Über eine Gattung doppelt reell periodischer Functionen*, Mathematische Annalen, Bd. 29, 1887.

macht sie periodisch mit der Periode $4T$, falls:

$$-m\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_3 + n\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_3 = gT$$

gesetzt wird. Solche einfach bedingt periodische Bewegungen sind auch, wie man sofort sieht, die in § 1 und § 2 betrachteten Bewegungen auf dem Ellipsoide λ_0.[1]

Beschränkt man endlich den unter Einfluss der Kräftefunction (9) sich bewegenden Punct auf die Krümmungscurve $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ des Ellipsoides λ_0, so entspricht seine Bewegung der Gleichung:

$$\int_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu - \mu_0)(\nu - \lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} = gt, \tag{15}$$

und seine Coordinaten x, y, z werden Umkehrfunctionen eines einzelnen hyperelliptischen Integrals 1. Gattung vom Geschlecht 3. Die Bewegung ist dann eine *unbedingt periodische.*[2]

Hiermit schliesst jene Reihe von Umkehrproblemen hyperelliptischer Integrale 1. Gattung vom Geschlecht 3, welche in den Formeln (13), (14) und (15) enthalten ist. Durchläuft man dieselbe von ihrem letzten Typus zu ihrem ersten, so ändert sich der Charakter der entsprechenden Bewegung in der Weise, dass die ursprüngliche *Periodicität* durch eine *bedingte Periodicität* ersetzt wird, die sich der Zahl der erforderlichen Bedingungen nach weiter und weiter von der unbedingten Periodicität entfernt.

Dorpat, im März 1887.

---

[1] Hierher gehört auch die von C. Neumann, *De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticarum classem revocatur*, Regiomonti 1856, behandelte Bewegung und andere.

[2] Vgl. Weierstrass, *Über eine Gattung reell periodischer Functionen*, Berliner Monatsberichte, 1866. Hierher gehören eine ganze Reihe von Bewegungen; vgl. Russell, *On the occurence of the higher transcendents in certain mechanical problems*, The messenger of mathematics, new series, vol. 7—8; Greenhill, *On the motion of a top and allied problems in dynamics*, Quarterly journal of mathematics, vol. 15; und andere.

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS.

Published under the Auspices of the Johns Hopkins University.

The American Journal of Mathematics, founded under the auspices of the Johns Hopkins University, in 1878, was conducted by Professor Sylvester during the period of his connection with the University. It will be hereafter under the direction of SIMON NEWCOMB (Foreign Member of the Royal Society, and Corresponding Member of the Institute of France), Professor of Astronomy and Mathematics in the Johns Hopkins University and Director of the U. S. Nautical Almanac, as *Editor*, and of THOMAS CRAIG, Ph. D., Associate Professor of Applied Mathematics, as *Associate Editor*.

Seven volumes of about 400 pages each have been issued, and the eighth is now in progress. The journal appears quarterly in the quarto form.

The subscription price is dollars 5 a volume; single numbers dollars 1.50.

Communications in regard to subscriptions should be addressed to

PUBLICATION AGENCY of the Johns Hopkins University, BALTIMORE, Md., U. S. A.

Or to Messrs *MAYER & MÜLLER, BERLIN, PRUSSIA.*

Contents of Recent Volumes.

Ausgegeben den 1. Juli 1887. — Paru le 1 Juillet 1887.

Inhalt. Table des matières.

Preis des Bandes: 12 Mark. — Prix par volume: 15 Fr.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT | JOURNAL
HERAUSGEGEBEN | RÉDIGÉ
VON | PAR

G. MITTAG-LEFFLER

10:3

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1887.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
28/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

REDACTION

SUR LES SURFACES POSSÉDANT LES MÊMES PLANS DE SYMÉTRIE QUE L'UN DES POLYÈDRES RÉGULIERS[1]

PAR

L. LECORNU

À CAEN.

Première partie. Théorie générale.

1. Pour former l'équation générale des surfaces qui jouissent d'une symétrie déterminée, on peut employer une méthode synthétique dont voici le principe. Prenons un système quelconque de coordonnées ponctuelles, et soient α, β, γ les valeurs de ces coordonnées pour un point arbitrairement choisi. Imaginons que, par un moyen ou un autre, on soit parvenu à trouver trois fonctions L, M, N de α, β, γ, qui demeurent invariables lorsqu'on passe du point considéré à tout autre point déduit de celui-là d'après la symétrie considérée. Les surfaces $L =$ *Constante*, $M =$ *Constante*, $N =$ *Constante*, jouissent évidemment de cette symétrie, et il en est de même de toute surface, ou tout groupe de surfaces, représenté par l'équation $\varphi(L, M, N) = 0$, φ étant une fonction quelconque. Inversement, si α, β, γ peuvent s'exprimer en fonction de

---

[1] Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 27 Décembre 1886, a bien voulu décerner une mention honorable. Le début a été légèrement remanié, en vue de préciser la portée de la méthode.

L, M, N, l'équation $\varphi = 0$ comprend toutes les surfaces répondant à la question; car, d'après l'hypothèse même que nous faisons, n'importe quelle surface peut se représenter par l'équation $\varphi = 0$, et ceci s'applique en particulier aux surfaces cherchées. Mais en général, si la fonction φ est choisie au hasard, l'équation $\varphi = 0$ ne représente pas une surface unique; elle fournit un certain nombre de surfaces dont chacune, prise isolément, est dépourvue de la symétrie demandée, et qui, par leur réunion, composent un ou plusieurs *groupes* symétriques. Le caractère propre des surfaces symétriques consiste en ce que chacune d'elles remplace à elle seule un de ces groupes. Pour éclaircir ceci par un exemple simple, supposons qu'on cherche, dans un plan, les courbes symétriques par rapport à deux axes rectangulaires ox, oy. En prenant $x^4 + y^4 = 2L$, $x^4 - y^4 = 2M$, on a deux fonctions L et M qui ne sont pas altérées par le changement de signe des variables, et l'on est conduit à représenter les courbes cherchées par l'équation $\varphi(x^4 + y^4, x^4 - y^4) = 0$. Si l'on veut mettre sous cette forme la droite $y = mx$, on trouve

$$(x^4 + y^4)(1 - m^4) - (x^4 - y^4)(1 + m^4) = 0.$$

C'est un groupe de quatre droites, comprenant la droite considérée. S'il s'agit de la conique $Ax^2 + By^2 = 1$, l'équation $\varphi = 0$ devient:

$$(A^2x^4 - B^2y^4)^2 - 2A^2x^4 - 2B^2y^4 + 1 = 0.$$

Elle représente alors les quatre coniques $\pm Ax^2 \pm By^2 = 1$, parmi lesquelles figure la conique donnée, et dont chacune possède séparément la symétrie voulue.

Si les trois surfaces $L = Const.$, $M = Const.$, $N = Const.$ ont un nombre de points communs exactement égal au minimum exigé par la symétrie, toute surface algébrique symétrique peut se représenter isolément par une équation $\varphi(L, M, N) = 0$, entière en L, M, N. Ce théorème fondamental s'établit de la manière suivante. Soient:

$$L = f_1(x, y, z) \tag{1}$$

$$M = f_2(x, y, z) \tag{2}$$

$$N = f_3(x, y, z) \tag{3}$$

les valeurs de L, M, N, en coordonnées cartésiennes, et soit:

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface algébrique symétrique. Nous supposons que f_1, f_2, f_3, F sont des fonctions entières. L'équation:

$$F(x, y, z) = h \tag{4}$$

où h est une constante arbitraire, représente une surface également symétrique. Entre les équations (1), (2), (3) et (4), éliminons x, y, z. Nous parvenons à une équation entière $\Psi(L, M, N, h) = 0$, exprimant la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre équations admettent un système de solutions communes. Je dis que Ψ est du premier degré en h; en effet, par hypothèse, les équations (1), (2), (3) n'ont pas d'autres solutions communes que celles qui résultent de la symétrie, et toutes ces solutions donnent à h la même valeur; il n'y a donc qu'une seule valeur de h compatible avec les valeurs attribuées à L, M, N. Ceci posé l'équation $\Psi = 0$ peut s'écrire $h = \frac{\varphi(L, M, N)}{\omega(L, M, N)}$, φ et ω étant deux fonctions entières; et, par suite, l'équation $F = 0$ équivaut, au moins pour les points à distance finie, à $\varphi(L, M, N) = 0$, ce qui démontre la proposition. [1]

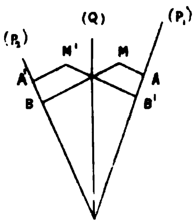
2. Nous sommes ainsi conduits à la recherche des fonctions L, M, N, que nous désignerons désormais sous le nom *d'éléments symétriques*. Comme tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier passent par un même point (qu'on peut appeler *l'origine* du système), le carré de la distance d'un point quelconque à celui-là fournit un premier élément, auquel nous donnerons le nom *d'élément sphérique* et que nous représenterons par L. En coordonnées rectangulaires, $L = x^2 + y^2 + z^2$. Nous entendrons par *sphère centrale* une sphère ayant son centre à l'origine. Pour former les autres éléments, considérons un système de plans P_1, P_2, $\ldots$, P_k passant par l'origine et formant une figure douée de la symétrie voulue. Supposons qu'aucun d'eux ne coïncide avec les plans de symétrie, et soit Q l'un de ces derniers. Les plans P sont groupés sy-

---

[1] Ce théorème ne figurait pas dans le mémoire présenté à l'Académie des sciences.

métriquement de part et d'autre du plan Q. Si P_1 et P_2 se correspondent de cette façon, les trois plans P_1, P_2, Q se coupent suivant une même droite qui dans la figure 1, est placée perpendiculairement au plan du tableau.

Fig. 1.



Soit M un point quelconque, soit M' son symétrique par rapport à Q. En abaissant les perpendiculaires MA, MB, $M'A'$, $M'B'$ sur P_1 et P_2, on a, en grandeur absolue:

$$MA \times MB = M'A' \times M'B'.$$

Cette relation est également vraie en signe: car, si M et M' sont de même côté par rapport à P_1, ils sont aussi de même côté par rapport à P_2 et alors MA est de même signe que $M'B'$; MB, de même signe que $M'A'$. Si au contraire M et M' sont de côtés différents par rapport à P_1, ils sont aussi de côtés différents par rapport à P_2 et, dans ce cas, MA et $M'B'$ sont de signes contraires, ainsi que MB et $M'A'$.

Si donc on forme le produit des distances du point M à tous les plans P, ce produit conserve même grandeur et même signe quand on remplace M par son symétrique relatif à Q. La même chose a lieu quel que soit le plan de symétrie Q. Par conséquent: *le produit des distances d'un point quelconque aux plans P est un élément symétrique.* Par suite, il suffira de chercher les deux systèmes les plus simples de plans P et de former les produits correspondants, pour avoir les deux nouveaux éléments M et N dont nous avons besoin.

Nous avons admis que le système des plans P ne comprenait pas de plans de symétrie. Cette restriction est nécessaire, car on voit sans peine que, si le plan de symétrie Q fait partie des plans P, le produit des distances à ces plans change de signe quand on substitue à un point son symétrique par rapport à Q. Mais on éviterait ce changement de signe en considérant le plan Q comme représentant deux plans P confondus, et introduisant par suite le carré de la distance au plan Q.

Il est aisé de fixer une limite inférieure de la somme des degrés m et n des éléments M et N, exprimés en coordonnées cartésiennes. En effet, ces deux éléments, joints à l'élément sphérique $L = x^2 + y^2 + z^2$,

doivent former un système indépendant, autrement dit, on ne doit pas avoir, identiquement:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} & \frac{\partial L}{\partial z} \\ \frac{\partial M}{\partial x} & \frac{\partial M}{\partial y} & \frac{\partial M}{\partial z} \\ \frac{\partial N}{\partial x} & \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

On peut toujours s'assurer que ceci n'est pas une identité, et l'équation précédente représente alors la surface, lieu des points pour lesquels les trois surfaces $L = Const.$, $M = Const.$, $N = Const.$ ont des plans tangents passant par une même droite. Le lieu est un cone de degré $m + n - 1$, ayant son sommet à l'origine, et comprenant tous les plans de symétrie, puisqu'en un point quelconque de l'un de ces plans les plans tangents aux trois surfaces passent évidemment par la normale au plan.

Il résulte de là que le nombre $m + n - 1$ est au moins égal à celui des plans de symétrie. S'il lui est exactement égal, le cone dont il s'agit se réduit aux plans de symétrie, et, en dehors de ces plans, les trois systèmes de surfaces $L = Const.$, $M = Const.$, $N = Const.$ sont aptes à constituer un système de coordonnées.

Pour chaque type de symétrie, il y a deux éléments non sphériques, M et N, de degrés minima, nous les appellerons les *éléments simples*. On peut appeler éléments complexes les éléments symétriques qui ne sont ni sphériques, ni simples.

3. Une surface est dite *élémentaire* quand son équation dépend d'un seul élément, simple ou complexe. Cette équation est donc de la forme $M = Const.$, ..., et elle exprime que le produit des distances de chacun des points de la surface à K plans fixes concourants $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ est constant. Une telle surface possède un certain nombre de propriétés, indépendantes de la disposition symétrique des K plans, et que nous nous bornerons à énoncer. Elle est asymptotique aux K plans. Pour construire sa normale en un point, il suffit d'abaisser de ce point les perpendiculaires sur les plans asymptotiques, et de les limiter à leur point de rencontre avec un plan mené par l'origine perpendiculairement au rayon vecteur du point considéré. La résultante géométrique des K

droites ainsi obtenues donne la direction de la normale. Le produit des distances interceptées, à partir d'un point de la surface, sur une droite de direction arbitraire, mais fixe, par les plans asymptotiques, a une valeur constante. On en conclut que tout point M de la surface est un point central pour le système de points déterminé par les plans asymptotiques sur une tangente quelconque de la surface au point M. On en conclut aussi que les directions asymptotiques sont imaginaires, et par suite que les deux courbures d'une surface élémentaire sont toujours de même sens. Ceci reste vrai lors même que les plans P ne sont pas concourants, par exemple lorsque ce sont les faces d'un polyèdre régulier.

La transformée d'une surface élémentaire par polaires réciproques, relativement à une sphère ayant son centre à l'origine, peut être considérée comme l'enveloppe d'un plan qui intercepte sur K droites fixes concourantes (les normales aux plans asymptotiques) à partir de leur point de rencontre, K longueurs dont le produit soit constant. Chaque plan tangent à la surface réciproque la touche au centre de gravité du système de points déterminé par ses intersections avec les K droites fixes. Les directions principales sont les axes d'inertie principaux de ce même système. La somme des rayons de courbure principaux varie en raison inverse de la distance du plan tangent à l'origine, et en raison directe du moment d'inertie du système des points d'intersection, par rapport à la normale.

4. Les courbes résultant de l'intersection des surfaces élémentaires symétriques avec les sphères centrales présentent une importance particulière; nous leur donnerons le nom de *sphérosymétriques*. Les sphérosymétriques provenant des surfaces élémentaires d'une même famille, et placées sur un même cone central, sont évidemment homothétiques; on peut aussi les déduire les unes des autres au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques. Dans la transformation par polaires réciproques relativement à une sphère centrale les points d'une sphérosymétrique ont pour correspondants les plans tangents à une sphère le long d'une sphérosymétrique homothétique à la première. Ces plans enveloppent une développable symétrique, circonscrite à la fois à une sphère et à la réciproque de la surface élémentaire qui contient la sphérosymétrique. D'après ce qui a été dit à l'article précédent, la ligne de contact de la développable avec la surface réciproque est une courbe le long de laquelle la somme des rayons de courbure principaux de la

développable varie proportionnellement au moment d'inertie, par rapport à la normale, du système de points formé par les intersections du plan tangent avec les normales à l'origine aux plans asymptotiques. Les lignes de courbure de la développable sont sphériques, et, comme elles résultent de l'intersection de deux surfaces (la développable et la sphère) douées de la même symétrie, elles partagent évidemment cette symétrie. L'arête de rebroussement est, d'après un théorème bien connu, ligne géodésique d'un cone central; cette arête, et le cone lui-même, jouissent aussi de la symétrie considérée.

Si n est le degré de la surface élémentaire, les sphérosymétriques correspondantes sont du degré $2n$. D'après les formules connues[1] la développable formée par les plans tangents à la sphère le long d'une sphérosymétrique est caractérisée par les données suivantes:

Classe (nombre de plans tangents passant par un point donné) $\nu = 2n$
Rang (degré de la développable) . . . . $r = 2n^2$
Nombre de plans stationnaires . . . . $\alpha = 0$

et la connaissance de ces données suffit pour déterminer tous les autres éléments de la surface. Sans insister sur ces détails, voyons seulement quelle est l'influence de la symétrie supposée. Les génératrices de la développable rencontrent à angle droit la sphérosymétrique le long de laquelle elles touchent une même sphère. D'ailleurs, chaque plan de symétrie coupe orthogonalement cette sphérosymétrique en $2n$ points, situés sur une circonférence. Par chacun d'eux passe une génératrice située dans le plan de symétrie, et tangente à la circonférence. On a ainsi $2n$ droites d'intersection du plan de symétrie avec la développable. La section, étant du degré $2n^2$ comprend, en dehors de ces $2n$ droites, une courbe d'ordre $2n(n-1)$. Le long de cette courbe, la développable ne peut rencontrer normalement le plan de symétrie, sans quoi elle se réduirait à un cylindre. Nous avons donc en réalité affaire à une ligne double de la développable: son degré est seulement $n(n-1)$. Elle possède un point de rebroussement en chacun des points où elle rencontre l'arête de rebroussement. Il est facile d'en calculer le nombre. En effet le degré m de l'arête est égal à $3(r-\nu)$ ou à $6n(n-1)$. Chacune des $2n$ génératrices situées dans le plan de symétrie est tangente à l'arête

[1] Voir notamment le *Traité de géométrie analytique* de Salmon.

de rebroussement; par raison de symétrie, elle touche évidemment celle-ci en un point de rebroussement. L'arête de rebroussement possède ainsi $2n$ points de rebroussement dans chaque plan de symétrie. Chacun de ces points correspond à trois points de rencontre de l'arête avec le plan de symétrie. Il reste donc dans le même plan, $6n(n-1)-6n=6n(n-2)$ points de rencontre, qui sont situés sur la ligne double et se réduisent ainsi à $3n(n-2)$ points distincts; tel est le nombre des points de rebroussement de la section, déterminée par le plan de symétrie. Par exemple, pour $n=3$, la section est une sextique ayant 9 points de rebroussement.

Considérons maintenant un plan sécant quelconque P. Il coupe la surface développable qui nous occupe suivant une courbe d'ordre $2n^2$. Sa trace sur un plan de symétrie rencontre la ligne double contenue dans celui-ci en $n(n-1)$ points qui sont des points doubles de la section faite par ce plan P. Si p est le nombre des plans de symétrie, on connaît ainsi $pn(n-1)$ points doubles. Mais, d'après les formules générales, le nombre des points doubles doit être égal à $\frac{1}{2}r(r-2)-\frac{4}{3}m$ ou bien $2n^2(n^2-1)-8n(n-1)$. Si donc p est inférieur à

$$\frac{2n^2(n^2-1)-8n(n-1)}{n(n-1)}$$

c'est à dire à $2(n^2+n-4)$, la surface développable possède des lignes doubles en dehors des plans de symétrie; on s'assure facilement que tel est toujours le cas. Outre les $2n(n^3-5n+4)$ points doubles qui viennent d'être indiqués, la section possède $6n(n-1)$ points de rebroussement situés sur l'arête de rebroussement.

On peut également étudier la surface développable formée par les tangentes à une sphérosymétrique. Son degré r est le même que celui de la réciproque de cette courbe, c'est à dire $2n^2$. L'arête de rebroussement est du degré $m=2n$, et elle n'a généralement pas de points doubles. Ici, les plans de symétrie ne contiennent pas de génératrices, et rencontrent la surface suivant des courbes d'ordre n^2. Le nombre des points doubles d'une section quelconque est $4n^2(n^2-2)$. pn^2 de ces points sont, comme précédemment, dans les plans de symétrie, et, comme p se trouve toujours inférieur à $4(n^2-2)$, il y a nécessairement des lignes doubles en dehors des plans de symétrie.

5. Nous entendons par *surfaces binaires* celles qui dépendent de deux éléments seulement, y compris l'élément sphérique. Leur équation est donc de la forme

$$(1) \qquad F(L,\ M) = 0$$

L étant l'élément sphérique $x^2 + y^2 + z^2$, et M, l'élément d'ordre m, égal au produit des distances du point x, y, z aux plans P_1, P_2, ..., P_m. Nous admettrons que ces plans sont distincts, et nous les appellerons *plans directeurs.* Toute surface élémentaire $M = Const.$ coupe la surface binaire considérée suivant une ou plusieurs courbes sphériques, qui sont des sphérosymétriques d'ordre $2m$. En écrivant que l'équation (1), considérée comme équation en M, a une racine double, on obtient certaines valeurs de L, déterminant les sphérosymétriques le long de chacune desquelles la surface binaire est touchée par une surface élémentaire. En faisant $M = 0$, on obtient une équation en L déterminant les rayons de diverses sphères qui coupent chacune la surface suivant m cercles situés dans les plans directeurs; nous les appellerons les *sphères directrices.* Chacune d'elles est touchée par la surface aux $m(m-1)$ points où elle est rencontrée par les arêtes d'intersection des plans directeurs pris deux à deux. S'il y a p sphères directrices, chaque plan directeur coupe la surface suivant p cercles, et la surface possède ainsi pm cercles.

L'équation homogène $M^2 - AL^m = 0$, où A est une constante, représente un cone central d'ordre $2m$. Ce cone rencontre la surface suivant des sphérosymétriques situées sur les sphères déterminées par l'équation

$$(2) \qquad F\left(L,\ L^{\frac{m}{2}}\sqrt{A}\right) = 0.$$

Si l'on choisit A de telle façon que cette équation en L ait une racine double λ, le cone central touche la surface le long d'une sphérosymétrique située sur la sphère $L = \lambda$. Cette sphère coupe orthogonalement la surface binaire, qui admet par suite comme ligne de courbure la sphérosymétrique d'intersection.

Supposons en particulier que la surface soit algébrique, et que

l'élément M entre au premier degré dans son équation, que nous écrirons alors:

$$M = \frac{\varphi(L)}{\psi(L)}, \tag{3}$$

φ et ψ étant des polynômes de degrés p et q, sans racines communes. Les p sphères directrices ont pour rayons les racines carrées des racines de $\varphi(L) = 0$. Les q sphères $\psi(L) = 0$ ne peuvent rencontrer la surface qu'à l'infini, et n'ont avec celle-ci aucun point réel commun. Si donc elles sont réelles, elles partagent l'espace en régions telles que la surface ne peut passer réellement de l'une dans l'autre. L'équation (2) prend ici la forme:

$$\sqrt{A}\, L^{\frac{m}{2}} \psi(L) - \varphi(L) = 0.$$

Pour une racine double L, on a:

$$\frac{m}{2}\sqrt{A}\, L^{\frac{m}{2}-1} \psi(L) + \sqrt{A}\, L^{\frac{m}{2}} \psi'(L) - \varphi'(L) = 0,$$

d'où, en éliminant A:

$$\frac{m}{2}\varphi(L)\psi(L) + L\psi'(L)\varphi(L) - L\varphi'(L)\psi(L) = 0, \tag{4}$$

équation qui est généralement du degré $p + q$ en L. Par conséquent il y a $p + q$ sphères centrales orthogonales à la surface binaire représentée par l'équation (3).

Un cas très important est celui où $\psi(L)$ se réduit à une constante. On a alors $M = \varphi(L)$, et la surface est le lieu des points dont le produit des puissances par rapport à p sphères concentriques est proportionnel au produit des distances à m plans concourant au centre de ces sphères. Pour chaque type de symétrie, la surface générale du degré le plus bas possible est représentée par une équation de cette nature. Car, si M est l'élément non sphérique le plus simple relatif à la symétrie considérée, en prenant pour $\varphi(L)$ un polynôme de degré égal au plus grand entier contenu dans $\frac{m}{2}$ on obtient évidemment la surface de degré minimum. Pour étudier ce cas, il suffit de supposer $q = 0$, et alors on voit que le

nombre des sphères orthogonales est précisément égal au nombre des sphères directrices. De plus, l'équation (4) se réduit à:

$$(5) \qquad m\varphi(L) - 2L\varphi'(L) = 0.$$

Cette équation est en général du degré p, et ses racines sont entièrement déterminées par celles de $\varphi(L)$. On voit donc que:

Les surfaces $M = C\varphi(L)$, où M est un élément symétrique d'ordre m, C une constante arbitraire et $\varphi(L)$ un polynôme de degré p en L, forment un faisceau contenant mp cercles fixes, situés à l'intersection des m plans directeurs avec les p sphères directrices; ce faisceau coupe orthogonalement p sphères fixes, concentriques aux premières.

Il y a cependant une exception lorsque le degré de l'équation (5) se trouve abaissé au dessous de p. Cette circonstance se produit si $m = 2p$, c'est-à-dire si le nombre des plans directeurs est égal à deux fois celui des sphères directrices. Alors les sphères orthogonales sont au nombre de $p - 1$ seulement; la dernière est rejetée à l'infini.

Quand il y a deux sphères directrices confondues en une seule, $\varphi(L) = 0$ et $\varphi'(L) = 0$ ont une racine commune, qui vérifie l'équation (5). La sphère directrice est donc dans ce cas orthogonale à la surface, et, comme elle doit généralement toucher la surface en $m(m-1)$ points, il en résulte que la surface possède, sur cette sphère, $m(m-1)$ points où le plan tangent est indéterminé: c'est-à-dire $m(m-1)$ points nodaux.

6. Toute surface symétrique dont l'équation peut se mettre sous la forme:

$$f = \varphi(M, N, L) + \psi(L) = 0,$$

(φ désignant une fonction homogène des trois éléments symétriques, et ψ, une fonction de l'élément sphérique dont le degré par rapport aux coordonnées soit inférieur à celui de φ), jouit également de la propriété de rencontrer orthogonalement un certain nombre de sphères centrales. En effet, pour exprimer qu'un plan tangent:

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + Tf'_t = 0$$

représenté par une équation rendue homogène, passe par l'origine, il suffit

de poser la condition $f_t' = 0$. Or cette condition, d'après l'hypothèse admise, dépend uniquement de l'élément sphérique; elle détermine donc les rayons d'une ou de plusieurs sphères orthogonales à la surface symétrique. On voit en outre que, si la surface a des points nodaux, ses points, devant vérifier la condition $f_t' = 0$, appartiennent à l'une des sphères orthogonales, et par conséquent à l'une des lignes de courbure sphériques.

7. Lorsqu'une surface binaire contient une droite réelle, celle-ci coupe les m plans directeurs en m points réels, qui se trouvent nécessairement sur les sphères directrices. Il faut donc que $\frac{m}{2}$ sphères directrices au moins soient réelles. Remarquons de plus que le plan mené par la droite et par l'origine coupe ces sphères suivant des cercles concentriques, et les plans directeurs suivant des rayons aboutissant aux points de rencontre de la droite avec les cercles. Les traces des plans directeurs sont donc symétriquement disposées de part et d'autre du rayon perpendiculaire à la droite. Cela n'est en général possible que si ce rayon est la trace d'un plan de symétrie perpendiculaire à la droite. Donc *les droites réelles de la surface sont perpendiculaires aux plans de symétrie.* Ce raisonnement n'est nullement applicable aux droites imaginaires, pour lesquelles les considérations de symétrie n'apprennent plus rien. On peut s'en convaincre en remarquant que, dans un plan, les deux droites $x^2 + y^2 = 0$ forment un système doué d'une infinité d'axes de symétrie, ce qui serait absurde pour des droites réelles.

Réciproquement, si on considère une droite réelle perpendiculaire à un plan de symétrie, et une surface binaire d'ordre K, dont l'équation $F(L, M) = 0$ renferme un nombre n de coefficients arbitraires supérieur à $\frac{K}{2}$, on peut déterminer ces coefficients de façon que la surface passe par n points de la droite, placés d'un même côté du plan de symétrie. La surface passera alors par $2n$ points de la droite, et contiendra par suite cette dernière ainsi que toutes celles qui lui correspondent par symétrie.

8. Dès qu'on est en possession d'une surface pourvue des plans de symétrie d'un polyèdre régulier, on peut imaginer une infinité de transformations qui n'altèrent pas sa symétrie. On peut, par exemple, employer la transformation par rayons vecteurs réciproques ou par polaires

réciproques relativement à une sphère centrale. On peut aussi considérer le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à la surface et à une sphère centrale est constant; on obtient ainsi une surface nouvelle douée évidemment de la même symétrie que la première. En faisant varier la somme ou la différence considérée, on réalise une double famille de surfaces symétriques orthogonales.

9. Les polyèdres réguliers convexes sont au nombre de cinq; mais, si l'on tient compte seulement de leur genre de symétrie, ils se ramènent à trois types:

1°. Symétrie tétraédrique (le tétraèdre),
2°. » cuboctaédrique (l'hexaèdre et l'octaèdre),
3°. » icosidodécaédrique [1] (le dodécaèdre et l'icosaèdre).

Le premier type dérive du second par disparition d'un centre de symétrie (hémiédrie). Les polyèdres réguliers non convexes appartiennent tous au troisième type.

Nous étudierons successivement les surfaces qui se rapportent aux trois types, en supposant essentiellement que les coefficients de leurs équations sont réels.

Deuxième partie. Surfaces du type tétraédrique.

9. Le type tétraédrique est caractérisé par six plans de symétrie perpendiculaires deux à deux; ce sont les plans menés par les six arêtes du tétraèdre et par le centre de la sphère circonscrite. Leur existence entraine celle de quatre axes ternaires (les quatre hauteurs) et de trois axes binaires, rectangulaires deux à deux, joignant les milieux des arêtes opposées. Il n'y a pas de centre de symétrie.

Prenons comme axes de coordonnées les trois axes binaires, et, pour fixer les idées, supposons l'axe des z vertical. Les trois plans de coordonnées, que nous appellerons *plans principaux,* jouissent alors de la symétrie du système, et, comme ils sont distincts des plans de symétrie, le

---

[1] Ces dénominations sont empruntées aux recherches de M. JORDAN sur les polyèdres (Journal de CRELLE, t. 68, 1868).

produit $M = xyz$ des distances d'un point quelconque à ces trois plans nous donne un élément symétrique. Le produit N des distances d'un point aux quatre plans menés par l'origine perpendiculairement aux axes ternaires fournit le second élément dont nous avons besoin. Ces quatre plans ont pour équations: $x \pm y \pm z = 0$. On peut donc, en négligeant un facteur constant, poser:

$$N = -(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$
$$= x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2$$

et l'équation générale des surfaces cherchées se trouve mise sous la forme:

$$\varphi(x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2,\ xyz,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

En vertu de l'identité:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2),$$

la même équation peut s'écrire:

$$\psi(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2,\ xyz,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

ou

$$\chi(x^4 + y^4 + z^4,\ xyz,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Les degrés des éléments sont $m = 3$, $n = 4$, d'où $m + n - 1 = 6$, ce qui est précisément le nombre des plans de symétrie. Ce résultat concorde avec ce qui a été dit au n° 2. D'ailleurs, il est évident que les valeurs des trois quantités:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u$$
$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = v$$
$$xyz = w$$

peuvent servir à fixer la position d'un point dans l'espace avec l'indétermination nécessitée par la symétrie tétraédrique; si l'on forme en effet l'équation en S

$$S^3 - uS^2 + vS - w^2 = 0,$$

les trois racines, rangées arbitrairement, donnent les valeurs de x^2, y^2, z^2, soit en tout six solutions. Si l'on choisit en outre les signes de x, y, z de manière à vérifier l'équation $xyz = w$, on parvient à un groupe de 24 points répondant à la symétrie tétraédrique.

10. La surface tétraédrique la plus simple est, après la sphère, la surface cubique qui a pour équation générale:

$$xyz + A(x^2 + y^2 + z^2) + B = 0.$$

Par chaque point de cette surface passe une sphérosymétrique du 6ème ordre, et une seule. D'ailleurs, les deux plans, réels ou imaginaires menés parallèlement à xoy, à une distance z de l'origine déterminée par la condition $Az^2 + B = 0$, coupent chacun la surface suivant deux droites représentées par l'équation

$$A(x^2 + y^2) + xy\sqrt{-\frac{B}{A}} = 0$$

Ces deux droites rencontrent l'axe des z, et la connaissance d'une seule d'entre elles suffit pour déterminer complétement la surface. On peut donc dire que:

La surface cubique symétrique est engendrée par une sphérosymétrique du 6ème ordre assujettie à s'appuyer constamment sur une droite, réelle ou imaginaire, qui rencontre orthogonalement l'un des axes binaires.

Une sphérosymétrique du 6ème ordre a pour équations:

$$x^2 + y^2 + z^2 = Const.,$$

$$xyz = Const.$$

On tire de là:

$$\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{y(z^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)}.$$

Cette courbe rencontre orthogonalement une surface définie par l'équation différentielle:

$$xdx(y^2 - z^2) + ydy(z^2 - x^2) + zdz(x^2 - y^2) = 0$$

dont l'intégrale peut s'écrire:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0 \tag{1}$$

α, β, γ étant trois constantes dont la somme est nulle. On déduit de là que:

Les sphérosymétriques du $6^{\text{ème}}$ *ordre sont les trajectoires orthogonales des cones du second ordre passant par les quatre axes ternaires; par conséquent, celles qui sont tracées sur une même sphère sont les trajectoires orthogonales de coniques sphériques passant par quatre points fixes d'un même hemisphère.*

On sait [1] que les coniques sphériques circonscrites à un quadrilatère rectiligne imaginaire de la sphère sont des courbes telles que, pour chacune d'elles, il y a un rapport constant entre les distances de ses points à deux diamètres fixes D, Δ, et que cette famille de courbes a pour trajectoires orthogonales les courbes, lieux des points M pour lesquels les grands cercles MD, $M\Delta$ font un angle constant. Ces trajectoires orthogonales sont des cycliques, transformées par rayons vecteurs réciproques d'ellipses de Cassini. Si, dans le cas des sphérosymétriques qui nous occupent, on remplace γ par $-\gamma$, l'on a $\gamma = \alpha + \beta$, et la relation (1) devient:

$$\alpha(x^2 + z^2) + \beta(y^2 + z^2) = 0.$$

Elle exprime alors que le rapport des distances de la conique sphérique aux deux axes ox, oy est constant, et l'on rentre ainsi dans le cas précédent. On parvient au même résultat en remplaçant z par iz, sans changer γ; de là un rapprochement intéressant entre les sphérosymétriques et une classe de cycliques sphériques.

La surface cubique contenant en chacun de ses points une sphérosymétrique, on voit que:

La surface cubique symétrique rencontre orthogonalement tous les cones du second ordre circonscrits aux axes ternaires.

Cette propriété subsiste pour les surfaces binaires d'ordre supérieur dont l'équation dépend des deux premiers éléments, $x^2 + y^2 + z^2$ et xyz. Le troisième élément convient, comme on le verra, aux surfaces du type cuboctaédrique aussi bien qu'à celles du type tétraédrique. On peut donc dire que son absence caractérise une surface appartenant purement au type tétraédrique, et énoncer alors ce théorème:

---

[1] Voir l'ouvrage: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Mém. de la société des sciences de Bordeaux, 1870—1873) par M. Darboux.

Toute surface appartenant purement au type tétraédrique est trajectoire orthogonale des cones du second ordre circonscrits aux axes ternaires.

On achève de déterminer la surface en se donnant une courbe, par exemple une section horizontale. La surface est cubique, comme on l'a vu précédemment, si elle contient une droite rencontrant à angle droit l'un des axes binaires.

11. Les équations différentielles d'une sphérosymétrique peuvent s'écrire:

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0.$$

La tangente en un point est donc perpendiculaire à la fois au rayon vecteur issu de l'origine, et à la droite, lieu des points dont les coordonnées sont proportionnelles à $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$. Cette droite peut être appelée *l'inverse* de celle qui coïncide avec le rayon vecteur. En outre, les sphérosymétriques rencontrant la droite inverse ont également, à leurs points de rencontre, des tangentes perpendiculaires au plan des deux droites. Tout plan mené par l'origine contient, comme il est aisé de le voir, deux droites inverses l'une de l'autre et deux seulement. Chacune d'elles rencontre une surface cubique symétrique en trois points, et, en chacun de ces points, le plan tangent est normal au plan considéré. Par conséquent:

Tout plan mené par l'origine est normal à une cubique symétrique en six points, situés sur deux droites inverses.

12. La sphère, réelle ou imaginaire, dont le rayon a vérifie la relation $Aa^2 + B = 0$, coupe la surface suivant trois grands cercles situés dans les plans principaux. On peut distinguer deux genres de surfaces cubiques symétriques, suivant que cette sphère est réelle ou imaginaire. Comme cas intermédiaire il y a celui d'une sphère directrice évanouissante; la surface possède alors un point isotrope à l'origine. En mettant en évidence le rayon de la sphère directrice, nous écrirons l'équation sous la forme:

$$2xyz - b(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 0.$$

Comme on est maître de l'orientation des axes, on peut toujours supposer que b est positif.

13. L'équation précédente dépendant seulement de deux constantes, il est évident que toute équation représentant une surface cubique douée de la même symétrie que le tétraèdre régulier, et contenant deux constantes arbitraires, doit conduire à des résultats identiques. Chacune de ces formes d'équation correspond à un mode de génération des surfaces cubiques symétriques. Par exemple, si on appelle t, u, v, w les distances d'un point aux quatre faces d'un tétraèdre régulier de hauteur h, comptées toutes positivement lorsque le point est à l'intérieur du tétraèdre, et si l'on écrit, en appelant m une constante:

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = m^3$$

avec la condition évidente:

$$t + u + v + w = h,$$

la surface ainsi représentée en coordonnées tétraédriques ne peut différer de la cubique symétrique; car son équation dépend des deux constantes m et h. Un calcul facile conduit en effet de l'équation cartésienne:

$$2xyz - b(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 0$$

à l'équation tétraédrique:

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = \frac{4b}{\sqrt{3}}\left(a^2 + \frac{1}{3}b^2\right),$$

pourvu que la hauteur h du tétraèdre soit prise égale à $\frac{4b}{\sqrt{3}}$.

Il résulte de là que:

La cubique symétrique est le lieu des points tels que la somme des cubes de leurs distances aux quatre faces d'un tétraèdre soit constante.

Le tétraèdre ainsi déterminé mérite spécialement le nom de *tétraèdre de référence.* Il y a lieu d'observer que la hauteur h du tétraèdre, et par conséquent toutes ses dimensions, sont indépendantes du rayon a de la sphère directrice. On peut donc dire qu'une surface cubique symétrique est déterminée par les dimensions de sa sphère directrice et de son tétraèdre de référence. Le paramètre b est égal à la distance des arêtes

du tétraèdre au centre de la sphère, ou, si l'on veut, à la moitié de la plus courte distance de deux arêtes opposées.

On doit à SYLVESTER la forme canonique de l'équation générale des surfaces du $3^{\text{ème}}$ degré:

$$\alpha t^3 + \beta u^3 + \gamma v^3 + \delta w^3 + \varepsilon \omega^3 = 0$$

équation dans laquelle t, u, v, w, ω sont les distances d'un point de la surface à cinq plans, et α, β, γ, δ, ε sont des coefficients arbitraires. SYLVESTER a en outre annoncé, et CLEBSCH a démontré que, pour une surface donnée, la réduction ne peut se faire que d'une seule manière. Ce qui précède montre que, dans le cas des cubiques symétriques, le pentaèdre de référence se compose d'un tétraèdre régulier et du plan de l'infini.

14. On peut toujours, en partant de la forme réduite de SYLVESTER, supposer que les cinq variables satisfont à la relation:

$$t + u + v + w + \omega = 0.$$

Il suffit pour cela de substituer à chacune d'elles son produit par un facteur constant, convenablement choisi. L'équation du hessien est alors (voir SALMON, *Géométrie à trois dimensions*):

$$\frac{1}{\alpha t} + \frac{1}{\beta u} + \frac{1}{\gamma v} + \frac{1}{\delta w} + \frac{1}{\varepsilon \omega} = 0.$$

Dans le cas de la surface symétrique, la relation identique est: $t + u + v + w - h = 0$. Il suffit donc de prendre $h = -\omega$ pour rentrer dans le cas précédent, et l'équation du hessien est par conséquence:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{1}{\varepsilon h}.$$

C'est une surface symétrique du $4^{\text{ème}}$ degré. En vertu d'un théorème de SYLVESTER, les 10 sommets du pentaèdre de référence sont des points doubles du hessien, et ses dix arêtes sont situées sur la même surface. Donc, dans le cas actuel:

Le hessien de la surface cubique symétrique est une surface du $4^{\text{ème}}$ degré circonscrite au tétraèdre de référence et coupant en outre chacune des

faces suivant une droite à l'infini. Les quatre sommets du tétraèdre, et les points à l'infini sur chaque arête, sont des points doubles de la même surface.

Si l'on pose:

$$Tt = Uu = Vv = Ww = \lambda,$$

T, U, V, W étant de nouvelles variables, et λ, une constante, l'équation du hessien prend la forme:

$$T + U + V + W = \frac{\lambda}{\varepsilon h}$$

avec la condition:

$$\frac{1}{T} + \frac{1}{U} + \frac{1}{V} + \frac{1}{W} = \frac{h}{\lambda}.$$

En prenant $\lambda = \varepsilon h^2$, on retrouve les équations entre t, u, v, w qui caractérisent le hessien. Par conséquent, *les points du hessien se correspondent deux par deux de telle façon que leurs coordonnées tétraédriques soient inversement proportionnelles.*

15. Lorsque la sphère directrice est imaginaire, et que le carré de son rayon est égal à $-\frac{1}{3}b^2$, l'équation tétraédrique se réduit à:

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = 0.$$

Elle rentre alors dans le type général:

$$\left(\frac{t}{\alpha}\right)^m + \left(\frac{u}{\beta}\right)^m + \left(\frac{v}{\gamma}\right)^m + \left(\frac{w}{\delta}\right)^m = 0$$

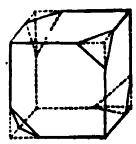
où m est un nombre rationnel et α, β, γ, δ sont des coefficients arbitraires, le tétraèdre de référence ayant d'ailleurs une forme quelconque. C'est l'équation générale des surfaces que M. de la Gournerie a étudiées sous la dénomination de »surfaces tétraédrales symétriques simples» (Paris, 1867). Quel que soit m, il est évident qu'en supposant les coefficients égaux et prenant pour tétraèdre de référence un tétraèdre régulier on obtient des surfaces possédant la même symétrie que ce dernier. Mais ce ne sont pas, au point de vue de la symétrie, les surfaces les plus générales de leur degré. Pour $m = \frac{1}{2}$, on a la surface de Steiner; pour $m = -1$, on a la surface réciproque de celle de Steiner. Cette der-

nière est une forme limite de la surface hessienne, déjà envisagée; il suffit de supposer que le coefficient ε augmente indéfiniment, et par conséquent que la cubique symétrique s'éloigne tout entière à l'infini, par suite de l'agrandissement de sa sphère directrice.

16. Nous devons maintenant déterminer, dans le cas de la surface cubique symétrique, la position des 27 droites qui existent, comme l'on sait, sur toute surface cubique, et faire connaître leurs conditions de réalité. D'abord, la surface possède à l'infini trois droites réelles, situées dans les plans principaux. Toute autre droite, D, de la surface coupe le plan de l'infini en un point qui appartient à la section de la surface par ce plan, et par conséquent à un plan principal. Supposons-la parallèle au plan xoy. Si l'on mène par la droite D un plan parallèle à xoy, il coupe la surface suivant une courbe du 3ème degré comprenant la droite D et une droite à l'infini. Le reste de l'intersection est donc formé d'une autre droite D', à distance finie, et tout revient à chercher, parmi les sections parallèles aux plans principaux, celles qui se décomposent en deux droites.

Ceci posé, une discussion bien facile montre qu'il existe deux cubes, admettant l'un et l'autre les plans principaux pour plans de symétrie, dont les faces coupent chacune la surface suivant deux droites. Le premier est circonscrit au tétraèdre de référence; c'est à dire que son arête est égale à b, et qu'il est toujours réel. Chacune de ses faces rencontre la surface suivant deux droites parallèles entre elles et à une arête du tétraèdre (diagonale d'une face du cube). Ces droites ne sont réelles que si a^2 est positif et supérieur à b^2, par conséquent si la sphère directrice rencontre réellement les arêtes du tétraèdre. Les droites se groupent trois par trois autour de quatre sommets du cube, de manière à constituer quatre facettes parallèles aux faces du tétraèdre. Dans le langage cristallographique, on dirait que ces facettes sont obtenues par une modification hemiédrique du cube, due à des plans tangents sur quatre sommets (Fig. 2). Nous appellerons *droites du premier système* les douze droites ainsi obtenues. Le second cube est circonscrit à la sphère directrice. Chacune de ses faces coupe la surface suivant deux droites passant par le point de contact avec la sphère. De là douze droites, que nous appellerons les *droites du second système*, et qui sont réelles ou imaginaires en même

Fig. 2.



temps que celles du premier. On peut, de deux manières différentes, les grouper en trois quadrilatères gauches. Si elles sont réelles, le cube qui les contient est extérieur à celui qui contient les douze premières droites. Si elles sont imaginaires, leur cube est également imaginaire, et il est impossible de faire passer par l'une d'elles un plan réel. Si l'on considère quatre droites du premier système non situées dans le même plan, il existe deux droites qui rencontrent les quatre droites à la fois, et qui par conséquent appartiennent à la surface cubique; ce sont nécessairement des droites du second système.

En résumé, les 27 droites de la surface sont: les 3 droites de l'infini, les 12 droites du premier système, les 12 droites du second. Les droites de l'infini sont toujours réelles; les autres sont, toutes ensemble, réelles ou imaginaires. On sait que chaque droite d'une cubique est rencontrée par dix autres. Ici, en appelant couple de droites deux droites symétriques par rapport à l'un des plans de symétrie, on trouve qu'une droite du premier système est rencontrée par

1 droite à l'infini	1
1 droite parallèle, du 1er système	1
2 couples de droites du 1er système	4
2 » du 2e »	4
	10.

Une droite du second système est rencontrée par:

1 droite à l'infini.	1
4 droites du 1er système	4
1 droite du 2e système (au centre d'une face du cube).	1
4 droites » (sur les arêtes du cube) . . .	4
	10.

Enfin, une droite à l'infini est rencontrée par:

2 droites à l'infini	2
2 couples de droites du 1er système	4
2 » » du 2e »	4
	10.

On sait encore qu'une surface cubique a 45 plans tritangents, contenant chacun trois droites de la surface. Ici, nous avons:

	Le plan de l'infini	1
3 fois:	1 droite de l'infini et 2 couples de droites du 1^{er} système	6
3 fois:	1 droite de l'infini et 2 couples de droites du 2^{e} système	6
2 fois:	4 plans, contenant chacun 3 droites du 1^{er} système . .	8
2 fois:	12 plans, contenant chacun 1 droite du 1^{er} système et 2 du $2^{ème}$ . .	24
		45.

Le cube qui contient les droites du 1^{er} système étant toujours réel, ainsi que le plan de l'infini, il y a au moins 7 plans tritangents réels.

Observons encore qu'il y a 6 plans tritangents contenant chacun 3 droites concourantes (savoir, une droite à l'infini et deux droites concourantes). C'est une particularité qui se conserverait dans toute transformation homographique de la surface, et, comme en général une surface du $3^{ème}$ ordre n'a pas 3 droites concourantes et situées dans un même plan, il est généralement impossible de ramener homographiquement une surface cubique à la forme symétrique. Du reste, si l'on se donne les plans principaux d'une surface cubique symétrique, l'équation de celle-ci ne renferme que deux coefficients. La transformation homographique en introduit 15, ce qui fait en tout 17, tandis qu'il en faudrait 19 pour parvenir à l'équation la plus générale.

17. Toute section de la cubique symétrique par un plan réel possède à l'infini 3 points réels. Si donc elle est indécomposable, c'est une *hyperbole redondante* de NEWTON. Il n'y a d'exception que si deux points à l'infini sont confondus, et l'on a alors une *hyperbole parabolique.* Ce dernier cas se présente lorsque le plan de la section est parallèle à l'un des axes binaires.

Par chaque point de la surface passent 27 coniques, situées dans les plans menés par les 27 droites. La section complète déterminée par l'un de ces plans a 3 points réels à l'infini, dont l'un sur la droite. La conique a donc à l'infini deux points réels, et appartient au genre

hyperbole. Il n'y a d'exception que dans deux cas: 1°. Si les points à l'infini sont tous sur la droite, qui est par suite l'une des droites de l'infini; alors le plan sécant est parallèle à un plan principal, et la conique est d'un genre quelconque. 2°. Si les deux points à l'infini de la conique sont confondus; l'hyperbole dégénère alors en parabole. Il faut et il suffit pour cela que le plan sécant rencontre deux droites de l'infini au même point, autrement dit qu'il passe par un sommet du triangle de l'infini, et, par conséquent, qu'il soit parallèle à une direction binaire. Comme il contient déjà une droite de la surface, c'est à dire une parallèle à l'un des plans principaux, et comme les directions binaires sont parallèles ou perpendiculaires aux plans principaux, le plan sécant est lui-même parallèle à un plan principal, ce qui donne deux droites, ou perpendiculaire, ce qui donne une parabole proprement dite. Il y a ainsi 24 paraboles, correspondant aux 24 droites à distance finie.

En discutant la forme des sections parallèles aux plans principaux, on s'assure sans peine qu'il y a au plus trois cercles réels sur la surface, à savoir ceux qui sont situés dans les plans principaux. Ces cercles ne sont réels que si la sphère directrice est elle-même réelle. Il existe en outre des cercles toujours imaginaires, au sujet desquels nous nous bornerons à l'énoncé suivant:

Chacune des douze droites du premier système est associée à deux cercles imaginaires, qu'elle rencontre aux mêmes points.

18. Les sections de la surface faites par des sphères centrales sont des sphérosymétriques du 6ème ordre, dont l'une, celle qui est déterminée par la sphère directrice, se décompose en trois cercles rectangulaires. Si la sphérosymétrique rencontre les quatre axes ternaires, elle se réduit évidemment aux 8 points situés sur ces 4 axes, car elle est, comme on l'a montré, une trajectoire orthogonale des coniques sphériques passant par ces 8 points; c'est une sphérosymétrique évanouissante. Le rayon ρ de la sphère correspondante s'obtient en faisant $x = y = z = \pm\frac{\rho}{\sqrt{3}}$ dans l'équation de la surface, ce qui donne pour x:

$$2x^3 - b(3x^2 - a^2) = 0.$$

L'équation dérivée est $x(x - b) = 0$, et ses racines, substituées dans le premier membre de la proposée, donnent respectivement ba^2 et $b(a^2 - b^2)$.

Le quotient est $1 - \frac{b^2}{a^2}$. La condition de réalité des trois racines de l'équation en x, et par suite des trois valeurs de ρ, est que ce quotient soit négatif, d'où $\frac{b^2}{a^2} > 1$. D'après cela:

La surface cubique symétrique possède une ou trois sphérosymétriques réelles évanouissantes, suivant que ses 24 droites à distance finie sont imaginaires ou réelles.

19. Si l'on mène par l'origine une droite ayant pour cosinus directeurs α, β, γ, elle rencontre la surface en trois points, et les distances ρ_1, ρ_2, ρ_3 de ces trois points à l'origine sont les racines de l'équation

$$2\alpha\beta\gamma\rho^3 - b(\rho^2 - a^2) = 0.$$

La somme algébrique des trois distances, égale à $\frac{b}{2\alpha\beta\gamma}$, est indépendante de a^2. Par conséquent:

La somme des longueurs interceptées à partir de l'origine, sur une droite donnée, par toutes les cubiques symétriques qui ont mêmes plans de symétrie est proportionnelle à l'arête du tétraèdre de référence et indépendante du rayon de la sphère directrice.

Si l'on prend, sur chaque droite menée par l'origine, le centre de gravité des trois points de rencontre avec une cubique symétrique donnée, le lieu de ce centre est la surface:

$$6xyz - b(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

C'est une cubique symétrique à sphère directrice évanouissante.

Faisons varier la direction α, β, γ de façon que l'une des racines de l'équation en ρ ne change pas. Pour cela, il faut et il suffit que le produit $\alpha\beta\gamma$ soit constant, et par suite les deux autres racines ne changent pas non plus. Il en résulte que:

Tout cone ayant son sommet à l'origine et passant par une sphérosymétrique de la surface coupe celle-ci suivant deux autres sphérosymétriques.

Observons encore que les deux racines, 0 et $\frac{b}{3\alpha\beta\gamma}$, de l'équation dérivée, substituées dans l'équation primitive, donnent respectivement au

premier membre les valeurs ba^2 et $ba^2 - \frac{b^3}{27\alpha^2\beta^2\gamma^2}$, dont le rapport est $1 - \frac{1}{27\alpha^2\beta^2\gamma^2} \times \frac{b^2}{a^2}$. La condition nécessaire et suffisante pour la réalité des trois valeurs de ρ est que ce rapport soit négatif, ou bien que $27\alpha^2\beta^2\gamma^2$ soit inférieur à $\frac{b^2}{a^2}$. Comme on a toujours $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, la valeur maxima de $27\alpha^2\beta^2\gamma^2$ est l'unité. Par conséquent, si b est supérieur à a (autrement dit si les droites de la surface sont réelles) tous les rayons vecteurs issus de l'origine rencontrent la surface en trois points réels. Dans le cas contraire, ils rencontrent la surface en un ou trois points, suivant qu'il sont d'un côté ou de l'autre du cone circonscrit ayant son sommet à l'origine. Si a est imaginaire ce cone est également imaginaire, et tous les rayons vecteurs rencontrent la surface en un seul point réel.

20. Si l'on cherche la section faite dans la surface par une sphère de rayon R ayant son centre sur l'un des axes binaires, Oz par exemple, à une distance m de l'origine, on trouve que pour $R = \sqrt{m^2 + a^2}$ la section se décompose en un cercle, situé dans le plan principal xOy, et une conique sphérique projetée sur le même plan suivant l'hyperbole équilatère $xy = mb$. Par chaque point de la surface passent ainsi trois coniques sphériques, situées sur trois sphères dont chacune contient l'un des trois cercles situés dans les plans principaux. Chacune de ces sphères touche la surface en quatre points situés sur le cercle correspondant. Pour $m^2 + a^2 = 0$, le rayon R s'annule, et le centre de la sphère est un foyer. Il y a ainsi six foyers, situés sur les axes binaires, aux points où ils sont rencontrés par une sphère orthogonale et concentrique à la sphère directrice. Si la sphère directrice est réelle, les foyers sont imaginaires, et inversement. Pour les valeurs de m égales à $-b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$, la conique sphérique se décompose en deux cercles imaginaires; on retrouve ainsi les 24 cercles imaginaires dont il a déjà été parlé. On voit en même temps qu'il existe, en dehors de la sphère directrice, douze sphères, réelles ou imaginaires, rencontrant chacune la surface suivant trois cercles, dont deux imaginaires.

21. Il est facile de trouver les trajectoires orthogonales des cu-

biques symétriques possédant le même tétraèdre de référence. Les équations différentielles d'une telle courbe sont:

$$\frac{dx}{yz - bx} = \frac{dy}{zx - by} = \frac{dz}{xy - bz},$$

b désignant une constante. On les vérifie en posant:

$$x = bkt \operatorname{sn}(t + C)$$

$$y = - bikt \operatorname{cn}(t + C)$$

$$z = - bit \operatorname{dn}(t + C).$$

Dans ces formules, t est une variable auxiliaire, C est une constante arbitraire, et k est le module, également arbitraire, des fonctions elliptiques qui figurent dans les seconds membres. Les résultats sont réels pourvu que t et k soient réels, que k soit inférieur à l'unité, et que C soit égal à $h + k'i$, h étant réel et k' étant le module complémentaire $\sqrt{1 - k^2}$.

Il est également aisé de trouver les trajectoires orthogonales des cubiques symétriques qui possèdent même sphère directrice et mêmes plans principaux. Si l'on élimine le paramètre variable b entre les équations différentielles précédentes et celle de la surface cubique, il vient:

$$\frac{xdx}{y^2 + z^2 - x^2 - a^2} = \frac{ydy}{z^2 + x^2 - y^2 - a^2} = \frac{zdz}{x^2 + y^2 - z^2 - a^2}$$

et l'on vérifie ces nouvelles équations en posant:

$$x^2 = a^2 + t + \frac{\alpha}{t^2},$$

$$y^2 = a^2 + t + \frac{\beta}{t^2},$$

$$z^2 = a^2 + t + \frac{\gamma}{t^2}.$$

Les constantes α, β, γ sont assujetties à la condition $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

En éliminant t de deux façons différentes, on peut représenter une trajectoire orthogonale par les deux équations:

$$(\beta-\gamma)x^2+(\gamma-\alpha)y^2+(\alpha-\beta)z^2=0,$$

$$(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)(x^2+y^2+z^2-3a^2)^2=9(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Lorsque α, β, γ varient en restant infiniment petits du premier ordre, les trajectoires restent infiniment voisines de la sphère $x^2+y^2+z^2=3a^2$. Il résulte d'ailleurs des considérations exposées dans la première partie que cette sphère coupe orthogonalement les surfaces cubiques dont la sphère directrice a un rayon égal à a.

Le lieu des trajectoires qui vérifient la condition:

$$(n-p)\alpha+(p-m)\beta+(m-n)\gamma=\frac{1}{9},$$

m, n, p désignant des constantes arbitraires, est la surface:

$$[(n-p)x^2+(p-m)y^2+(m-n)z^2](x^2+y^2+z^2-3a^2)=1$$

qui rencontre par suite orthogonalement la famille de surfaces cubiques considérée.

22. La plus simple des surfaces cubiques symétriques est la surface élémentaire $xyz=p^3$, caractérisée par un tétraèdre de référence infiniment petit et une sphère directrice infiniment grande. Sa réciproque, relativement à une sphère centrale, est une surface de même nature; en prenant le rayon de la sphère égal à $3p$, la surface coïncide avec sa réciproque. Elle jouit donc à la fois des propriétés générales des surfaces élémentaires et de celles de leurs réciproques. En outre, les plans tangents communs à la surface cubique élémentaire et à une sphère centrale touchent la surface élémentaire suivant une ligne le long de laquelle la courbure totale est constante. Deux plans de symétrie perpendiculaires interceptent sur chaque normale, à partir de son pied, des longueurs égales et de signes contraires. La surface élémentaire peut être regardée comme l'enveloppe d'un ellipsoïde dont les trois plans principaux sont fixes et dont le volume est constant; la surface élémentaire et l'ellipsoïde ont, au point de contact, mêmes directions principales, et leurs rayons de courbure en ce point sont proportionnels, mais tournés en sens con-

traires. Le rapport de proportionnalité est constant et égal à $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. Les lignes asymptotiques ont pour équations, en appellant α et β les racines cubiques imaginaires de l'unité:

$$x^2 + \alpha y^2 + \beta z^2 = Const.,$$

$$x^2 + \beta y^2 + \alpha z^2 = Const.$$

Les lignes de courbure, trouvées par M. Serret, se déduisent sans peine de la connaissance des lignes asymptotiques, et sont déterminées par l'équation:

$$(x^2 + \beta y^2 + \alpha z^2)^{\frac{3}{2}} \pm (x^2 + \alpha y^2 + \beta z^2)^{\frac{3}{2}} = Const.$$

La démonstration de toutes ces propriétés ne présente aucune difficulté.

23. Une autre surface cubique symétrique qui mérite de fixer l'attention est celle qui a pour équation, en coordonnées tétraédriques:

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = 0$$

et dont il a déjà été parlé au n° **15**. On va voir qu'il est possible de déterminer, sous forme finie, les équations de ses lignes asymptotiques. Nous allons même résoudre ce problème dans le cas général de la surface tétraédrale symétrique simple d'ordre quelconque:

$$t^m + u^m + v^m + w^m = 0 \tag{1}$$

où m est une constante arbitraire.[1] Par différentiation, on obtient:

$$t^{m-1}dt + u^{m-1}du + v^{m-1}dv + w^{m-1}dw = 0$$

et cette équation est satisfaite pour tout déplacement dt, du, dv, dw exécuté dans le plan tangent au point considéré. Si ce déplacement est effectué suivant une direction asymptotique, il se trouve également dans

---

[1] M. Darboux (Bulletin des sciences mathématiques, tome I) a ramené la recherche des lignes asymptotiques des surfaces $Ax^m + By^m + Cz^m + Dt^m = 0$ à l'intégration d'une équation de la forme: $\frac{d\rho^2}{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)} = K\frac{d\rho_1^2}{(\rho_1-a)(\rho_1-b)(\rho_1-c)}$. Le procédé que nous indiquons ici ne nécessite pour ainsi dire aucune intégration.

le plan tangent au point $t+dt$, $u+du$, $v+dv$, $w+dw$, et l'on a par suite:

$$(t+dt)^{m-1}dt+(u+du)^{m-1}du+(v+dv)^{m-1}dv+(w+dw)^{m-1}dw=0,$$

d'où l'on tire la nouvelle équation:

$$t^{m-2}dt^2+u^{m-2}du^2+v^{m-2}dv^2+w^{m-2}dw^2=0. \tag{2}$$

On a d'ailleurs la relation fondamentale:

$$t+u+v+w=h. \tag{3}$$

Si l'on peut trouver un système de valeurs de t, u, v, w satisfaisant à la fois aux équations (1), (2) et (3), les lignes asymptotiques sont par cela même déterminées. Il suffit même d'avoir deux relations homogènes entre t, u, v, w vérifiant les équations (1) et (2); ces relations donneront les rapports des quatre variables, et il sera ensuite aisé de trouver des valeurs absolues compatibles avec l'équation (3). Occupons nous donc des équations (1) et (2), et posons:

$$t^m=T^2,\qquad u^m=U^2,\qquad v^m=V^2,\qquad w^m=W^2.$$

Ces équations deviennent:

$$T^2+U^2+V^2+W^2=0 \tag{4}$$

$$dT^2+dU^2+dV^2+dW^2=0. \tag{5}$$

En mettant la seconde sous la forme:

$$(dT+idU)(dT-idU)=-(dV+idW)(dV-idW).$$

on aperçoit la solution:

$$T+iU=-\lambda(V+iW) \tag{6}$$

$$T-iU=\frac{1}{\lambda}(V-iW) \tag{7}$$

où λ est une constante arbitraire. Ces deux équations entraînent d'ailleurs l'équation (4); ce sont donc les équations d'une ligne asymptotique

de la surface. En faisant disparaître les imaginaires, on parvient à la suite de transformations faciles à la nouvelle équation:

$$(\lambda^2+1)^4(V^2T^2+U^2W^2)+(\lambda^2-1)^4(W^2T^2+U^2V^2)$$
$$+16\lambda^4(V^2W^2+U^2T^2)=0.$$

Posant alors:

$$M=(\lambda^2+1)^2, \qquad N=-(\lambda^2-1)^2, \qquad P=4\lambda^2,$$

et revenant aux variables t, u, v, w, on voit que la ligne asymptotique est située sur la surface auxiliaire:

$$M^2(v^mt^m+u^mw^m)+N^2(w^mt^m+u^mv^m)+P^2(v^mw^m+u^mt^m)=0 \tag{8}$$

avec la condition, imposée aux constantes M, N, P:

$$M+N+P=0. \tag{9}$$

Par chaque point de la surface symétrique passent deux surfaces (8), correspondant aux deux valeurs de $\frac{M}{N}$ auxquelles conduit l'élimination de P entre les équations (10) et (11), et pivotant autour des points fixes communs aux trois surfaces:

$$v^mt^m+u^mw^m=0,$$
$$w^mt^m+u^mv^m=0,$$
$$v^mw^m+u^mt^m=0.$$

On obtient ainsi les deux lignes asymptotiques qui se croisent en chaque point. Les deux valeurs de $\frac{M}{N}$ coïncident lorsque l'on a:

$$(t^m+u^m+v^m+w^m)\sum t^mu^mv^m-4t^mu^mv^mw^m=0. \tag{10}$$

La surface représentée par cette équation rencontre la surface donnée (1) suivant 4 lignes planes, situées dans les faces du tétraèdre de référence, et formant la courbe parabolique de la surface (1). En outre, elle peut être regardée comme le lieu des points pour lesquels les deux valeurs du paramètre $\frac{M}{N}$ qui figure dans l'équation (8) sont égales, et par conséquent elle est l'enveloppe des surfaces (8).

Chaque fois que m est commensurable, la surface tétraédrique est algébrique et il en est de même de ses lignes asymptotiques.

24. Lorsque la surface cubique symétrique contient les arêtes d'un tétraèdre, chacune de ces arêtes coïncide avec deux droites du premier système, et l'équation devient alors:

$$2xyz - a(x^2 + y^2 + z^2) + a^3 = 0. \tag{1}$$

Les droites du second système coïncident avec celles du premier. Chaque sommet du tétraèdre inscrit est un noeud de la surface. Les sections faites pas des plans parallèles à xoy donnent, en projection sur ce plan, un système de coniques inscrites dans un même carré. L'équation de la surface en coordonnées tétraédriques, est:

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = \frac{h^3}{4} \tag{2}$$

avec la condition habituelle:

$$t + u + v + w = h.$$

Le tétraèdre de référence est le symétrique, par rapport au centre, de celui qui contient les droites de la surface; on peut dire que ces deux tétraèdres sont *complémentaires* l'un de l'autre. Pour avoir l'équation de la surface rapportée au tétraèdre inscrit, il suffit de remplacer chaque coordonnée par son complément à $\frac{h}{2}$, et il vient:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0. \tag{3}$$

C'est la forme connue de l'équation de la surface réciproque de celle de Steiner. On en conclut, en vertu du paragraphe précédent, que les lignes asymptotiques se trouvent sur les quadriques:

$$M^2(uw + vt) + N^2(uv + wt) + P^2(ut + vw) = 0 \tag{4}$$

pourvu que $M + N + P$ soit égal à zéro.[1]

---

[1] Ce résultat a été obtenu par M. Laguerre, dans ses belles recherches analytiques sur la surface réciproque de la surface de Steiner (Nouvelles Annales de mathé-

L'équation (4) se déduit de l'équation (8) du paragraphe précédent en faisant $m = 1$. On conclut de là, sans nouveau calcul, que la famille de quadriques a pour enveloppe la surface:

$$(5)\qquad (vt + uw)(wt + uv) + (vt + uw)(vw + ut) + (vw + ut)(wt + uv) = 0.$$

Ce qui, en tenant compte de la relation $t + u + v + w = h$, peut se mettre sous la forme:

$$(6)\qquad \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} - \frac{4}{h} = 0.$$

Si l'on revient au tétraèdre de référence primitif en remplaçant t par $\frac{h}{2} - t$, u par $\frac{h}{2} - u$, etc., l'équation (6) ne change pas. Or, avec ce tétraèdre la surface cubique a pour équation (2), et les formules du § 14 montrent alors que l'équation (6) représente le hessien de la surface cubique. Donc:

L'enveloppe des quadriques coupant la surface cubique suivant ses lignes asymptotiques est le hessien de cette surface; ce hessien a même équation par rapport au tétraèdre inscrit et par rapport au tétraèdre complémentaire. Il jouit de la symétrie cuboctaédrique.

On peut remarquer aussi que *si deux cubiques symétriques sont circonscrites à deux tétraèdres complémentaires, elles ont même hessien, et leurs lignes asymptotiques se trouvent sur les mêmes quadriques, passant par les sommets des deux tétraèdres.*

Sans insister sur les autres propriétés de la surface cubique circonscrite à un tétraèdre, nous allons indiquer comment son équation peut se mettre sous la forme de déterminant, qui a servi de point de départ

---

matiques, 1872), comme application de la théorie des formes biquadratiques simultanées. Le même auteur l'a établi par une autre voie dans son article *Sur la représentation sur un plan de la surface du 3e ordre qui est la réciproque de la surface de* STEINER, inséré au tome I du Bulletin de la société mathématique de France.

aux recherches de M. Laguerre. Considérons les cinq fonctions linéaires:

$$a = T + U + V + W,$$

$$b = AT + BU + CV + DW,$$

$$c = A^2T + B^2U + C^2V + D^2W,$$

$$d = A^3T + B^3U + C^3V + D^3W,$$

$$e = A^4T + B^4U + C^4V + D^4W,$$

où A, B, C, D sont quatre constantes, et posons:

$$T = (B - C)^2(C - D)^2(D - B)^2 \times t,$$

$$U = (A - D)^2(D - C)^2(C - A)^2 \times u,$$

$$V = (A - B)^2(B - D)^2(D - A)^2 \times v,$$

$$W = (A - B)^2(B - C)^2(C - A)^2 \times w,$$

$$\Pi^2 = (A - B)^2(A - C)^2(A - D)^2(B - C)^2(B - D)^2(C - D)^2,$$

il vient:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = \Pi^4 \Sigma tuv.$$

L'équation

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0$$

est donc équivalente à:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

25. La surface de Steiner, réciproque de la précédente, a été tellement étudiée qu'il serait superflu de revenir sur ce sujet. Observons seulement qu'en mettant son équation sous la forme:

$$\sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} = 0,$$

les formules du n° 23 donnent immédiatement ses lignes asymptotiques. Ces lignes ont été déterminées par CLEBSCH (Journal de CRELLE, 1867) en faisant intervenir la représentation de la surface sur un plan.

26. Une autre surface remarquable du 4ème ordre, pourvue de la symétrie tétraédrique, est celle qu'on déduit de la cubique symétrique à point isotrope:

$$2XYZ + b(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0$$

en prenant cette dernière surface comme lieu des centres d'une sphère mobile qui coupe orthogonalement une sphère centrale fixe, et cherchant l'enveloppe de la sphère mobile. Si R est le rayon de la sphère fixe, les formules de transformation, données par M. DARBOUX dans son ouvrage déjà cité au § 10, sont:

$$X = \frac{2R^2x}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \qquad Y = \frac{2R^2y}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \qquad Z = \frac{2R^2z}{x^2+y^2+z^2+R^2}.$$

Il vient ainsi:

$$4R^2xyz - b(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2 + R^2) = 0.$$

Cette surface, anallagmatique par rapport à la sphère fixe, diffère essentiellement des surfaces anallagmatiques ordinaires du 4ème ordre, autrement dit des cyclides. Au lieu d'être anallagmatique par rapport à 5 sphères, elle jouit de cette propriété par rapport à 6 plans et à une sphère. Au lieu d'admettre le cercle de l'infini comme ligne double, elle est tangente au plan de l'infini le long de ce cercle, qui fait par conséquent partie de la courbe parabolique et constitue une ligne de courbure singulière. Elle possède en outre à l'origine un point isotrope.

27. La plupart des surfaces tétraédriques dont nous avons parlé jusqu'ici rentrent dans le type général $xyz = f(x^2 + y^2 + z^2)$. Ce sont des surfaces binaires, jouissant comme telles des propriétés établies au n° 5. Parmi les surfaces qui n'appartiennent pas à ce type nous mentionnerons la surface:

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 - 2axyz = 0$$

dont parle M. TISSERAND, dans son *Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal,* et qui est coupée suivant quatre cercles par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Comme exemple de surface transcendante, citons la surface binaire $xyz = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ dont l'équation se ramène à la forme $XYZ = 1$ en posant $X = xe^{x^2}$, $Y = ye^{y^2}$, $Z = ze^{z^2}$.

Troisième partie. Surfaces du type cuboctaédrique.

28. Le type cuboctaédrique est caractérisé par 9 plans de symétrie, savoir les trois faces d'un trièdre trirectangle et les 6 plans bissecteurs de ce trièdre. Les faces du trièdre sont parallèles à celles du cube. Les six autres plans contiennent chacun deux arêtes parallèles du même polyèdre. L'existence de ces plans de symétrie entraîne celle d'un centre, de 3 axes quaternaires (les arêtes du trièdre trirectangle), de 4 axes ternaires (les diagonales du cube), de 6 axes binaires (joignant chacun les milieux de deux arêtes parallèles du cube). Les faces de l'octaèdre conjugué sont perpendiculaires aux axes ternaires.

Prenons comme axes de coordonnées les 3 axes quaternaires. Toute équation $\varphi(x^2, y^2, z^2) = 0$ dont le premier membre est une fonction symétrique des carrés des variables représente évidemment une surface cuboctaédrique. Pour former méthodiquement les équations de ce genre d'après notre procédé général, nous devons remarquer que les trois plans de coordonnées, que nous appellerons plans principaux, sont des plans de symétrie, ce qui nous empêche de prendre comme élément symétrique le produit xyz; mais nous pouvons prendre le carré $x^2y^2z^2$. Le produit des distances aux plans perpendiculaires aux axes quaternaires (plans *directeurs*) fournit un autre élément. Nous prendrons donc:

$$M = x^2y^2z^2$$

$$N = x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2;$$

et l'équation générale des surfaces cuboctaédriques ne diffère par suite de celle des surfaces tétraédriques que par l'absence des puissances impaires de xyz. On aurait pu énoncer immédiatement ce résultat, en se rappelant qu'on passe d'un système à l'autre par l'addition d'un centre de symétrie. Les deux éléments M et N ont pour ordres $m = 6$, $n = 4$,

d'où l'on tire $m + n - 1 = 9$. C'est le nombre des plans de symétrie du cube, et l'on se trouve ainsi dans le cas examiné au n° **2**.

La surface cuboctaédrique différente d'une sphère est au minimum du 4ᵉ degré. En désignant par A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'', une suite de constantes et posant $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, l'équation de la *quartique symétrique* peut se mettre indifféremment sous l'une ou l'autre des formes suivantes:

$$(1) \quad x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2 + A\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0$$

$$(2) \quad x^4 + y^4 + z^4 + A'\rho^4 + 2B'\rho^2 + C' = 0$$

$$(3) \quad x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + A''\rho^4 + 2B''\rho^2 + C'' = 0.$$

Remarquons que, pour une même surface, l'on a $\frac{C}{B} = \frac{C'}{B'} = \frac{C''}{B''}$. Considérons la troisième forme, et supposons qu'on coupe la surface par un plan $z = h$, h étant déterminé au moyen de la condition:

$$h^4(1 + 4A''^2) + 4B''h^2 + 4B''^2 - 4A''C'' = 0.$$

La section se décompose en deux coniques ayant des équations de la forme:

$$xy \pm m(x^2 + y^2 + n) = 0.$$

Ce sont deux coniques égales, ayant en commun deux diamètres rectangulaires égaux situés dans les plans zox, zoy. Une seule de ces coniques suffit d'ailleurs à déterminer la surface, et, comme ses équations dépendent de paramètres (h, m, n) qui sont en même nombre que dans l'équation de la surface, la conique peut être choisie arbitrairement parmi celles qui occupent la situation indiquée. En conséquence:

La quartique symétrique peut être engendrée par une sphérosymétrique du 8ᵉ ordre, assujettie à s'appuyer constamment sur une conique parallèle à l'un des plans principaux et symétrique par rapport à deux plans diagonaux du cube.

29. Une sphérosymétrique du 8ème ordre a deux équations qu'on peut écrire:

$$x^2 + y^2 + z^2 = Const.$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = Const.$$

On vérifie sans peine qu'elle est orthogonale à tous les cones:

$$\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}+\frac{c}{z^2}=0$$

pourvu que la somme $a+b+c$ soit nulle.

Ces cones passent par les diagonales du cube et admettent les axes quaternaires comme lignes doubles. Suivant une expression déjà employée, ce sont les cones *inverses* de ceux qui sont normaux aux sphérosymétriques du 6ème ordre. Toute surface cuboctaédrique binaire, c'est à dire ayant une équation indépendante de l'élément $x^2y^2z^2$, est une trajectoire orthogonale de cette famille de cones.

30. L'équation de la quartique symétrique peut s'écrire, comme on l'a vu:

$$N+A\rho^4+2B\rho^2+C=0.$$

Soient a^2, b^2 les racines (positives ou négatives) du trinome $A\rho^4+2B\rho^2+C$. On peut encore écrire:

$$(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)=A(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2),$$

et la surface est par conséquent le lieu de l'intersection des deux quadriques:

$$(1)\qquad \begin{aligned} (x+y+z)(\quad x+y-z) &= A\lambda(\rho^2-a^2) \\ (x-y+z)(-x+y+z) &= \frac{1}{\lambda}(\rho^2-b^2), \end{aligned}$$

λ étant un paramètre arbitraire. On remarque que les sections cycliques centrales de ces deux faisceaux de quadriques sont invariables, et que les plans cycliques de l'un des faisceaux sont symétriques de ceux de l'autre par rapport au plan zox. Toutes ces quadriques ont mêmes plans principaux. La correspondance peut être définie géométriquement par la condition que la courbe d'intersection s'appuie sur la conique trouvée au n° 28.

L'intersection de deux surfaces du second ordre concentriques appartient à trois cylindres; c'est la courbe à laquelle Frezier et de la Gournerie ont donné le nom *d'ellipsimbre*. Si les deux surfaces ont

mêmes plans principaux, l'ellipsimbre admet ces plans comme plans de symétrie, et peut être appelée *ellipsimbre symétrique*. On voit, par ce qui précède, que:

Toute quartique symétrique est le lieu d'une ellipsimbre symétrique assujettie: 1° *à s'appuyer sur quatre cercles fixes, concentriques, et égaux deux à deux, symétriquement placés par rapport aux plans principaux de l'ellipsimbre;* 2° *à rencontrer en même temps une conique parallèle à l'un de ces plans et symétrique par rapport aux deux autres.*

L'ellipsimbre (1) rapportée à ses plans principaux, a pour équations:

$$(2)\qquad \begin{aligned} 2x^2 - z^2 &= A\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2), \\ 2y^2 - z^2 &= \frac{1}{\lambda}(x^2 + y^2 + z^2 - b^2). \end{aligned}$$

Elle est située sur le cone:

$$\begin{aligned} &[2b^2 + A\lambda(a^2 - b^2)]x^2 + A\lambda[a^2 - b^2 - 2\lambda a^2]y^2 \\ &\qquad + [A\lambda^2 a^2 - A\lambda(a^2 + b^2) - b^2]z^2 = 0 \end{aligned}$$

qui coupe la surface suivant une seconde ellipsimbre. Pour les valeurs de λ qui annulent l'un des coefficients, le cone se décompose en deux plans, et les deux ellipsimbres se décomposent chacune en deux coniques situées sur la surface. Abstraction faite des valeurs 0 et ∞ de λ, qui correspondent aux sections circulaires, la décomposition a lieu en posant l'une des conditions:

$$\lambda = \frac{2b^2}{A(b^2 - a^2)}, \qquad \lambda = \frac{a^2 - b^2}{2a^2}, \qquad A\lambda^2 a^2 - A\lambda(a^2 + b^2) - b^2 = 0.$$

On trouve ainsi 8 plans rencontrant chacun la surface suivant deux coniques. Les quatre premiers passent chacun par un axe binaire, les quatre derniers, par un axe quaternaire. Chacun de ces plans touche la surface aux quatre points de rencontre des deux coniques qu'il renferme. Par chaque axe binaire, on peut ainsi faire passer deux plans quadritangents; par chaque axe quaternaire, on peut en faire passer quatre. Il y a par suite 24 plans quadritangents déterminant 48 coniques de la surface.

Il ne peut exister d'autres plans passant par le centre et coupant la surface suivant deux coniques. En effet, si on rend l'équation de la surface homogène par l'introduction d'une variable auxiliaire t, le lieu des points pour lesquels le plan tangent passe par l'origine s'obtient en égalant à zéro la dérivée par rapport à t. L'équation (1) du n° **28** donne ainsi $B\rho^2 + C = 0$. Le cone central circonscrit à la surface la touche donc suivant une courbe sphérique (sphérosymétrique). Ce cone est du quatrième ordre, et sa trace sur un plan quelconque est une quartique plane. Tout plan quadritangent passant par le centre a pour trace, sur le même plan, une bitangente de cette quartique. Comme une quartique a 28 bitangentes, il y a 28 plans quadritangents. Or nous connaissons précisément 28 plans de cette nature, à savoir les 24 plans dont il a été question ci dessus, et les quatre plans perpendiculaires aux axes ternaires (ceux-ci, coupant chacun la surface suivant 2 cercles concentriques, sont bitangents en deux points du cercle de l'infini).

31. Tout plan central coupe le cone central circonscrit suivant 4 droites, bitangentes à la section de la surface par le même plan. Si $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ sont les équations des 4 droites rapportées à deux axes rectangulaires menés par l'origine dans le plan sécant, et si R est le rayon de la sphérosymétrique de contact, l'équation de la section est de la forme:

$$\alpha\beta\gamma\delta = (\rho^2 - R^2)^2$$

qui rentre dans la forme canonique donnée par Plücker pour l'équation des quartiques en général, savoir:

$$\alpha\beta\gamma\delta = V^2,$$

V étant une conique, et α, β, γ, δ, quatre droites généralement non concourantes. On remarque que les sections centrales jouissent d'une propriété projective, consistant en ce qu'elles ont quatre bitangentes concourantes. En partant de la forme canonique, il est facile de trouver les autres bitangentes d'une quartique. Il suffit d'écrire l'identité:

$$\alpha\beta(\gamma\delta + 2pV + p^2\alpha\beta) = (V + p\alpha\beta)^2,$$

et de déterminer μ de manière que la conique:

$$\gamma\delta + 2pV + p^2\alpha\beta = 0$$

se décompose en deux droites p, q. L'équation prend alors la forme:

$$\alpha\beta pq = (V + \mu\alpha\beta)^2$$

et par conséquent p et q sont deux bitangentes.

D'une manière générale, lorsque C_1, C_2, C_3 sont trois coniques quelconques, l'équation en μ exprimant que $C_1 + 2\mu C_2 + \mu^2 C_3$ se décompose en deux facteurs linéaires est du 6ème degré. Mais ici, il y a une racine nulle et une infinie, correspondant aux deux couples $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$. On n'a donc en réalité à résoudre qu'une équation du 4ème degré, déterminant 8 couples de bitangentes. Chaque couple se compose évidemment de deux droites symétriques par rapport au centre. Les 4 droites α, β, γ, δ pouvant se grouper en deux couples de 3 manières différentes, on peut, de 3 manières, trouver 8 couples de bitangentes, soit en tout 24, qui, avec les 4 droites α, β, γ, δ complètent le nombre total. Toute bitangente de la quartique symétrique étant bitangente à une section centrale, la méthode précédente conduit à la détermination complète des bitangentes de la surface.

32. L'équation de la quartique symétrique ne renfermant que des puissances paires des coordonnées, on est naturellement amené à poser:

$$x^2 = X, \qquad y^2 = Y, \qquad z^2 = Z,$$

ce qui établit une correspondance entre les points de cette surface et ceux d'une surface de révolution du second degré. A chaque point de celle-ci correspondent, sur la quartique, les 8 sommets d'un cube. La surface du second ordre est de révolution autour de l'axe ternaire $X = Y = Z$. A ses parallèles correspondent les sphérosymétriques; à ses plans tangents correspondent des surfaces du second degré coupant la quartique suivant deux ellipsimbres; à ses deux systèmes de génératrices rectilignes correspondent deux systèmes d'ellipsimbres, et ainsi de suite. Les ellipsimbres que nous rencontrons ici ont leurs plans principaux parallèles aux faces du cube; elles diffèrent donc de celles que nous avons déterminées précédemment, et qui avaient deux plans de symétrie passant par les arêtes du cube.

33. Toute surface douée de la symétrie tétraédrique est représentée, en coordonnées tétraédrales, par une équation $\varphi(t, u, v, w) = 0$

symétrique par rapport aux coordonnées. Pour que la même surface jouisse de la symétrie cuboctaédrique, il faut et il suffit qu'elle possède un centre, et par suite que l'équation reste vérifiée quand on remplace t, u, v, w par $\frac{h}{2} - t$, etc., h étant la hauteur du tétraèdre de référence. Posons $\frac{h}{4} - t = T$, $\frac{h}{4} - u = U$, etc., d'où $\sum T = 0$. Les quantités T, U, V, W changent de signe sans changer de valeur absolue par la substitution dont il s'agit. La condition pour que la surface soit cuboctaédrique est donc que le premier membre de son équation soit une fonction paire ou impaire de T, U, V, W, symétrique par rapport à ces variables. Le produit $TUVW$ n'est autre chose que l'élément symétrique du 4er ordre. On a d'ailleurs $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4} \sum T^2$. L'équation générale de la quartique symétrique est donc

$$TUVW + A(\sum T^2)^2 + 2B(\sum T^2) + C = 0$$

avec la condition $\sum T = 0$.

On peut aussi introduire les trois fonctions:

$$tu + vw = \lambda, \qquad tv + uw = \mu, \qquad tw + uv = \nu,$$

rencontrées déjà au n° 24. En vertu de l'identité:

$$\lambda = tu + vw = TU + VW + \frac{h^2}{8}$$

λ est une fonction paire de T, U, V, W. Il en est de même de μ et ν. D'après cela, toute équation $\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0$ dont le premier membre est une fonction symétrique, entière et de degré n, par rapport à λ, μ, ν, représente une surface cuboctaédrique de degré $2n$. L'expression de λ en coordonnées cartésiennes est:

$$\lambda = \frac{2}{3}(x^2 - y^2 - z^2) + \frac{1}{8}h^2.$$

La surface $\lambda = 0$ est un hyperboloïde à une nappe, de révolution autour de l'axe des x, et dont les génératrices se coupent à angle droit sur le

cercle de gorge. Cette surface contient les diagonales de quatre faces d'un cube. Sa méridienne est une hyperbole équilatère, et on peut l'appeler *hyperboloïde équilatère.*

Posons:

$$\varphi = \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2) - p^2.$$

Nous avons l'identité:

$$(1) \qquad \lambda + \mu + \nu + \varphi = \frac{3}{8}h^2 - p^2.$$

Nous pouvons considérer λ, μ, ν, φ comme des coordonnées *quadratiques* égales aux puissances d'un point par rapport à une sphère centrale et à trois hyperboloïdes équilatères. Dans ce système, l'équation:

$$(2) \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = Q\varphi^2,$$

où Q est une constante arbitraire, est l'équation générale des quartiques symétriques; car elle dépend de trois constantes arbitraires, savoir la hauteur h du tétraèdre de référence, le rayon de la sphère centrale (ou, ce qui revient au même, la constante p), enfin le coefficient Q. L'intérêt principal de cette forme d'équation consiste dans le rapprochement qu'elle établit entre les quartiques symétriques et les anallagmatiques du 4[ème] ordre. Celles-ci en effet, comme l'a montré M. Darboux, peuvent se représenter par une équation de la forme:

$$AS^2 + A'S'^2 + A''S''^2 + A'''S'''^2 = 0,$$

où S, S', S'', S''' sont les puissances par rapport à 4 sphères. Ici, 3 des sphères sont remplacées par des hyperboloïdes équilatères, genre de surfaces qui ne diffère de la sphère que par le signe du carré de l'un des axes. Seulement il convient de remarquer qu'en remplaçant les trois hyperboloïdes par les sphères conjuguées, on aurait ici quatre sphères concentriques, et l'équation obtenue représenterait deux sphères également concentriques.

L'équation d'une surface étant mise sous la forme précédente, on peut remplacer λ, μ, λ par $\lambda + \alpha$, $\mu + \alpha$, $\nu + \alpha$ et φ par $\varphi + \beta$, puis chercher quelles valeurs il faut attribuer aux constantes α et β pour que

la forme d'équation soit conservée. En posant pour abréger $P = \frac{3}{8}h^2 - p^2$, on trouve:

$$\beta = \frac{2P}{1-3Q}, \qquad \alpha = -\frac{2PQ}{1-3Q}.$$

Si donc Q est différent de $\frac{1}{3}$, la forme réduite peut être obtenue de deux manières différentes.

Par la combinaison des équations (1) et (2), il vient:

$$2(\lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu) = P^2 - 2P\varphi + (1-Q)\varphi^2.$$

Le premier membre, égalé à zéro, représente (voir n° 24) le hessien de la surface cubique symétrique circonscrite au tétraèdre de référence. La surface se réduit à ce hessien si l'on a à la fois $P = 0$ et $Q = 1$. $P = 0$ revient à dire que la sphère centrale a pour rayon $\frac{3}{4}h$, c'est à dire qu'elle est circonscrite au tétraèdre de référence. Cette condition étant supposée remplie, le hessien a pour équation quadratique:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \varphi^2.$$

34. On arrive à une forme d'équation encore plus simple en substituant aux 3 hyperboloïdes équilatères les trois surfaces de révolution obtenues en égalant à zéro les trois fonctions:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \alpha x^2 + \beta(y^2 + z^2) + \gamma &= \lambda, \\ \alpha y^2 + \beta(z^2 + x^2) + \gamma &= \mu, \\ \alpha z^2 + \beta(x^2 + y^2) + \gamma &= \nu. \end{aligned}$$

L'équation:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = k$$

dépend des trois constantes $\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}, \frac{\gamma}{k}$ et représente par suite la quartique symétrique la plus générale. En cherchant à l'identifier avec l'équation ordinaire:

$$N + A\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0,$$

on trouve que la réduction peut se faire de deux manières différentes.

Les deux transformations sont ensemble réelles ou imaginaires, suivant que le cone asymptotique est imaginaire ou réel. Les deux transformations se réduisent à une seule pour $A = \frac{1}{3}$; mais alors le coefficient γ est infini ou indéterminé. Lorsque les deux transformations sont réelles, A est supérieur à $\frac{1}{3}$. S'il est compris entre 1 et 3, l'un des systèmes de quadriques (1) se compose d'ellipsoïdes, et l'autre d'hyperboloïdes. Dans le cas contraire, les deux systèmes se composent d'ellipsoïdes. Les ellipsoïdes ne sont réels que si B est négatif.

35. Cherchons maintenant les droites réelles qui peuvent appartenir à la quartique symétrique. D'après ce qui a été dit au n° 7, ces droites sont perpendiculaires aux plans de symétrie. On peut le voir aussi au moyen des résultats établis au n° 30. En effet, la droite D', symétrique d'une droite D par rapport au centre, appartient en même temps qu'elle à la surface, et les deux droites déterminent un plan central P qui coupe la surface suivant deux coniques (dont l'une formée par les deux droites). Ce plan contient donc soit un axe binaire, soit un axe quaternaire, ce qui exige qu'il soit normal à un plan de symétrie Π. Il coupe par suite les plans directeurs suivant des droites symétriquement placées par rapport à la trace du plan de symétrie; la droite D, étant assujettie à couper ces mêmes droites en des points situés sur les circonférences déterminées par le plan P dans les sphères directrices, est évidemment perpendiculaire au plan de symétrie Π.

Considérons d'abord une droite perpendiculaire à l'un des plans principaux, et parallèle par conséquent à l'un des axes quaternaires, Oz par exemple. Soient $x = \alpha$, $y = \beta$ ses équations. Portant ces valeurs de x et de y dans l'équation de la surface mise sous la forme (1) du n° 28, et annulant les coefficients des différentes puissances de z, nous avons les conditions:

$$A = -1,$$

$$B = 2(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$B^2 + C = 4\alpha^2\beta^2.$$

La condition $A = -1$ réduit l'équation du cone asymptotique à

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 0;$$

ce cone n'admet donc pas d'autres génératrices réelles que les axes quaternaires. Les deux autres conditions montrent que, pour la réalité de α et β, on doit avoir:

$$B > 0,$$

$$3B^2 + 4C < 0.$$

Soient P_1 et P_2 les carrés des rayons des sphères directrices. On a:

$$P_1 + P_2 = -\frac{2B}{A} \quad \text{et} \quad P_1P_2 = \frac{C}{A}.$$

Faisant $A = -1$, et tenant compte de ces relations, les inégalités précédentes deviennent:

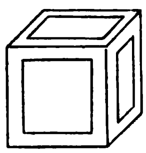
$$P_1 + P_2 > 0,$$

$$\left(3 - \frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{P_2}{P_1}\right) < 0.$$

D'après cela, le rapport $\frac{P_2}{P_1}$ doit être positif et compris entre 3 et $\frac{1}{3}$; P_1 et P_2 doivent être tous les deux positifs. De cette discussion on conclut, eu égard à la symétrie de la surface, que:

La quartique symétrique contient 24 *droites parallèles aux axes quaternaires lorsque son cone asymptotique se réduit à ces axes. Les* 24 *droites sont réelles si les sphères directrices sont réelles, et si le carré du plus grand rayon est inférieur à trois fois le carré du plus petit; autrement dit, si les faces du cube inscrit dans la plus grande sphère rencontrent réellement la plus petite.*

Fig. 3.



Il est évident que les 24 droites sont disposées suivant 6 carrés, placés sur les faces d'un cube, comme l'indique la fig. 3. Par chaque droite, on peut faire passer, outre deux plans parallèles aux faces du cube, cinq plans qui contiennent chacun une seconde droite et déterminent autant de coniques de la surface; ce sont des plans quatritangents. Il existe 60 plans de cette nature, qui font connaître 60 coniques. Parmi les 5 plans qui passent par l'une des droites, il y a un plan central. On a ainsi 12 plans centraux quatritangents; ce sont les 12 plans, contenant chacun un axe quaternaire, trouvés déjà au n° **30**.

Il y a deux cubes passant par les 24 droites; les demies longueurs de leurs arêtes sont les quantités α et β. Ces deux cubes se confondent quand on prend $3P_2 = P_1$, ce qui exprime que le cube circonscrit à l'une des sphères directrices est inscrit à l'autre. Les 24 droites se réduisent alors aux 12 arêtes d'un cube, et celles-ci sont tangentes à la plus petite sphère directrice. La surface possède dans ce cas 8 points coniques (les sommets du cube). Son équation peut s'écrire:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 2\alpha^2(x^2 + y^2 + z^2) + 3\alpha^4 = 0.$$

36. Considérons actuellement une droite perpendiculaire à l'un des plans diagonaux du cube, et parallèle par conséquent à un axe binaire. Ses équations sont, par exemple:

$$y = x + \alpha, \qquad z = \beta.$$

Portant dans l'équation de la surface, et écrivant que l'équation en x est identiquement satisfaite, il vient:

$$A = 0,$$

$$\alpha^2 = -\frac{C}{4B} - \frac{3}{4}B,$$

$$\beta^2 = -\frac{C}{4B} + \frac{1}{4}B.$$

Remarquons qu'en vertu de la condition $A = 0$, l'une des sphères directrices disparaît à l'infini et le rayon R de l'autre sphère satisfait à la relation:

$$2BR^2 + C = 0$$

d'où

$$\alpha^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{3B}{4},$$

$$\beta^2 = \frac{R^2}{2} + \frac{B}{4},$$

$$\alpha^2 + 3\beta^2 = 2R^2.$$

Il faut donc, pour la réalité de la droite considérée, que la sphère di-

rectrice unique soit réelle. Il faut en outre que B soit compris entre $-2R^2$ et $\frac{2R^2}{3}$. Si ces conditions sont remplies, la surface possède 24 droites réelles, disposées en facettes triangulaires sur les sommets d'un cube (fig. 4). La demie arête de ce cube est égale à β, et l'on a $\beta^2 < \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{6}$, ou $\beta < \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ce qui veut dire que les côtés des carrés inscrits dans les faces du cube rencontrent réellement la sphère directrice. On peut également placer les 24 droites sur les faces d'un octaèdre régulier (fig. 5).

Fig. 4.

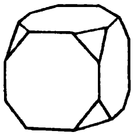
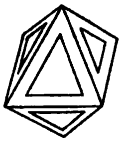


Fig. 5.



Les 24 droites se réduisent aux 12 arêtes de l'octaèdre régulier lorsqu'elles rencontrent les axes quaternaires, ce qui a lieu pour $\beta = 0$, d'où $B = -2R^2$. L'équation de la surface circonscrite à un octaèdre régulier est donc:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 4R^2(x^2 + y^2 + z^2) + 4R^4 = 0.$$

Cette surface possède 6 points coniques. Sa sphère directrice, de rayon R, touche les 12 droites, arêtes de l'octaèdre; résultat facile à prévoir, car les milieux de ces arêtes se trouvent sur les plans directeurs.

Lorsque B atteint sa limite supérieure $\frac{2R^2}{3}$, l'on a $\alpha = 0$ et la surface contient les diagonales des faces d'un cube, c'est à dire les arêtes de deux tétraèdres complémentaires. Nous l'appellerons surface *bitétraédrique*. Cette surface a 8 points coniques. Son équation est:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 + \frac{4}{3}R^2(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{4}{3}R^4 = 0.$$

La demie arête de chaque tétraèdre est égale à $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Si l'on considère une sphère interceptant sur chaque arête du tétraèdre une longueur égale à la moitié de cette arête, son rayon est

$$\sqrt{\frac{2R^2}{3} + \frac{R^2}{3}} = R;$$

c'est donc la sphère directrice, résultat qu'on obtiendrait immédiatement en se rappelant que la sphère directrice passe par les intersections des droites de la surface avec les plans directeurs.

La hauteur h de chaque tétraèdre est égale à son arête multipliée par $\sqrt{\frac{2}{3}}$, ou bien à $\frac{4R\sqrt{2}}{3}$. L'équation de la surface peut donc s'écrire:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$$
$$+ 6\left(\frac{h}{4}\right)^2(x^2 + y^2 + z^2) - 27\left(\frac{h}{4}\right)^4 = 0.$$

En prenant l'un des tétraèdres comme tétraèdre de référence, il vient:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{4}{h}.$$

On reconnait le hessien de la surface cubique symétrique circonscrite au tétraèdre (voir n° 24).

Donc: *la bitétraédrique est la surface hessienne de la cubique symétrique circonscrite à l'un ou l'autre de ses tétraèdres inscrits.*

Il est facile de voir que chaque face du cube touche la surface tout le long des deux diagonales. D'après cela, toute section plane de la surface admet pour bitangentes les traces des 6 faces du cube; ces bitangentes sont parallèles deux à deux. D'après ce qui a été dit au n° 24, la même surface peut être regardée comme l'enveloppe du faisceau de quadriques:

$$M^2(uw + vt) + N^2(uv + wt) + P^2(ut + vw) = 0, \qquad (M + N + P = 0)$$

ou bien:

$$(M^2 - N^2 - P^2)x^2 + (-M^2 + N^2 - P^2)y^2$$
$$+ (-M^2 - N^2 + P^2)z^2 + \frac{1}{8}h^2(M^2 + N^2 + P^2) = 0.$$

Ce sont des hyperboloïdes *rectangles.*

L'équation de la surface bitétraédrique peut encore s'écrire:

$$\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = 0,$$

a représentant la demie arête $\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ du cube circonscrit aux deux tétraèdres.

37. Une surface du $4^{\text{ème}}$ degré, sans points singuliers, possède 3200 plans tritangents, dont nous allons chercher la disposition sur la quartique symétrique. Les plans tangents perpendiculaires à un plan de symétrie peuvent se déterminer en prenant ce plan comme plan des xy et joignant à l'équation $f(x, y, z^2) = 0$ de la surface l'équation

$$f'(z) = 2zf'_{z^2}(x, y, z^2) = 0.$$

Si on laisse de côté la solution $z = 0$, qui donne des points de contact situés dans le plan de symétrie, le cylindre enveloppé par les plans tangents considérés a pour trace la courbe obtenue en éliminant z^2 entre les deux équations $f = 0$, $f'_{z^2} = 0$; c'est une courbe du $4^{\text{ème}}$ degré. Chaque tangente à cette courbe est la trace d'un plan tangent qui touche la surface en deux points symétriques par rapport au plan des xy, c'est à dire d'un plan bitangent. Chaque bitangente est la trace d'un plan quatritangent; aux 28 bitangentes de la courbe correspondent ainsi 28 plans quatritangents de la surface. Les 9 plans de symétrie déterminent d'après cela $9 \times 28 = 252$ plans quatritangents, mais ces plans ne sont pas tous distincts. D'abord, il y a 4 plans quatritangents perpendiculaires à chaque axe quaternaire, car on obtient par exemple les plans de ce genre perpendiculaires à Oz en éliminant x^2 et y^2 entre l'équation de la surface et ses deux dérivées partielles relatives à x et y, débarrassées des solutions $x = y = 0$, et il vient ainsi une équation bicarrée en z. Chaque plan perpendiculaire à Oz, étant perpendiculaire à 4 plans de symétrie, compte pour 4 dans l'énumération précédente, et il y a de ce chef 48 plans quatritangents qui se réduisent à 12. Chaque axe binaire est également perpendiculaire à 4 plans quatritangents; ceux là, étant perpendiculaires chacun à 2 plans de symétrie, comptent pour 2, et il en résulte qu'il y a 4 plans quatritangents se réduisant à 12 distincts. Enfin, chaque plan directeur, coupant la surface suivant deux cercles concentriques, est un plan quatritangent à l'infini, perpendiculaire à trois plans de symétrie, et compte par conséquent pour trois. On a ainsi:

12	plans	comptant	pour	48
12	»	»	»	24
4	»	»	»	12
28	»	»	»	84.

Il reste $252 - 84 = 168$ plans quatritangents perpendiculaires à un seul plan de symétrie, et l'on a au total $168 + 28 = 196$ plans quatritangents distincts, équivalant à $196 \times 4 = 784$ plans quatritangents. En dehors de ceux-ci, on doit avoir encore $3200 - 784 = 2416$ plans tritangents, déterminant autant de quartiques unicursales. Il est aisé de voir que chaque axe ternaire est perpendiculaire à 4 plans tritangents, ce qui en donne 16. Les autres sont au nombre de 2400. Le polyèdre général qui jouit de la symétrie cubique ayant 48 faces (hexoctaèdre), on voit en définitive qu'il doit y avoir 50 hexoctaèdres symétriques dont toutes les faces sont des plans tritangents.

38. Les points nodaux de la quartique symétrique s'obtiennent en partant de l'équation rendue homogène:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2 + A\rho^4 + 2B\rho^2t^2 + Ct^4 = 0$$

et égalant à zéro les quatre dérivées partielles, ce qui donne:

$$\begin{aligned} x(\quad x^2 - y^2 - z^2 + A\rho^2 + Bt^2) &= 0, \\ y(-x^2 + y^2 - z^2 + A\rho^2 + Bt^2) &= 0, \\ z(-x^2 - y^2 + z^2 + A\rho^2 + Bt^2) &= 0, \\ t(B\rho^2 + Ct^2) &= 0. \end{aligned}$$

La dernière équation montre que les points cherchés se trouvent soit sur le plan de l'infini, soit sur la sphère $B\rho^2 + C = 0$, orthogonale à la surface. Considérons d'abord les points à distance finie. On peut faire les hypothèses suivantes:

1°. $x = y = z = 0$, d'où $\rho = 0$ et par suite $C = 0$. On a un point isotrope à l'origine. C'est le cas où l'une des sphères directrices est évanouissante.

2°. $x = y = 0$, $z = \rho$. Il vient alors:

$$\begin{aligned} (1 + A)\rho^2 + B &= 0, \\ B\rho^2 + C &= 0 \end{aligned}$$

d'où $B^2 - AC = C$. La surface possède 6 noeuds (sommets d'un octaèdre régulier). En chacun d'eux, le cone des tangentes, étant assujetti

à la symétrie quaternaire, est un cone de révolution. Si l'on a en même temps $A = 0$, d'où $C = B^2$, la surface contient les arêtes d'un octaèdre.

3°. $x = 0$, y et z différents de zéro. On a alors $y^2 = z^2 = \frac{1}{2}\rho^2$, d'où:

$$A\rho^2 + B = 0, \qquad B\rho^2 + C = 0$$

et par suite $B^2 - AC = 0$. La surface possède 12 noeuds, placés au milieu des arêtes d'un cube. Les deux sphères directrices sont confondues en une seule, passant par les 12 noeuds; chacun des plans directeurs touche la surface suivant un cercle. Cette surface ne peut contenir les droites (parallèles aux arêtes de l'octaèdre) joignant deux à deux les points singuliers, que si l'on a $A = 0$. Mais alors, ρ étant supposé fini, il vient $B = 0$ et $C = 0$; la surface se réduit aux plans directeurs. Il ne pouvait en être autrement car chaque plan directeur contient six des droites dont il s'agit.

4°. x, y et z différents de zéro. Il vient:

$$x^2 = y^2 = z^2 = A\rho^2 + B, \quad \text{d'où} \quad \rho^2 = 3(A\rho^2 + B).$$

On a aussi $B\rho^2 + C = 0$. Par suite:

$$B^2 - AC = \frac{1}{3}C.$$

La surface possède comme noeuds les 8 sommets d'un cube; en chacun de ces noeuds, le cone des tangentes, en vertu de la symétrie ternaire, est de révolution. Pour $A = -1$, d'où $B^2 = -\frac{4}{3}C$, la surface contient les arêtes d'un cube; pour $A = 0$, d'où $B^2 = -\frac{1}{3}C$, elle contient celles de deux tétraèdres; c'est la surface tétraédrique.

Les conditions de réalisation de ces quatre cas montrent que deux d'entre eux ne peuvent se présenter en même temps, à moins qu'on n'ait $B = C = 0$. Mais alors la surface se réduit à un cone, rentrant dans l'une des catégories suivantes:

Pour $A = -1$, cone s'évanouissant autour des 3 axes quaternaires.

Pour $A = \frac{1}{3}$, cone s'évanouissant autour des 4 axes ternaires.

Pour $A = 0$, cone décomposé en six plans (plans directeurs) et possédant 6 arêtes doubles (axes binaires)

Etudions maintenant les points singuliers à l'infini. En faisant $t = 0$, l'on a les 3 équations:

$$x(\quad x^2 - y^2 - z^2 + A\rho^2) = 0,$$
$$y(-x^2 + y^2 - z^2 + A\rho^2) = 0,$$
$$z(-x^2 - y^2 + z^2 + A\rho^2) = 0,$$

ou bien, en introduisant les cosinus directeurs α, β, γ de la direction aboutissant à un noeud:

$$\alpha(\quad \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + A) = 0,$$
$$\beta(-\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + A) = 0,$$
$$\gamma(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + A) = 0.$$

Ici encore, on peut faire diverses hypothèses:

1°. $\alpha = \beta = 0, \quad \gamma = 1,$ d'où $A + 1 = 0.$

A cette hypothèse correspondent 3 points singuliers sur les 3 axes quaternaires.

2°. $\alpha = 0, \quad \beta^2 - \gamma^2 + A = 0, \quad -\beta^2 + \gamma^2 + A = 0,$

d'où $A = 0$, $\beta^2 = \gamma^2$, ce qui donne 6 points singuliers sur les axes binaires.

3°. α, β, γ différents de zéro, d'où $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \frac{1}{3}$ et $A = \frac{1}{3}$, ce qui donne 4 points singuliers sur les axes ternaires.

Voyons comment les divers cas de points singuliers à l'infini peuvent se combiner avec les hypothèses qui donnent des points singuliers à distance finie. Si l'on prend $A = -1$, on peut avoir en outre:

1°. $C = 0$ (point isotrope à l'origine). La surface a 4 noeuds, dont 3 à l'infini.

2°. $B = C = 0$. Cone imaginaire à 3 arêtes doubles.

3°. $B^2 + C = 0$. Les sphères directrices sont confondues. La surface a 12 noeuds à distance finie, sur les axes binaires, et 3 à l'infini. C'est une surface à 15 noeuds. Son équation est:

$$4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2B(x^2 + y^2 + z^2) + B^2 = 0$$

ou bien:

$$N - (\rho^2 - B)^2 = 0.$$

4°. $B^2 = -\frac{4}{3}C$. La surface a 8 noeuds aux sommets d'un cube, et 3 à l'infini soit au total 11 noeuds. C'est la surface circonscrite à un cube.

Passons à l'hypothèse $A = 0$.

1°. $C = 0$ (point isotrope à l'origine). Il y a 7 noeuds dont 6 à l'infini.

2°. $B^2 = C$. Il y a 12 noeuds, dont 6 à l'infini, et la surface est circonscrite à l'octaèdre des 6 noeuds à distance finie.

3°. $B = C = 0$. La surface se décompose en 4 plans.

4°. $B^2 = -\frac{1}{3}C$. La surface a 14 noeuds dont 6 à l'infini; c'est la surface bitétraédrique.

Soit enfin $A = \frac{1}{3}$.

1°. $C = 0$. 5 noeuds, dont 4 à l'infini.

2°. $B^2 = \frac{4}{3}C$. 10 noeuds, dont 4 à l'infini.

3°. $B^2 = \frac{1}{3}C$. 16 noeuds, dont 4 à l'infini. En posant

$$3B = -2b^2,$$

l'équation de cette surface, qui présente le nombre maximum de noeuds, peut s'écrire:

$$(x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2 - 2b^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2b^4 = 0.$$

Les noeuds a distance finie sont sur la sphère qui a pour rayon $b\sqrt{2}$.

4°. $B = C = 0$. Cone évanouissant.

En résumé, laissant de côté les cones à arêtes doubles, on voit qu'on peut avoir:

1- 3- 4- 6- 8- 10- 11- 12- 14- 15- 16 noeuds,

dont

1- 6- 8- 12 à distance finie

et

3-4-6 à distance infinie.

On sait que si une surface du $4^{ème}$ degré a 16 noeuds, le cone circonscrit à la surface, à partir de l'un des noeuds, se décompose en 6 plans, que, si elle a 15 noeuds, le même cone se décompose en 4 plans et un cone du second ordre; que, si elle a 14 noeuds, il se décompose en 3 plans et un cone cubique, ou 2 plans et 2 cones quadriques. Dans ce dernier cas, il y a 8 noeuds, donnant lieu au premier mode de décomposition, et 6, au second. Il en résulte évidemment que, pour la quartique symétrique à 14 noeuds (bitétraèdrique) le deuxième mode de décomposition correspond aux 6 noeuds à l'infini (c'est à dire aux directions des axes binaires). Les deux plans qui font alors partie du cylindre circonscrit sont deux faces du cube inscrit, parallèles à l'axe binaire considéré, et tangentes en tous les points de deux droites perpendiculaires à cet axe binaire. Les deux cones du second ordre sont remplacés par deux cylindres infiniment déliés (droites de la surface), parallèles à l'axe binaire.

39. La recherche des noeuds peut également s'effectuer en considérant la quadrique de révolution dont il a été question au n° 32. Si $\varphi(x^2, y^2, z^2, t^2) = 0$ est la quartique, et si l'on pose $x^2 = X$, $y^2 = Y$, etc., l'équation prend la forme $\Phi(X, Y, Z, T) = 0$ et représente la quadrique. On a identiquement:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x\frac{\partial\Phi}{\partial X}, \text{ etc.}$$

Les point nodaux de la quartique correspondent donc aux points de la quadrique qui vérifient à la fois les 4 équations:

$$\sqrt{X}\frac{\partial\Phi}{\partial X} = \sqrt{Y}\frac{\partial\Phi}{\partial Y} = \sqrt{Z}\frac{\partial\Phi}{\partial Z} = \sqrt{T}\frac{\partial\Phi}{\partial T} = 0.$$

Les quatre dérivées qui figurent ici ne peuvent s'annuler simultanément que si la quadrique possède un point singulier, et se réduit par conséquent à un cone. Le sommet de ce cone étant nécessairement sur la droite $X = Y = Z$, les points singuliers correspondants de la quartique sont sur les axes ternaires, et au nombre de 8. Dans tous les cas,

les points nodaux à distance finie sont sur la sphère correspondant au plan $\frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0$, c'est à dire sur la sphère $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. On peut faire les hypothèses suivantes:

$$1^\circ. \qquad X = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0.$$

La quadrique touche le plan $Y\mathrm{o}Z$, et par conséquent les 3 plans de coordonnées. Il est évident, par raison de symétrie, que le contact a lieu sur les bissectrices des axes, correspondant aux axes binaires de la quartique, ce qui donne 12 noeuds de cette dernière.

$$2^\circ. \qquad X = Y = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0.$$

La quadrique touche l'axe $\mathrm{o}Z$, et par conséquent les 3 axes de coordonnées, correspondant aux axes quaternaires de la surface, ce qui donne 6 noeuds de cette dernière.

3°. $X = Y = Z = 0$. La quadrique passe par l'origine, ce qui donne un point isotrope de la quartique.

Les noeuds à l'infini se produisent quand la quadrique touche à l'infini soit les plans, soit les axes de coordonnées. Ils se produisent aussi quand la quadrique a un point à l'infini dans la direction de son axe; ce qui réduit son cone asymptotique à cet axe. La quadrique est alors un paraboloïde. C'est ainsi que la surface à 16 noeuds dérive d'un paraboloïde, de révolution autour de la droite $X = Y = Z$, tangent aux trois plans de coordonnées. La surface à 15 noeuds correspond à une quadrique touchant à l'infini les 3 axes de coordonnées et à distance finie les trois plans de coordonnées. Chacun de ces plans rencontre la quadrique suivant deux droites parallèles aux deux axes contenus dans son plan; c'est un hyperboloïde rectangle, engendré par la révolution d'une arête d'un cube autour d'une diagonale.

Les surfaces qui possèdent 8 noeuds à distance finie sur les axes ternaires, c'est à dire les surfaces à 8, 11 et 14 noeuds, jouissent d'une propriété remarquable. Chacune d'elles dérive d'un cone droit; par conséquent les deux systèmes d'ellipsimbres correspondant aux génératrices rectilignes sont confondus et, le long de chaque ellipsimbre, la quartique

est touchée par la quadrique correspondant au plan tangent du cone. Cette quadrique passe évidemment par les 8 noeuds dérivant du sommet du cone; en chacun de ces noeuds, elle fait, comme on peut le constater facilement, un angle constant avec l'axe ternaire. De plus, l'ellipsimbre de contact se trouve sur un cone du second ordre, correspondant au plan méridien du cone de révolution, et passant conséquemment par les axes ternaires. Ainsi:

Toute quartique symétrique possédant 8 *noeuds à distance finie sur les axes ternaires est rencontrée suivant deux ellipsimbres par les cones du second ordre passant par ces axes, et touchée, le long de chacune de ces courbes par une quadrique contenant les* 8 *noeuds et coupant les axes ternaires sous un angle constant.*

On voit en même temps que la quartique symétrique dont il s'agit est l'enveloppe de la quadrique:

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = Const.$$

lorsque λ, μ, ν, varient de telle façon que $\lambda + \mu + \nu$ et $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$ aient des valeurs constantes.

40. La classe d'une quartique est en général égale à 36, mais chaque noeud l'abaisse de 2 unités. La quartique à 16 noeuds est donc de quatrième classe. Par conséquent, sa réciproque relative à une sphère centrale est du 4^ème^ ordre, et comme cette réciproque jouit de la même symétrie, son équation doit rentrer dans le type général:

$$N + A\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0.$$

Pour déterminer les constantes, remarquons qu'à chaque noeud à distance finie de la première surface (placé, comme nous l'avons vu, sur un axe binaire) correspond un plan perpendiculaire à l'axe binaire, et touchant la réciproque suivant une conique. Cherchons donc à quelle condition un plan tel que $z = y + p$ peut toucher une quartique symétrique suivant une conique. Cette conique étant nécessairement symétrique par rapport à l'axe des x, ses équations peuvent s'écrire:

$$z = y + p,$$

$$x^2 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

et, si l'on coupe la surface par le plan $z = y + p$, l'équation de la projection doit se réduire à $(x^2 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma)^2 = 0$. En partant de cette remarque, on trouve sans peine:

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{2}{3}p^2, \qquad C = \frac{4}{3}p^4,$$

$$\alpha = -1, \qquad \beta = -p, \qquad \gamma = -p^2.$$

p reste seul arbitraire. L'équation de la surface cherchée se réduit ainsi à:

$$(x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2 - 2p^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2p^4 = 0.$$

Il résulte de là que:

La réciproque d'une quartique symétrique à 16 noeuds est une surface de même nature.

Ceci nous permet de compléter les propriétés de la surface à 16 noeuds. Elle est touchée suivant une conique par chacun des 12 plans tels que $z = y + p$, et les équations de la conique de contact sont:

$$z = y + p,$$
$$x^2 - y^2 - py - p^2 = 0.$$

C'est une hyperbole rencontrant le plan zoy en deux points imaginaires, et chacun des plans zox, xoy en des points réels qui sont bien, comme cela est nécessaire, des noeuds de la surface (par exemple, le point $z = 0$, $x = y = p$). Chacun des plans touchant la surface suivant une conique passe par 4 noeuds, et est perpendiculaire à un axe binaire. La surface, n'ayant que 16 noeuds, ne possède que 16 plans bitangents distincts: à savoir les 4 plans directeurs et les 12 plans qui la touchent suivant des coniques. Si l'on considère les sections perpendiculaires à l'axe quaternaire oz, on remarque que, pour $z = 0$, il n'y a pas d'autre points réels que les 4 noeuds situés dans le plan sécant, et que, pour $z = \pm p$, la section se décompose en deux coniques. On en conclut: 1° que le cylindre circonscrit parallèlement à un axe quaternaire se réduit à 4 plans; 2° qu'il y a sur chaque axe quaternaire deux points dont chacun est le sommet de deux cones de second ordre circonscrits à la surface.

Aux quatre cercles directeurs correspondent 4 cylindres de révolution circonscrits parallèlement aux axes ternaires. Observons enfin que la réciprocité dont jouit cette surface permet de déduire des divers modes de génération indiqués précédemment une série de modes nouveaux. Ainsi, aux diverses séries d'ellipsimbres qu'on peut tracer sur la surface correspondent diverses séries de développables, circonscrites à la fois à la surface et à un couple de quadriques; etc.

La surface réciproque de la quartique symétrique à 14 noeuds (ou bitétraédrique) est une surface symétrique du 8ème ordre, qui possède un mode de génération remarquable. La bitétraédrique étant l'enveloppe d'une série de quadriques qui passent par 8 points fixes, et dont chacune la touche suivant une ellipsimbre (intersection de deux quadriques infiniment voisines), on en conclut que la surface réciproque est l'enveloppe d'une série de quadriques qui touchent 8 plans fixes, parallèles aux faces de l'octaèdre. Le lieu des points de contact des quadriques avec chacun des plans fixes est une circonférence ayant son centre sur l'axe ternaire perpendiculaire. La surface réciproque possède 12 droites, correspondant à celles de la surface bitétraédrique et formant comme celles-ci les diagonales des faces d'un cube.

41. Parmi les cas particuliers de quartiques symétriques, il convient de citer celui où le coefficient B est égal à zéro. Alors la somme des carrés des rayons des sphères directrices est nulle, et celles-ci se coupent orthogonalement. Le cone asymptotique n'a pas de points de rencontre à distance finie avec la surface. La quadrique correspondant à ce genre de surfaces a évidemment son centre à l'origine. Considérons spécialement la surface:

$$x^4 + y^4 + z^4 = 1$$

qui dérive de la sphère $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, et qu'on peut appeler pour cette raison surface pseudosphérique. En mettant son équation sous la forme ordinaire, on trouve:

$$N + (\rho^2 - \sqrt{2})(\rho^2 + \sqrt{2}) = 0.$$

La surface pseudosphérique est l'enveloppe de la quadrique

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1,$$

lorsque $A^2 + B^2 + C^2$ est constant. En posant $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $z^2 = Z$, et suivant le procédé indiqué au n° **23**, pour le cas des surfaces tétraédrales symétriques simples (qui comprend celui de la surface pseudosphérique), on reconnait que la détermination des lignes asymptotiques revient à l'intégration de l'équation $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$. Le problème se réduit donc à trouver les génératrices rectilignes de la sphère.

La surface pseudosphérique contient les 16 droites suivant lesquelles les 4 plans $z^4 - 1 = 0$ coupent les 4 plans $x^4 + y^4 = 0$. Par permutation des variables, on obtient 48 droites de la surface, toutes imaginaires, au sujet desquelles il y a lieu de se reporter à la remarque précédemment faite (n° 7).

La réciproque de la surface pseudosphérique par rapport à une sphère centrale est:

$$x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} + z^{\frac{4}{3}} = Const.,$$

surface du $36^{\text{ème}}$ ordre, possédant 48 droites triples

Sa transformée par rayons vecteurs réciproques issus du centre a une équation de la forme:

$$x^4 + y^4 + z^4 - k(x^2 + y^2 + z^2)^4 = 0.$$

L'équation, plus générale:

$$x^4 + y^4 + z^4 - k(x^2 + y^2 + z^2 + R^2)^4 = 0 \tag{1}$$

est homogène par rapport aux 4 quantités x, y, z, $x^2 + y^2 + z^2 + R^2$, qui peuvent être regardées comme les puissances du point (x, y, z) relatives à 4 sphères, dont 3 infinies et une imaginaire. La sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \tag{2}$$

est orthogonale à ces quatre sphères, et par conséquent la surface (1), en vertu d'une remarque de M. Darboux, est anallagmatique par rapport à la sphère (2). C'est une surface anallagmatique douée de toutes les propriétés établies précédemment pour les surfaces binaires à symétrie cuboctaédrique.

42. Parmi les surfaces cuboctaédriques du $6^{\text{ème}}$ ordre, mentionnons seulement la suivante, à cause de la simplicité de son mode de génération.

Un plan mobile, tangent à une sphère fixe de rayon $\frac{a}{3}$, coupe trois diamètres rectangulaires de cette sphère en trois points A, B, C. Le lieu du centre de gravité du triangle ABC est la surface:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{a^2}$$

ou

$$a^2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = x^2y^2z^2.$$

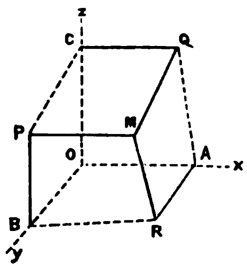
C'est une surface tétraédrale symétrique simple, dont on sait par suite trouver les lignes asymptotiques. La droite qui joint l'origine à un point de la surface est *inverse* de la perpendiculaire abaissée sur le plan tangent. La même surface peut être engendrée par le foyer d'un paraboloïde de révolution, qui se déplace en restant tangent aux trois plans de coordonnées.

Quatrième partie. Surfaces du type icosidodécaédrique.

43. Le type icosidodécaédrique est caractérisé par 15 plans de symétrie, contenant chacun deux arêtes parallèles du dodécaèdre. Ces quinze plans forment cinq systèmes de trièdres trirectangles. Leur existence entraîne celle d'un centre de symétrie, de 6 axes quinaires (perpendiculaires aux faces et passant chacun par les centres de deux faces parallèles) — de 10 axes ternaires (les diagonales du dodécaèdre) — de 15 axes binaires (les perpendiculaires aux plans de symétrie, joignant chacune les milieux de deux faces parallèles. Les faces de l'icosaèdre conjugué sont perpendiculaires aux axes ternaires, c'est à dire aux diagonales du dodécaèdre.

Prenons comme plans de coordonnées trois plans de symétrie rectangulaires, et commençons par chercher les équations qui déterminent les principales données du système. Pour fixer les idées, nous supposons qu'il s'agisse d'étudier le dodécaèdre régulier. Chaque axe binaire rencontre à angle droit deux arêtes contenues dans un même plan de sy-

Fig. 6.



métrie. ox, par exemple (fig. 6) rencontre une arête AR que nous pouvons supposer située dans le plan xoy. En prenant sur oy une longueur oB = oA = a, nous avons en B une arête BP, normale à oy, et la symétrie ternaire autour de la droite $x = y = z$ exige que cette arête soit dans le plan zoy. De même à la distance o$C = a$, l'axe oz est rencontré par une arête CQ située dans le plan xoz.

Par l'arête AR passent deux faces du dodécaèdre. Soit $ARMQ$ la face contenue dans le trièdre positif, et soit $x + \lambda z = 0$ l'équation du plan central parallèle à cette face. On a de même les deux plans $y + \lambda x = 0$, $z + \lambda y = 0$, correspondant aux deux autres faces $BPMR$, $CQMP$, déduites de la première par la symétrie ternaire. La droite MP est une arête, et le dièdre des deux faces qui se coupent suivant MP est double de celui que forme la face $MQAR$ avec le plan xoy. Cette condition détermine λ. En effet, la normale à la face $BPMR$, dirigée extérieurement au dodécaèdre, a pour cosinus directeurs:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \qquad 0.$$

De même la normale extérieure à $CQMP$ a pour cosinus:

$$0, \qquad \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Le cosinus de l'angle dièdre MP, supplémentaire de l'angle des normales extérieures, est donc $-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$. Cet angle est double de l'angle i d'inclinaison d'une face sur le plan de symétrie adjacent. D'ailleurs $\operatorname{tg} i = \frac{1}{\lambda}$. On a donc:

$$-\frac{\lambda}{1+\lambda^2} = \cos 2i = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}$$

d'où:

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Il faut évidemment prendre pour λ la racine positive de cette équation:

$$\lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Si μ est l'autre racine, on a:

$$\lambda\mu = -1, \qquad \lambda + \mu = -1, \quad \text{d'où} \quad \lambda^2 + \mu^2 = 3.$$

Chaque plan de symétrie est perpendiculaire à une arête. L'arête MP étant parallèle à l'intersection des deux plans $y + \lambda x = 0$, $z + \lambda y = 0$, le plan de symétrie qui lui est perpendiculaire a pour équation:

$$\frac{1}{\lambda} x - y + \lambda z = 0$$

ou bien:

$$\mu x + y - \lambda z = 0.$$

Par permutation, on trouve alors que les 15 plans de symétrie sont:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

$$x \pm \lambda y \pm \mu z = 0,$$

$$\pm \mu x + y \pm \lambda z = 0,$$

$$\pm \lambda x \pm \mu y + z = 0.$$

Les plans centraux parallèles aux faces sont au nombre de 6, ayant pour équations:

$$y \pm \lambda x = 0,$$

$$z \pm \lambda y = 0,$$

$$x \pm \lambda z = 0.$$

Ces six plans, perpendiculaires aux axes quinaires, peuvent, d'une manière abrégée, être appelés *plans quinaires*. Les plans centraux perpendiculaires aux rayons passant par les sommets, c'est à dire aux axes ternaires, sont au nombre de dix et peuvent être appelés *plans ternaires*. Pour les déterminer, remarquons que le sommet P (fig. 6) est à l'intersection des

trois plans $x = 0$, $y = a$, $z - a + \lambda y = 0$. Le plan ternaire correspondant est donc $y = -(1 - \lambda)z$, ou bien $y = -\lambda^2 z$. On a ainsi un premier groupe de six plans:

$$y \pm \lambda^2 z = 0,$$

$$z \pm \lambda^2 x = 0,$$

$$x \pm \lambda^2 y = 0.$$

Le sommet M est sur la droite $x = y = z$, perpendiculaire au plan $x + y + z = 0$, et l'on en déduit un second groupe de quatre plans:

$$x \pm y \pm z = 0.$$

44. Nous pouvons prendre comme éléments non sphériques les deux produits:

$$M = (z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2),$$

$$N = (y^2 - \lambda^4 z^2)(z^2 - \lambda^4 x^2)(x^2 - \lambda^4 y^2)(x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2)$$

qui représentent, à des facteurs numériques près, les produits des distances d'un point aux six plans quinaires et aux dix plans ternaires. L'équation générale des surfaces icosidodécaédriques est donc:

$$\varphi\Big((y^2 - \lambda^4 z^2)(z^2 - \lambda^4 x^2)(x^2 - \lambda^4 y^2)(x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2),$$

$$(y^2 - \lambda^2 x^2)(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2),\ (x^2 + y^2 + z^2)\Big) = 0$$

λ étant égal à $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ et φ désignant une fonction arbitraire.

Le produit des degrés des éléments L, M, N est égal à 120, ce qui est précisément le nombre minimum de points formant un groupe doué de la symétrie icosidodécaédrique. Les éléments M et N sont donc bien les éléments simples dont nous avons besoin. On remarque en même temps que, conformément à la théorie générale exposée au n° 2, la somme de leurs degrés, diminuée d'une unité est égale à 15, c'est à dire au nombre des plans de symétrie.

Pour exprimer effectivement x, y, z en fonction des éléments L, M, N, on peut poser:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = v,$$
$$x^2y^2z^2 = w,$$
$$x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 = p,$$
$$x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4 = q,$$

d'où $p + q = Lv - 3w$. En développant les valeurs de M et N, il vient:

$$M = w(1 - \lambda^6) - \lambda^2 q + \lambda^4 q,$$
$$N = (L^2 - 4v)[w(1 - \lambda^{12}) - \lambda^4 p + \lambda^8 q],$$

d'où:

$$\lambda^2(\lambda^6 - 1)q = M + \frac{N}{L^2 - 4v} + w(\lambda^{12} + \lambda^6 - 2),$$

$$\lambda^4(\lambda^6 - 1)p = \lambda^6 M + \frac{N}{L^2 - 4v} + w(2\lambda^{12} - \lambda^6 - 1).$$

Tirons de là $p + q$ et pq. D'autre part, nous avons:

$$pq = \Sigma x^6y^6 + w\Sigma x^6 + 3w^2 = v^3 - 6Lvw + qw^2 + wL^3.$$

Egalant les deux valeurs de pq, on obtient:

$$\lambda^6(\lambda^6 - 1)^2(v^3 - 6Lvw + qw^2 + wL^3)$$
$$= \left[M + \frac{N}{L^2 - 4v} + w(\lambda^{12} + \lambda^6 - 2)\right]\left[\lambda^6 M + \frac{N}{L^2 - 4v} + w(2\lambda^{12} - \lambda^6 - 1)\right].$$

De même, en égalant les deux valeurs de $p + q$, on trouve:

$$\lambda^2(\lambda^6 - 1)^2(Lv - 3w)$$
$$= M(1 + \lambda^4) + \frac{N}{L^2 - 4v}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{w}{\lambda^2}(1 + 2\lambda^2 + \lambda^6 - \lambda^8 - 2\lambda^{12} - \lambda^{14}).$$

Cette dernière équation, linéaire en w, donne une valeur de w qui, portée dans l'équation précédente, conduit à une équation du $5^{\text{ème}}$ degré en v. On aura donc 5 valeurs de v, c'est à dire de $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$, correspondant aux 5 trièdres trirectangles formés par les plans de symétrie.

v et w étant connus, et L étant supposé donné, les inconnues x^2, y^2, z se présentent comme racines d'une équation du $3^{ème}$ degré. Mais ces racines ne peuvent être rangées arbitrairement. Quand on a, par exemple, choisi l'une d'elles pour valeur de x^2, l'équation $x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 = p$, dans laquelle p est connu, et qui est dissymétrique par rapport à y^2 et z^2, empêche la permutation de ces deux coordonnées. L'équation du 3^e degré ne donne donc que trois groupes de valeurs de x^2, y^2, z^2, correspondant à 24 groupes de valeurs de x, y, z. Les 5 racines de l'équation en v conduisent donc à un ensemble de $5 \times 24 = 120$ points, comme on devait le prévoir. En résumé, le problème dépend d'une équation du $5^{ème}$ degré.

45. Le degré minimum de la surface icosidodécaédrique non décomposable en sphères est évidemment le sixième, et dans ce cas, l'équation peut s'écrire:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + A\rho^6 + 3B\rho^4 + 3C\rho^2 + D = 0.$$

A, B, C, D étant quatre constantes arbitraires, et ρ, la distance à l'origine. Pour abréger, nous appellerons cette surface *sextique symétrique*. Son intersection par une sphère centrale est une sphérosymétrique du $12^{ème}$ ordre. Son intersection par un plan perpendiculaire à un axe quinaire est une sextique plane ayant 5 axes de symétrie. Par conséquent, la surface peut être engendrée au moyen d'une sphérosymétrique du $12^{ème}$ ordre s'appuyant sur une sextique plane qui a 5 axes de symétrie.

La sextique symétrique, étant une surface binaire, possède trois sphères directrices, dont les rayons R_1, R_2, R_3 vérifient l'équation en ρ:

$$A\rho^6 + 3B\rho^4 + 3C\rho^2 + D = 0.$$

Si l'on désigne par plans directeurs les 6 plans quinaires, on peut dire que:

La sextique symétrique est le lieu des points dont le produit des distances à 6 plans directeurs, parallèles aux faces d'un dodécaèdre régulier, est proportionnel au produit des puissances par rapport à 3 sphères directrices, concentriques au dodécaèdre.

Chacun des plans directeurs coupe la surface suivant 3 cercles concentriques, ce qui fait connaître 18 cercles de la surface. D'après la

théorie générale la surface coupe orthogonalement deux sphères qui font connaître deux lignes de courbure sphérosymétrique, et dont le rayon dépend uniquement de celui des sphères directrices.

Si l'on met l'équation sous la forme:

$$(1) \quad (z^2-\lambda^2y^2)(x^2-\lambda^2z^2)(y^2-\lambda^2x^2)+A(\rho^2-R_1^2)(\rho^2-R_2^2)(\rho^2-R_3^2)^2=0,$$

on voit qu'on obtient 8 points de la surface en prenant les points d'intersection des trois quadriques, à sections cycliques centrales invariables:

$$(2) \quad \begin{aligned} z^2-\lambda^2y^2 &= t(\rho^2-R_1^2), \\ x^2-\lambda^2z^2 &= u(\rho^2-R_2^2), \\ y^2-\lambda^2x^2 &= v(\rho^2-R_3^2), \end{aligned}$$

t, u, v étant trois paramètres liés par la seule condition:

$$tuv+A=0.$$

Les 8 points sont sur la sphère:

$$\rho^2(1-\lambda^2)-(t+u+v)\rho^2-(tR_1^2+uR_2^2+vR_3^2).$$

Lorsqu'on a à la fois:

$$tuv=-A,$$
$$t+u+v=1-\lambda^2=\lambda,$$
$$tR_1^2+uR_2^2+vR_3^2=0,$$

les 3 quadriques ont en commun une ellipsimbre, qui appartient par suite à la surface. On peut satisfaire de trois manières à ces conditions, et on trouve ainsi, en chaque point, 3 ellipsimbres symétriques par rapport aux plans de coordonnées. Comme on peut d'ailleurs, de 6 manières différentes, combiner les facteurs de l'équation (1) sous une forme telle que (2), on en conclut l'existence de 18 ellipsimbres situées sur la surface, et ayant pour plans de symétrie les trois plans de coordonnées. Chaque système de plans de symétrie trirectangulaires correspond donc à 18 ellipsimbres; comme il y en a 5, on parvient à un total de 90 ellipsimbres passant par chaque point de la surface. On voit en même

temps que la sextique symétrique peut être engendrée au moyen d'une sphérosymétrique du 12ème ordre qui s'appuie sur une ellipsimbre.

46. Si l'on pose $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $z^2 = Z$, on est amené à considérer la sextique symétrique comme dérivant d'une surface cubique, à chaque point de laquelle correspondent 8 points de la sextique. A chaque droite de la cubique correspond une ellipsimbre de la sextique, et l'on a ainsi 27 ellipsimbres. Celles-ci se composent: 1° des 9 couples de cercles interceptés par les couples de plans directeurs symétriques relativement aux plans de coordonnées; 2° des 18 ellipsimbres, symétriques relativement aux mêmes plans, déjà rencontrées à l'article précédent. A chaque plan tritangent de la cubique correspond une quadrique coupant la surface suivant 3 ellipsimbres et touchant cette surface en 24 points. Il y a donc 45 quadriques jouissant de cette propriété et possédant comme plans de symétrie trois plans de symétrie rectangulaires de la sextique. Parmi ces quadriques, se trouvent comptées les 3 sphères directrices, ainsi que 3 couples de plans directeurs; il reste donc 39 quadriques proprement dites. Les 5 groupes de plans de symétrie trirectangulaires entraînent par suite l'existence de $5 \times 39 = 195$ quadriques, coupant chacune la sextique suivant 3 ellipsimbres, et la touchant en 24 points. Deux ellipsimbres d'un même groupe, c'est-à-dire ayant les mêmes plans de symétrie, se rencontrent ou ne se rencontrent pas suivant que les droites correspondantes de la cubique sont ou non dans le même plan. On peut ainsi étendre à la sextique les théorèmes concernant la disposition des droites d'une cubique. Par exemple:

Par chaque ellipsimbre passent 5 *quadriques coupant chacune la surface suivant deux autres ellipsimbres du même groupe;*

Chaque ellipsimbre est rencontrée par dix autres du même groupe; savoir 3 *couples de cercles et* 6 *ellipsimbres proprement dites.*

On pourrait aussi considérer les ellipsimbres comme disposées en doubles-six d'après l'arrangement imaginé par Schläfli; mais il paraît inutile d'insister davantage sur ce sujet.

47. Si l'on pose:

$$Z - \lambda^2 Y = U + V,$$

$$X - \lambda^2 Z = V + T,$$

$$Y - \lambda^2 X = T + U,$$

et

$$X + Y + Z = \omega,$$

d'où:

$$\omega(1 - \lambda^2) = \lambda\omega = 2(T + U + V),$$

l'équation de la surface cubique considérée à l'article précédent peut s'écrire:

$$(U + V)(V + T)(T + U) + A\omega^3 + 3B\omega^2 + 3C\omega + D = 0,$$

ou bien, en modifiant les constantes:

$$T^3 + U^3 + V^3 = A'\omega^3 + 3B'\omega^2 + 3C'\omega + D'.$$

On peut en outre déterminer 4 constantes a, b, a', b', telles qu'on ait identiquement:

$$A'\omega^3 + 3B'\omega^2 + 3C'\omega + D' = (a\omega + b)^3 + (a'\omega + b')^3.$$

Posant enfin

$$a\omega + b = -\Phi,$$

$$a'\omega + b' = -\Psi,$$

l'équation de la surface cubique se trouve mise sous la forme canonique:

$$T^3 + U^3 + V^3 + \Phi^3 + \Psi^3 = 0.$$

Les conditions imposées à a, b, a', b' sont:

$$a^3 + a'^3 = A',$$

$$a^2b + a'^2b' = B',$$

$$ab^2 + a'b'^2 = C',$$

$$b^3 + b'^3 = D'.$$

Pour résoudre ce système, on peut supposer qu'on ait d'abord fait disparaître D' par le changement de ω en $\omega + s$, s étant une racine de:

$$A's^3 + 3B's^2 + 3C's + D' = 0.$$

D' étant ainsi annulé, l'on a: $b' = -b$, d'où:

$$(a^2 - a'^2)b = B',$$
$$(a + a')b^2 = C',$$

et par suite:

$$\frac{(a^2 - a'^2)^2}{a + a'} = \frac{B'^2}{C'}.$$

Soit $a + a' = u$, $a - a' = v$, il vient:

$$uv^2 = \frac{B'^2}{C'}.$$

D'ailleurs:

$$4(a^3 + a'^3) = u^3 + 3uv^2 = 4A',$$

d'où:

$$u = \sqrt[3]{4A' - \frac{3B'^2}{C'}}, \qquad v = \sqrt{\frac{B'^2}{C'u}}.$$

La réduction n'est réellement possible par cette méthode que si $C'u$ est positif, ou bien:

$$4A'C' - 3B'^2 > 0.$$

Revenant à la sextique, on voit que son équation peut s'écrire, dans les mêmes conditions:

$$T^3 + U^3 + V^3 + \Phi^3 + \Psi^3 = 0,$$

$\Phi = 0$ et $\Psi = 0$ étant deux sphères centrales, et $T = 0$, $U = 0$, $V = 0$ étant les trois cones:

$$\lambda x^2 + (1 + \lambda^2)(y^2 - z^2) = 0,$$
$$\lambda y^2 + (1 + \lambda^2)(z^2 - x^2) = 0,$$
$$\lambda z^2 + (1 + \lambda^2)(x^2 - y^2) = 0.$$

48. Cherchons maintenant les droites réelles qui peuvent appartenir à la sextique symétrique. D'après ce qui a été dit précédemment, ces droites sont perpendiculaires aux plans de symétrie, et parallèles par suite aux axes binaires. Réciproquement, si une droite est perpendiculaire à un plan de symétrie, on peut déterminer les quatre coefficients

de la sextique symétrique de façon qu'elle rencontre la droite en quatre points dissymétriques, et par conséquent en 8 points. La droite appartient alors à la surface, ainsi que le groupe de 60 droites dont elle fait partie.

Si la sextique symétrique contient des perpendiculaires aux plans de symétrie, son cone asymptotique passe par les axes binaires, et en particulier par les axes de coordonnées. La condition nécessaire et suffisante pour cela est que le coefficient A soit nul, c'est à dire qu'une des sphères directrices soit infinie. Prenons donc la surface:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + 3B(x^2 + y^2 + z^2)^2$$
$$+ 3C(x^2 + y^2 + z^2) + D = 0,$$

et écrivons qu'elle contient la droite $x = \alpha$, $y = \beta$. Nous trouvons:

$$\beta^2 - \lambda^2\alpha^2 = \frac{3B}{\lambda^2},$$

$$\lambda^2\beta^2(2 + \lambda^2) + \alpha^2(1 + 2\lambda^2) = -\frac{C\lambda^2}{B},$$

$$3B\alpha^2\beta^2 + 3B(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 3C(\alpha^2 + \beta^2) + D = 0.$$

L'élimination de α^2 et β^2 conduit à une équation de condition compliquée, mais linéaire en D. Il en résulte que parmi les sextiques formant une famille asymptotique, c'est à dire n'ayant de points communs qu'à l'infini, il y en a une, et une seule, qui contient 60 droites à distance finie. Si les deux sphères directrices sont données, on connaît les rapports $\frac{C}{B}$ et $\frac{D}{B}$. En posant $C = uB$, $D = vB$, on a, pour déterminer B, une équation du $3^{\text{ème}}$ degré, sans terme indépendant. Laissant de côté la racine nulle, qui réduit la surface aux plans directeurs, on voit que *parmi les sextiques qui possèdent deux sphères directrices données (la troisième étant rejetée à l'infini), il y en a deux qui contiennent* 60 *droites*. Enfin, si l'on veut déterminer une sextique passant par une droite donnée, perpendiculaire à un plan de symétrie, on obtient, au moyen des équations précédemment écrites, des valeurs, toujours finies et déterminées, des coefficients B, C, D. D'après cela, *il y a toujours une sextique symétrique, et une seule, passant par une droite perpendiculaire à un plan de symétrie.* La disposition des

Fig. 7.

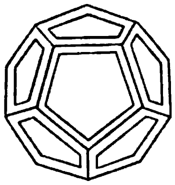
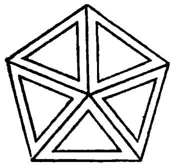


Fig. 8.



60 droites est bien facile à imaginer, on peut les regarder comme placées sur les faces d'un dodécaèdre régulier, parallèlement aux arêtes (fig. 7). On peut également les disposer sur les faces d'un icosaèdre (fig. 8).

49. Proposons nous de déterminer une surface contenant les arêtes d'un dodécaèdre régulier. Soient $x = 0$, $y = \beta$ les équations d'une de ces arêtes. En faisant $\alpha = 0$ dans les équations générales, on trouve, pour la surface cherchée:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2)$$
$$+ \lambda^2 \beta^2 (\rho^2 - \beta^2)[\rho^2 - (\lambda^2 + 1)\beta^2] = 0.$$

Cette surface possède 30 droites à distance finie, et 6 à l'infini. Le long de chaque droite à distance finie, le plan tangent est fixe (perpendiculaire à un plan de symétrie). Il y a 20 noeuds à distance finie (sommets du dodécaèdre) et 15 à l'infini correspondant aux directions des arêtes du dodécaèdre. En chaque sommet du dodécaèdre, le cone des tangentes, possédant la symétrie ternaire, est de révolution. L'une des sphères directrices ($\rho^2 = \beta^2$) est tangente aux arêtes du dodécaèdre. L'autre sphère directrice passe par le point de rencontre de l'arête $x = 0$, $y = \beta$ avec le plan directeur $z + \lambda y = 0$.

On peut former de même l'équation d'une surface contenant les arêtes d'un icosaèdre. Une arête de ce genre a pour équations $x = \alpha$, $y = 0$. Il suffit donc de faire $\beta = 0$ dans les équations générales, et l'on obtient:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) - \lambda^2 \alpha^2 (\rho^2 - \alpha^2)[\lambda^2 \rho^2 - \alpha^2 (1 + \lambda^2)] = 0.$$

Cette surface possède, comme la précédente, 30 droites à distance finie, dans les plans de symétrie, et 6 à l'infini. Elle a 12 noeuds à distance finie (sommets de l'icosaèdre), et 15 à l'infini, dans la direction des arêtes. En chaque noeud à distance finie, le cone des tangentes, possédant la symétrie quinaire, est de révolution. L'une des sphères directrices ($\rho^2 = \alpha^2$) est tangente aux arêtes. L'autre sphère passe par le point de rencontre de l'arête $x = \alpha$, $y = 0$ avec le plan directeur $\lambda z + x = 0$.

Une sextique symétrique proprement dite ne peut contenir les côtés des pentagones réguliers convexes placés sur les faces du dodécaèdre régulier de telle façon que leurs sommets coïncident avec les milieux des arêtes du dodécaèdre; car, en pareil cas, chaque plan directeur rencontrerait la surface suivant dix droites. Mais il existe une sextique contenant les côtés des pentagones étoilés correspondant aux pentagones convexes formés par les faces du même polyèdre. Il suffit, pour obtenir son équation, de faire $\alpha = \beta$ dans les formules générales, et il vient:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + \lambda^3 \alpha^2 (\rho^4 - 7\alpha^2\rho^2 + 13\alpha^4) = 0.$$

50. Pour étudier les points nodaux de la sextique symétrique, posons:

$$z^2 - \lambda^2 y^2 = u,$$

$$x^2 - \lambda^2 z^2 = v,$$

$$y^2 - \lambda^2 x^2 = w,$$

d'où:

$$\rho^2(1 - \lambda^2) = \lambda\rho^2 = u + v + w.$$

L'équation, rendue homogène:

$$f(u, v, w, t) = uvw + A\rho^6 + 3B\rho^4 t^2 + 3C\rho^2 t^4 + Dt^6 = 0$$

donne:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ux(w - \lambda^2 v) + 6x(A\rho^4 + 2B\rho^2 t^2 + Ct^4),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2vy(u - \lambda^2 w) + 6y(A\rho^4 + 2B\rho^2 t^2 + Ct^4),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2wz(v - \lambda^2 u) + 6z(A\rho^4 + 2B\rho^2 t^2 + Ct^4),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 6t(B\rho^4 + 2C\rho^2 t^2 + Dt^4).$$

Pour un point nodal, ces quatre dérivées s'annulent en même temps. Cherchons d'abord les noeuds à distance finie. t étant différent de zéro, on a en faisant $t = 1$:

$$B\rho^4 + 2C\rho^2 + D = 0$$

ce qui exprime que tous les points nodaux à distance finie sont, conformément à la théorie générale, sur les deux sphères centrales orthogonales à la surface, autrement dit sur les deux lignes de courbure sphériques. Ceci posé, on peut faire les hypothèses suivantes:

1ère hypothèse. $x = y = z = 0$, d'où $\rho = 0$, ce qui exige que D soit nul. On a alors un point isotrope à l'origine.

2ème hypothèse. $x = y = 0$, $z \gtrless 0$; alors $w = 0$. On a donc à la fois:

$$A\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0,$$

$$B\rho^4 + 2C\rho^2 + D = 0,$$

d'où:

$$4(B^2 - AC)(C^2 - BD) = (BC - AD)^2.$$

C'est la condition pour que deux sphères directrices coïncident. D'après cela:

Chaque fois que deux des sphères directrices sont confondues, la surface possède 30 *noeuds, placés à la rencontre de cette sphère avec les axes binaires.*

Ces 30 noeuds sont les milieux des arêtes d'un dodécaèdre régulier; la surface ne peut, sans se réduire aux plans directeurs, contenir les droites qui joignent ces points deux à deux.

Quand les trois sphères directrices sont confondues, ce qui a lieu pour $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D}$, chaque axe binaire rencontre la surface en 6 points, confondus trois par trois en deux noeuds. Cet axe est donc, en chaque noeud, une génératrice du cone des tangentes, et la symétrie binaire exige par suite que le cone des tangentes se décompose en deux plans passant par l'axe binaire. Chaque noeud est alors biplanaire, et il est facile de trouver ses deux plans tangents. Car l'équation de la surface peut s'écrire:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + A(x^2 + y^2 + z^2 - h^2)^3 = 0.$$

Faisant $z = h$, pour avoir la section par un plan tangent à la sphère directrice en l'un des noeuds, il vient:

$$(h^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 h^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + A(x^2 + y^2)^3 = 0$$

et les tangentes à la section en son point double sont données par

$y^2 - \lambda^2 x^2 = 0$; ce sont les traces des plans directeurs passant par ce point. En résumé:

Quand les trois sphères directrices sont confondues, chaque axe binaire rencontre la surface en deux noeuds biplanaires, et les deux plans tangents en chaque noeud sont les plans directeurs qui se coupent suivant l'axe binaire.

3ème **hypothèse.** $x = 0$, y et z différents de zéro. Dans ce cas, en écrivant que $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont nuls, il vient:

$$v(u - \lambda^2 w) = w(v - \lambda^2 u).$$

Mais:

$$u = z^2 - \lambda^2 y^2, \qquad v = -\lambda^2 z^2, \qquad w = y^2.$$

Portant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient:

$$\lambda^2 y^4 - 2(1 + \lambda^2) y^2 z^2 + z^4 = 0,$$

d'où:

$$\frac{z^2}{y^2} = 1 + \lambda^2 \pm \sqrt{1 + \lambda^2 + \lambda^4} = 1 + \lambda^2 \pm 2\lambda.$$

On a donc les deux solutions:

$$z = \pm y(1 - \lambda) = \pm \lambda^2 y$$

$$z = \pm y(1 + \lambda) = \pm y \frac{\lambda + \lambda^2}{\lambda} = \pm \frac{y}{\lambda}.$$

Le premier genre de solution correspond aux axes ternaires, et le second, aux axes quinaires situés dans le plan zoy. Prenons d'abord l'axe ternaire $z = \lambda^2 y$. Nous avons:

$$u = z^2 - \lambda^2 y^2 = -\lambda^3 y^2,$$

$$v = -\lambda^2 z^2 = -\lambda^6 y^2,$$

$$w = y^2.$$

Donc:

$$u + v + w = (1 - \lambda^3 - \lambda^6) y^2 = 3\lambda^3 y^2$$

et comme $u + v + w = \lambda \rho^2$, on obtient:

$$y^2 = \frac{\rho^2}{3\lambda^2}.$$

On en déduit aisément:

$$v(u - \lambda^2 w) = \frac{\lambda^3}{9}\rho^4 = 3p\rho^4,$$

en posant

$$p = \frac{\lambda^3}{27}.$$

Pour qu'il existe un noeud de cette nature, il faut et il suffit que les deux équations en ρ^2:

$$(A + p)\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0,$$
$$B\rho^4 + 2C\rho^2 + D = 0,$$

aient une racine commune, d'où:

$$p^2D^2 + 2p(2C^3 - 3BCD + AD^2) - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD) + (BC - AD)^2.$$

Si cette condition est remplie, la surface a 20 noeuds sur les axes ternaires. On peut la vérifier en posant:

$$(BC - AD)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD) = 0,$$
$$pD^2 + 2(2C^3 - 3BCD + AD^2) = 0.$$

Si ces deux conditions sont remplies, la surface possède à la fois 30 noeuds sur les axes binaires et 20 noeuds sur les axes ternaires. Les premiers sont sur la sphère orthogonale qui coïncide avec une sphère directrice, les seconds sont sur l'autre sphère orthogonale.

Considérons maintenant l'axe quinaire $y = \lambda z$. On a dans ce cas:

$$u = z^2(1 - \lambda^4),$$
$$v = -\lambda^2 z^2,$$
$$w = \lambda^2 z^2,$$

d'où:

$$u + v + w = z^2(1 - \lambda^4) = \lambda\rho^2,$$
$$z^2 = \frac{\lambda\rho^2}{1 - \lambda^4},$$
$$u = \lambda\rho^2, \qquad v = -\frac{\lambda^3\rho^2}{1 - \lambda^4}, \qquad w = \frac{\lambda^3\rho^2}{1 - \lambda^4},$$
$$v(u - \lambda^2 w) = 3q\rho^4,$$

en posant

$$q = -\frac{\lambda^2}{5}.$$

Pour qu'il y ait des noeuds de cette nature, il faut et il suffit que les deux équations:

$$(A + q)\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0,$$
$$B\rho^4 + 2C\rho^2 + D = 0$$

aient une racine commune, d'où:

$$q^2 D^2 + 2q(2C^3 - 3BCD + AD^2) - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD) + (BC - AD)^2 = 0.$$

Cette condition entraîne l'existence de 12 noeuds, qui peuvent coexister avec les 30 noeuds des axes binaires ou avec les 20 noeuds des axes ternaires. Mais les trois systèmes de noeuds ne peuvent se présenter en même temps (q étant différent de p) si l'on n'a pas:

$$(BC - AD)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD) = 0,$$
$$2C^3 - 3BCD + AD^2 = 0,$$
$$D^2 = 0,$$

d'où $C = 0$, $D = 0$. Dans ce cas, les deux sphères qui contiennent les noeuds sont évanouissantes, et ceux-ci se confondent en un seul, à moins qu'on n'ait $B = 0$, et alors la surface se réduit aux plans directeurs.

4ème hypothèse. x, y et z différents de zéro. Les équations de condition donnent:

$$u(w - \lambda^2 v) = v(u - \lambda^2 w) = w(v - \lambda^2 u),$$

ce qu'on peut écrire:

$$w(u + \lambda^2 v) \qquad = uv(1 + \lambda^2),$$
$$w(u - v + \lambda^2 u) = uv\lambda^2,$$

d'où:

$$w[\lambda^2(u + \lambda^2 v) - (1 + \lambda^2)(u - v + \lambda^2 u)] = 0,$$

ou encore, en supprimant le facteur $\lambda^4 + \lambda^2 + 1$, qui n'est pas nul:

$$w(v - u) = 0.$$

On a de même:

$$u(w - v) = 0,$$

$$v(u - w) = 0,$$

Supposons d'abord $u = 0$. Il reste simplement $vw = 0$. Il faut donc que l'un des deux facteurs, v, par exemple, soit nul. On a ainsi:

$$z^2 - \lambda^2 y^2 = 0, \qquad x^2 - \lambda^2 z^2 = 0.$$

Le noeud est donc à l'intersection de deux plans directeurs, c'est-à-dire sur un axe binaire, ce qui ramène au cas étudié dans la deuxième hypothèse. Supposons maintenant que u, v, w soients différents de zéro. Alors il vient $u = v = w$ ou bien:

$$z^2 - \lambda^2 y^2 = x^2 - \lambda^2 z^2 = y^2 - \lambda^2 x^2.$$

On tire de là: $x^2 = y^2 = z^2$, et l'on retrouve les noeuds situés sur les axes ternaires.

La quatrième hypothèse ne conduit donc à aucun cas nouveau.

51. Il reste à chercher les noeuds à l'infini (génératrices doubles du cone asymptotique). Si α, β, γ sont les cosinus directeurs d'une direction nodale, et si l'on pose:

$$\gamma^2 - \lambda^2\beta^2 = u',$$

$$\alpha^2 - \lambda^2\gamma^2 = v',$$

$$\beta^2 - \lambda^2\alpha^2 = w',$$

d'où

$$u' + v' + w' = 1 - \lambda^2 = \lambda,$$

il vient:

$$2\alpha u'(w' - \lambda^2 v') + 6A\alpha = 0,$$

$$2\beta v'(u' - \lambda^2 w') + 6A\beta = 0,$$

$$2\gamma w'(v' - \lambda^2 u') + 6A\gamma = 0,$$

et

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

De là les hypothèses suivantes:

1ère hypothèse. $\beta = \gamma = 0, \qquad \alpha = 1$

d'où

$$u'(w' - \lambda^2 v') + 3A = 0.$$

On a en même temps:

$$u' = 0, \qquad v' = 1, \qquad w' = -\lambda^2,$$

donc $A = 0$.

Si donc A est nul, les 15 directions binaires sont nodales; il y a 15 noeuds à l'infini. Le cone asymptotique est réduit aux plans directeurs. Ces 15 directions nodales coexistent:

1° avec un noeud à l'origine, si $D = 0$;

2° avec 30 noeuds à distance finie sur les axes binaires, si l'on a:

$$4B^2(C^2 - BD) = B^2C^2,$$

ou bien $3C^2 - 4BD = 0$. L'hypothèse $B = 0$ rejetterait ces noeuds à l'infini;

3° avec 20 noeuds sur les axes ternaires, si l'on a:

$$4(B^2 - pC)(C^2 - BD) = (BC - pD)^2;$$

4° avec 12 noeuds sur les axes quinaires, si l'on a:

$$4(B^2 - qC)(C^2 - BD) = (BC - qD)^2.$$

On peut avoir en même temps les 15 noeuds binaires à l'infini, les 30 noeuds binaires à distance finie et les 20 noeuds ternaires, soit en tout 65 noeuds.

2ème hypothèse. $\alpha = 0$, β et γ différents de zéro. Alors:

$$u' = \gamma^2 - \lambda^2\beta^2, \qquad v' = -\lambda^2\gamma^2, \qquad w' = \beta^2$$

et

$$v'(u' - \lambda^2 w') = w'(v' - \lambda^2 u')$$

ou bien:

$$\beta^2(\lambda^2\beta^2 - 2\gamma^2) + \gamma^2(\gamma^2 - 2\lambda^2\beta^2) = 0.$$

On tire de là, comme précédemment:

$$\gamma = \pm\lambda^2\beta \quad \text{et} \quad \beta = \pm\lambda\gamma.$$

Si l'on prend $\gamma = \lambda^2\beta$, il vient:

$$u' = \lambda^2\beta^2(\lambda^2 - 1), \qquad v' = -\lambda^6\beta^2, \qquad w' = \beta^2.$$

On tire de là, p ayant la même signification qu'à l'article précédent:

$$v'(u' - \lambda^2 w') = 3p$$

et la condition $v'(u' - \lambda^2 w') + 3A = 0$ devient $A + p = 0$.

Quand il en est ainsi, les dix directions ternaires sont nodales, et le cone asymptotique est coupé par un plan quelconque suivant une courbe unicursale.

Prenant maintenant $\beta = \lambda\gamma$, et raisonnant de la même façon, on est conduit à l'équation $A + q = 0$ pour caractériser les surfaces admettant les 6 axes quinaires comme directions nodales.

3ème hypothèse. α, β, γ différents de zéro. On trouve, comme dans le cas des noeuds à distance finie, que cette hypothèse se ramène aux précédentes.

En résumé, suivant que l'on a $A = 0$, $A + p = 0$ ou $A + q = 0$, le nombre des directions nodales s'élève à 15, à 10 ou à 6. Ces trois cas ne peuvent évidemment se présenter en même temps, mais chacun d'eux peut se combiner avec 30 noeuds binaires, avec 20 noeuds ternaires, ou avec 12 noeuds quinaires à distance finie. Deux espèces de noeuds à distance finie peuvent même coïncider avec une espèce de noeuds à l'infini. Le tableau des singularités qui peuvent se rencontrer sans que la surface se réduise à un cone ou à des plans ne comprend pas moins de 40 cas distincts, et cela en excluant les cas particuliers dans lesquels plusieurs noeuds viennent se réunir à l'origine pour y former un noeud multiple. Le nombre maximum de noeuds est de 65 (30 noeuds binaires — 20 noeuds ternaires — 15 directions nodales); nous avons déjà indiqué dans quelles conditions ce cas se réalise. La classe de la surface, qui est égale à 150 en l'absence de points nodaux, se trouve alors abaissée de $2 \times 65 = 130$ unités. La surface est donc de la 20ème classe.

Correction.

Page 240, dans les deux dernières équations, mettre partout μ au lieu de p.

SUR LES INTÉGRALES ALGÉBRIQUES DE DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES[1]

PAR

G. HUMBERT

à PARIS.

1. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique, et soit $\varphi(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque; le problème qu'on se propose de traiter dans ce travail est le suivant:

Reconnaître si l'intégrale $I = \int \varphi(x, y)dx$, où y est liée à x par la relation $f(x, y) = 0$, est une fonction algébrique de x.

---

[1] Les résultats obtenus par M. HUMBERT ont déjà été trouvés par M. WEIERSTRASS bien des années auparavant et communiqués par lui dans son cours sur les fonctions abéliennes. Mais la méthode suivie par les deux savants est tout à fait différente. Chez M. WEIERSTRASS les conditions pour qu'une intégrale de la forme $\int R(x, y)\,dx$ soit une fonction algébrique de x découlent, comme simple corollaire, du théorème sur la réduction de chaque intégrale de la forme considérée à une somme d'intégrales normales de la première, de la seconde et de la troisième espèce. Pour effectuer cette réduction il faut et il suffit de connaître:

1° les coefficients des puissances négatives de t aux environs de tous les points analytiques pour lesquels le développement de $R(x_t, y_t)\dfrac{dx_t}{dt}$ contient en général des puissances négatives de t;

2° la valeur de $R(x, y)$ pour p points analytiques réguliers $(a_1, b_1), \ldots, (a_p, b_p)$ choisis arbitrairement.

Le théorème de M. WEIERSTRASS est cité, quoique sans démonstration, dans la thèse inaugurale de M. HETTNER (Berlin, 1877).

Le rédacteur en chef.

2. Abel a montré que si l'intégrale I est une fonction algébrique de x, elle s'exprime rationnellement en x et y, mais il n'a pas fait connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Ces conditions ont été données par Briot et Bouquet sous une forme très simple: pour que l'intégrale soit algébrique, il faut et il suffit 1° qu'elle n'admette pas de cycle polaire; 2° que ses périodes soient nulles.

Il est malheureusement impossible de vérifier directement si les conditions de la seconde catégorie sont ou non satisfaites: les périodes étant en effet les intégrales prises le long de certains contours finis, on obtient, en exprimant qu'elles sont nulles, des équations où figurent des intégrales définies qu'on ne peut, là plupart du temps, calculer qu'à l'aide de méthodes d'approximation; il en résulte que le critérium tiré de la considération des périodes n'est applicable que dans des cas simples, comme ceux qu'ont indiqués Briot et Bouquet.

Au contraire, les conditions de la première catégorie, qui expriment qu'il n'y a pas de cycles polaires, peuvent se vérifier sans difficulté; il suffit de calculer, dans le développement de chaque système de valeurs infinies de $\varphi(x, y)$, suivant les puissances croissantes, (entières ou fractionnaires) de $x-a$, aux environs du point $x=a$, le coefficient du terme en $\frac{1}{x-a}$, qui engendre un logarithme dans l'intégrale, et d'écrire que ce coefficient est nul.

Liouville, dans divers mémoires, a étudié la question à un tout autre point de vue: il suppose que l'intégrale I est liée à x par une relation algébrique $\psi(x, I)=0$, à coefficients indéterminés, et cherche à déterminer ces coefficients de manière que la valeur de $\frac{dI}{dx}$ tirée de cette relation soit égale à $\varphi(x, y)$: il a pu ramener ainsi la question à la résolution d'un système d'équations linéaires.

Plus tard, M. Zeuthen, en supposant toujours l'intégrale algébrique, a indiqué un moyen sûr de trouver directement l'ordre de la relation $\psi(x, I)=0$; il obtient ainsi la forme de cette relation à un nombre fini de constantes près, et, en écrivant que $\frac{dI}{dx}$ est égal à $\varphi(x, y)$, il détermine ces constantes, ou, si cette détermination est impossible, reconnait que l'intégrale cherchée est transcendante (Comptes rendus, 1880).

M. RAFFY, dans sa thèse de doctorat (Paris, 1883), a donné un autre procédé pour déterminer le degré de la relation $\psi(x, I) = 0$, par des opérations purement arithmétiques.

Ces méthodes ont l'inconvénient de ne pas fournir sous une forme explicite les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale soit algébrique; la méthode que nous allons développer nous semble remplir ce but, d'une manière relativement simple.

Elle repose sur la théorie des fonctions fuchsiennes, dont M. POINCARÉ a montré la liaision intime avec la théorie des intégrales abéliennes.

3. Soit p le genre de la courbe $f(x, y) = 0$; il résulte des recherches de M. POINCARÉ que les coordonnées, x et y, peuvent être considérées comme des fonctions fuchsiennes, de genre p, d'un paramètre t: nous choisirons des fonctions de la première famille.

Le polygone R_0, générateur de ces fonctions, jouira des propriétés suivantes: il a $4p$ côtés; les côtés opposés sont conjuguées deux à deux, c. à. d. transformés l'un dans l'autre par une des substitutions du groupe fuchsien correspondant, G; et la somme de ses angles est égale à 2π.

De plus, ab et $a'b'$ étant deux côtés opposés, tels que les points a' et b' correspondent respectivement à a et b par la substitution qui transforme ab en $a'b'$, si l'on décrit R_0 en partant de a, dans le sens ab, on parcourt le côté $a'b'$ dans le sens $b'a'$.

Cela posé, remplaçons dans l'intégrale I, x et y par leurs valeurs en fonction fuchsienne de t, et désignons par $\varphi(t)$ la fonction $\varphi(x(t), y(t))$, il viendra:

$$I = \int \varphi(t) \frac{dx}{dt} dt.$$

$\varphi(t)$ est une fonction fuchsienne de t; $\frac{dx}{dt}$ est une fonction thétafuchsienne du premier degré, c. à. d. telle qu'on ait:

$$F\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right) = F(t) \cdot (\gamma t + \delta)^2$$

en désignant par $\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$ une des substitutions de G, et en supposant $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Cela résulte immédiatement de ce que la fonction $x(t)$ ne change pas si l'on y opère la substitution précédente.

On aura donc, en posant:

$$\theta(t) = \varphi(t)\frac{dx}{dt},$$

pour l'expression de I:

$$I = \int \theta(t)\,dt$$

$\theta(t)$ étant également une fonction thétafuchsienne du premier degré.

4. L'intégrale I, si elle est algébrique, sera, d'après ABEL, une fonction rationnelle de x et y, c. à d. une fonction fuchsienne de t, et réciproquement; la question est ainsi ramenée à la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale d'une fonction thétafuchsienne du premier degré soit une fonction fuchsienne.

Soit donc

$$I(t) = \int \theta(t)\,dt.$$

I devant être une fonction uniforme de t, dans l'intérieur du cercle fondamental, il est tout d'abord nécessaire que les résidus de $\theta(t)$, à l'intérieur du polygone R_0, soient nuls.

Ces conditions reviennent aux premières conditions de BRIOT et BOUQUET: le résidu de $\theta(t)$ relatif à un infini α de cette fonction est en effet égal à la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int \theta(t)\,dt$ le long d'un petit contour entourant le point α. Soient a, b les coordonnées du point d'argument α sur la courbe $f(x, y) = 0$; supposons d'abord que ce point ne soit pas un point critique pour la fonction y, de x, définie par la relation $f(x, y) = 0$. Quand, dans le plan des quantités t, le point t décrit un contour élémentaire autour du point α, le point x, dans le plan des quantités x, décrit *une seule fois* un contour élémentaire autour du point a, et comme on a

$$\theta(t) = \varphi(x, y)\frac{dx}{dt},$$

l'intégrale $\int \theta(t)\,dt$ le long du contour considéré, est égale à l'intégrale $\int \varphi(x, y)\,dx$ le long d'un petit contour entourant le point a, qui est un infini de $\varphi(x, y)$, et de I, c. à. d. égale au produit de $2\pi i$ par le résidu de la fonction $\varphi(x, y)$, considérée comme fonction de x, pour le point $x = a$; ou encore à la *période polaire* de I, pour le point $x = a$.

Si le point a est un point critique de la fonction y, on aura, aux environs de la valeur $t = \alpha$:

$$x - a = (t - \alpha)^q \xi(t); \; y - b = (t - \alpha)^r \eta(t);$$

ξ et η étant deux fonctions ne devenant ni nulles ni infinies pour $t = \alpha$; q et r désignant deux entiers positifs. Il en résultera pour $\varphi(x, y)$ une expression de la forme $(t - a)^{-s}\chi(t)$, s étant un entier négatif. Quand t décrit un petit cercle autour du point α, x décrit q fois un petit contour autour du point a; aux environs de ce point, on aura d'ailleurs pour $\varphi(x, y)$ un développement de la forme:

$$\varphi(x, y) = A(x - a)^{-\frac{s}{q}} + B(x - a)^{\frac{1-s}{q}} + \ldots + H(x - a)^{-1} + \ldots$$

et la valeur de l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$, quand x décrit q fois un contour élémentaire autour du point a sera égal à $2qi\pi H$, c. à. d. à la *période polaire* de I, pour le point $x = a$.

Il en résulte que, dans tous les cas, les conditions obtenues en écrivant que les résidus de $\varphi(x, y)\frac{dx}{dt}$ dans l'intérieur de R_0, sont nuls, expriment que l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$ n'a pas de *période polaire*, ce qui revient aux premières conditions de BRIOT et BOUQUET.

5. Supposons ces conditions remplies, $I(t)$ sera, dans le cercle fondamental, fonction uniforme de t. Si c'est une fonction fuchsienne, considérons, le long du périmètre de R_0, l'intégrale $J = \int_{R_0} I(t)\theta(t)dt$, où $\theta(t)$ désigne une fonction thétafuchsienne holomorphe de degré un: il existe p de ces fonctions, linéairement distinctes, si p est le genre des fonctions fuchsiennes considérées. Je dis que l'intégrale J est nulle.

Soient en effet ab et $a'b'$ deux côtés opposés de R_0, transformés l'un dans l'autre par la substitution $\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$ et posons $t_1 = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$.

Les éléments de J, relatifs à deux points correspondants t et t_1, sur les côtés ab et $a'b'$ sont $I(t)\theta(t)dt$ et $-I(t_1)\theta(t_1)dt_1$.

Or on a:

$$I(t_1) = I(t),$$
$$\theta(t_1) = \theta(t)(\gamma t + \delta)^2,$$
$$dt_1 = dt(\gamma t + \delta)^{-2},$$

donc:

$$I(t_1)\theta(t_1)dt_1 = I(t)\theta(t)dt$$

et par suite l'intégrale J est nulle le long de R_0. En d'autres termes, la somme des résidus de la fonction $I(t)\theta(t)$ est nulle dans l'intérieur de R_0.

$\theta(t)$ étant une fonction holomorphe, les infinis de $I(t)\theta(t)$ sont ceux de $I(t)$, c. à. d. de $\Theta(t)$, et les résidus correspondants se calculent sans difficulté quand on connait le développement de $\Theta(t)$ suivant les puissances croissantes de $t-\alpha$, autour du pôle $t=\alpha$.

En donnant successivement à $\theta(t)$ les valeurs $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\ldots$, $\theta_p(t)$ des p fonctions thétafuchsiennes holomorphes de degré un, linéairement distinctes, on obtient ainsi p équations, exprimant que la somme des résidus, dans l'intérieur de R_0, des fonctions $I(t)\theta_i(t)$ est nulle. Nous désignerons ces équations sous le nom d'équations (E).

6. Les équations (E) sont elles suffisantes pour que l'intégrale $I(t)$ soit une fonction fuchsienne? Il serait aisé de démontrer qu'il n'en est rien; nous allons d'ailleurs donner une interprétation analytique de ces équations, au point de vue de la nature de la fonction I.

Si la somme des résidus de chacune des p fonctions $I(t)\theta_i(t)$ dans l'intérieur de R_0 est nulle, la fonction $I(t)$ sera égale à une fonction fuchsienne augmentée d'une fonction linéaire et homogène des intégrales $\int\theta_1(t)dt$, $\int\theta_2(t)dt$, $\ldots$, $\int\theta_p(t)dt$.

Pour démontrer cette proposition importante, nous supposerons, dans le but d'abréger l'exposition, qu'on a $p=2$: la méthode est d'ailleurs absolument générale.

L'intégrale $I(t)$ est, par hypothèse, une fonction uniforme de t; or on a, $\left(t, \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)$ désignant toujours une des substitutions du groupe G:

$$\theta\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right) = \theta(t)(\gamma t+\delta)^2$$

ou:

$$\theta\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right) = \theta(t); \text{ et, puisque } I = \int\theta(t)dt:$$

$$I\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right) = I(t) + m$$

m étant une constante. Le groupe G dérive des $2p$ substitutions fondamentales qui transforment l'un dans l'autre les côtés opposés de R_0; si p est égal à 2, on aura quatre substitutions, et il viendra:

$$I\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) = I(t) + m_i. \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

Si l'on désigne par $G_k(t)$ l'intégrale $\int \theta_k(t) dt$, on aura de même:

$$\begin{aligned} G_1\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) &= G_1(t) + \Omega_{1i}, \\ G_2\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) &= G_2(t) + \Omega_{2i}. \end{aligned} \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

Les quantités m, Ω_1 et Ω_2 sont les périodes des intégrales I, G_1 et G_2.

Cela posé, je dis que l'on peut déterminer deux constantes, λ_1 et λ_2, telles que la fonction

$$I(t) + \lambda_1 G_1(t) + \lambda_2 G_2(t)$$

soit une fonction fuchsienne. Il faut pour cela que cette fonction ne change pas si l'on y remplace t par $\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}$, c. à. d. qu'on ait:

$$\text{(A)} \qquad \left| \begin{aligned} m_1 + \lambda_1 \Omega_{11} + \lambda_2 \Omega_{21} &= 0, \\ m_2 + \lambda_1 \Omega_{12} + \lambda_2 \Omega_{22} &= 0, \\ m_3 + \lambda_1 \Omega_{13} + \lambda_2 \Omega_{23} &= 0, \\ m_4 + \lambda_1 \Omega_{14} + \lambda_2 \Omega_{24} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Il s'agit de montrer que ces quatre équations en λ_1, λ_2 sont compatibles, si les résidus de chacune des fonctions $I(t)\theta_1(t)$ et $I(t)\theta_2(t)$ ont une somme nulle, c. à. d. si les intégrales $\int I(t)\theta_1(t)dt$ et $\int I(t)\theta_2(t)dt$ sont nulles le long de R_0.

Or soient toujours $a_i b_i$ et $a'_i b'_i$ deux côtés opposés de R_0, tels que ab se transforme en $a'b'$ par la substitution $\left(t, \frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right)$; on a évidemment, pour la partie de l'intégrale $\int I(t)\theta_k(t)dt$ qui correspond à ces côtés, la valeur:

$$m_i \int_{a_i}^{b_i} \theta_k(z) dz. \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1, 2, 3, 4 \\ k=1, 2 \end{smallmatrix}\right)$$

Désignons l'intégrale qui figure dans cette expression par $\omega_{\kappa l}$; on aura donc:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} m_1\omega_{11} + m_2\omega_{12} + m_3\omega_{13} + m_4\omega_{14} = 0, \\ m_1\omega_{21} + m_2\omega_{22} + m_3\omega_{23} + m_4\omega_{24} = 0. \end{cases}$$

Si l'on écrit que l'intégrale $\int G_k(t)\theta_l(t)$ est nulle le long de R_0 (la fonction $G_k(t)\theta_l(t)$ est en effet holomorphe dans R_0), on aura de même en donnant à k et l les valeurs 1 et 2, les quatre équations:

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \Omega_{11}\omega_{11} + \Omega_{12}\omega_{12} + \Omega_{13}\omega_{13} + \Omega_{14}\omega_{14} = 0, \\ \Omega_{21}\omega_{11} + \Omega_{22}\omega_{12} + \Omega_{23}\omega_{13} + \Omega_{24}\omega_{14} = 0, \\ \Omega_{11}\omega_{21} + \Omega_{12}\omega_{22} + \Omega_{13}\omega_{23} + \Omega_{14}\omega_{24} = 0, \\ \Omega_{21}\omega_{21} + \Omega_{22}\omega_{22} + \Omega_{23}\omega_{23} + \Omega_{24}\omega_{24} = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant la première équation (B) et les deux premières équations (C); si les déterminants qu'on peut former en combinant 3 des colonnes de la matrice:

$$\text{(D)} \qquad \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \end{matrix}$$

ne sont pas tous nuls, on tirera de ces équations les valeurs proportionnelles de ω_{11}, ω_{12}, ω_{13}, ω_{14}.

La deuxième équation (B) et les deux dernières équations (C) montrent alors qu'on aura des valeurs proportionnelles identiques pour ω_{21}, ω_{22}, ω_{23}, ω_{24}.

Il en résulte qu'on pourra former une fonction $\theta(t) = \mu_1\theta_1(t) + \mu_2\theta_2(t)$, μ_1 et μ_2 étant des constantes, telle que les quantités ω correspondantes soient toutes nulles, c. à. d. telles que l'intégrale $\int\theta(t)dt$ soit nulle le long de chacun des côtés du polygone R_0.

Je dis que, dans ce cas, l'intégrale $G(t) = \int\theta(t)dt$ serait une fonction fuchsienne de t. Evaluons en effet $G\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right)$. On a:

$$G\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) - G(t) = \int_t^{\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}} \theta(t)dt.$$

Soit Ω_i la valeur commune des deux membres; Ω_i est la valeur de $\int \theta(t)dt$ le long d'une ligne qui joint deux points quelconques, transformés l'un de l'autre par la substitution $\left(t, \frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right)$: si l'un de ces points est un sommet de R_0, le second sera également un sommet, et l'intégrale pourra être prise le long du périmètre du polygone, entre ces deux points. L'intégrale Ω_i sera donc une somme d'intégrales ω, et sera par suite égale à zéro. On en conclut que $G(t)$ est bien une fonction fuchsienne, résultat absurde puisque $G(t)$ est holomorphe dans le polygone R_0.

Pour échapper à cette conclusion, il faut nécessairement admettre que les déterminants formés avec 3 colonnes quelconques de la matrice (D) sont nuls: c'est précisément la condition pour que les équations (A) se réduisent à deux d'entre elles.

Ces équations d'ailleurs, donneront toujours pour λ_1 et λ_2 des valeurs finies; il ne pourrait en être autrement que si les déterminants d'ordre deux formés avec la matrice

$$\begin{matrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \end{matrix}$$

étaient tous nuls, ce qui est impossible, car, autrement, on formerait une fonction

$$\mu_1 G_1(t) + \mu_2 G_2(t),$$

pour laquelle toutes les périodes seraient nulles.

Le théorème énoncé plus haut, sur la signification des équations (E) est donc démontré.

7. Ces équations peuvent se mettre sous une forme plus commode au point de vue des applications.

Le résidu de la fonction $I(t)\theta_i(t)$, relatif à un infini, $t = \alpha$, de I, est en effet égal à la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int I(t)\theta_i(t)dt$$

le long d'un contour infiniment petit, enveloppant le point $t = \alpha$; or en

désignant toujours par $G_i(t)$ la fonction $\int \theta_i(t)dt$, on a, en intégrant par parties:

$$\int I(t)\theta_i(t)dt = I(t)G_i(t) - \int \theta(t)G_i(t)dt.$$

La fonction $I(t)G_i(t)$ étant uniforme a la même valeur à l'origine et à la fin du contour; le résidu de $I(t)\theta_i(t)$, pour le pôle $t = \alpha$, est donc égal, et de signe contraire, au résidu de $\theta(t)G_i(t)$ pour le même pôle, et les équations (E) exprimeront que la somme des résidus de cette dernière fonction, dans le polygone R_0, est nulle.

8. Appliquons maintenant ces résultats à l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$; x et y étant liées par la relation de genre p, $f(x, y) = 0$.

On sait que les fonctions thétafuchsiennes holomorphes de degré un,

$$\theta_1(t),\ \theta_2(t),\ \ldots,\ \theta_p(t),$$

ont les expressions suivantes:

$$\theta_i(t) = \frac{dx}{dt}\frac{P_i(x, y)}{f'_y} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

x et y étant remplacées dans le second membre par leurs valeurs en fonction fuchsienne de t, et $P_i(x, y)$ désignant le premier membre de l'équation d'une courbe de degré $n - 3$ adjointe à la courbe $f = 0$, supposée de degré n.

On aura alors

$$G_i(t) = \int \theta_i(t)dt = \int \frac{dx}{dt}\frac{P_i(x, y)}{f'_y}dt$$

et par suite, dans le plan des quantités x, il viendra:

$$G_i(x) = \int \frac{P_i(x, y)}{f'_y}dx.$$

G_i sera donc une intégrale abélienne de première espèce.

Quant à la valeur de l'intégrale $\int \theta(t)G_i(t)dt$, le long d'un contour infiniment petit enveloppant un pôle de $\theta(t)$, elle est égale, d'après le raisonnement fait au n° 4, à la période polaire de l'intégrale

$$\int \varphi(x, y)G_i(x)dx,$$

correspondant à un infini, $x = a$, de la fonction $I(x)$.

L'intégrale

$$I = \int \varphi(x, y) dx$$

sera donc égale à une fonction rationnelle de x et y, augmentée d'une intégrale abélienne de première espèce, si la somme des périodes polaires de l'intégrale $\int \varphi(x, y) G_i(x) dx$, dans tout le plan, est égale à zéro. On peut par suite énoncer le théorème suivant.

Théorème I. *Soient: $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique de genre p; $\varphi(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; $G_1, G_2, \ldots, G_p$ p intégrales abéliennes de première espèce distinctes, appartenant à la courbe $f = 0$.*

Pour que l'intégrale $I = \int \varphi(x, y) dx$ se réduise à une fonction rationnelle de x, y, augmentée d'une intégrale de première espèce, il faut et il suffit:

1° *que cette intégrale n'admette aucune période polaire;*

2° *que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales $\int \varphi(x, y) G_i(x) dx$ soit nulle.*

9. Les dernières conditions s'expriment aussi aisément que les premières et évidemment sans aucun signe d'intégration si les premières sont satisfaites; il suffit, dans le développement de la fonction $\varphi(x, y) G_i(x)$, autour d'un point $x = a$, qui est un infini de l'intégrale I, de calculer le coefficient du terme en $\frac{1}{x - a}$.

On ne doit pas perdre de vue que I devient infini pour $x = \infty$ si le numérateur de $\varphi(x, y)$ n'est pas d'un degré inférieur de deux unités au moins, au degré du numérateur, et l'on devra en posant $x = \frac{1}{x'}$ calculer également le coefficient de $\frac{1}{x'}$ dans le développement de $\frac{\varphi\left(\frac{1}{x'}, y\right)}{x'^2}$, aux environs du point $x' = 0$.

Nous allons donner un exemple simple de l'application du théorème I.

10. Soit

$$\varphi(x, y) = \frac{Q(x, y)}{R(x, y)},$$

Q et R étant deux polynômes entiers, tels que le degré de Q soit inférieur de deux unités à celui de R: l'intégrale

$$I = \int \varphi(x, y)\,dx$$

ne devient infinie que pour des valeurs finies de x, et ces valeurs sont celles qui annulent simultanément $R(x, y)$ et $f(x, y)$. Pour que l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$, ou, dans le plan des t, pour que l'intégrale

$$\int \frac{Q(x, y)}{R(x, y)} \frac{dx}{dt} dt,$$

se réduise à une fonction rationnelle de x, y, augmentée d'une intégrale de première espèce, il faut tout d'abord que les pôles de la fonction $\frac{Q(x, y)}{R(x, y)} \frac{dx}{dt}$ soient des pôles d'ordre au moins égal à 2; cela résulte de ce que les résidus correspondant à ces pôles doivent être nuls. En d'autre termes, la courbe $R = 0$ doit avoir avec la courbe $f = 0$ un contact du premier ordre au moins, en tous les points, non situés sur la courbe $Q = 0$, où elle la rencontre; si, en un de ces points, $Q = 0$ a avec $f = 0$ un contact d'ordre μ, $R = 0$ devra y avoir avec $f = 0$ un contact d'ordre ν, ν étant tel qu'on ait $\nu \geqq \mu + 2$, ou $\nu \leqq \mu$.

Admettons, pour fixer les idées, que la courbe $R = 0$ touche la courbe $f = 0$, en un certain nombre de points, de coordonnées a_1, b_1; a_2, b_2; ... et que la courbe $Q = 0$ passe par tous les autres points communs aux deux premières; les infinis de l'intégrale I seront les points $a_1, a_2, \ldots$. Supposons, pour simplifier, que ces points ne soient pas des points critiques pour la fonction y de x, qui vérifie l'équation $f(x, y) = 0$.

Nous devons écrire en premier lieu que la période polaire, pour le point $x = a$, de l'intégrale I est nulle, c. à. d. que dans le développement de $\varphi(x, y)$ suivant les puissances croissantes de $x - a = h$, le coefficient du terme $\frac{1}{h}$ s'annule.

Or on a:

$$\frac{Q(x, y)}{R(x, y)} = \frac{Q(a, b) + hQ'(a, b) + \ldots}{\frac{h^2}{2} R''(a, b) + \frac{h^3}{6} R'''(a, b) + \ldots}$$

en posant:

$$Q'(a,\ b) = \frac{\partial Q}{\partial a} + \frac{\partial Q}{\partial b} y',$$

$$R''(a,\ b) = \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} + 2\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial b} y' + \frac{\partial^2 R}{\partial b^2} y'^2 + \frac{\partial R}{\partial b} y'',$$

$$R'''(a,\ b) = \frac{\partial^3 R}{\partial a^3} + 3\frac{\partial^3 R}{\partial a^2 \partial b} y' + 3\frac{\partial^3 R}{\partial a \partial b^2} y'^2 + \frac{\partial^3 R}{\partial b^3} y'^3$$

$$+ 3\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial b} y'' + 3\frac{\partial^2 R}{\partial b^2} y' y'' + \frac{\partial R}{\partial b} y''',$$

y', y'', y''' étant les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ au point a, b.

Le coefficient de $\frac{1}{h}$ est égal, dans le développement de $\frac{Q}{R}$, à

$$\frac{2}{3R''^2}[3Q'R'' - QR'''];$$

on doit donc avoir la première série d'équations:

$$3Q'(a,\ b)R''(a,\ b) - Q(a,\ b)R'''(a,\ b) = 0. \qquad \left(a, b = \begin{cases} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \\ \dots\dots \end{cases}\right)$$

Les valeurs de y', y'', y''' se calculent à l'aide de la relation $f(x, y) = 0$.

Il faut maintenant calculer le terme en $\frac{1}{h}$ dans le développement de $\varphi(x,\ y)G_i(x)$; comme il n'y a pas de terme en $\frac{1}{h}$ dans $\varphi(x, y)$, et que le terme en $\frac{1}{h^2}$ est égal à $\frac{2Q}{R''}$, on aura, pour le terme cherché:

$$\frac{2Q(a,\ b)}{R''(a,\ b)} \frac{dG_i}{da},$$

$\frac{dG_i}{da}$ étant la dérivée pour $x = a$, de la fonction

$$G_i = \int \frac{P_i(x,\ y)}{f'_y} dx;$$

cette dérivée est donc

$$\frac{P_i(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial b}(a, b)}.$$

On aura ainsi la seconde série d'équations:

$$\frac{Q(a_1, b_1)P_i(a_1, b_1)}{R''(a_1, b_1)\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_1, b_1)} + \frac{Q(a_2, b_2)P_i(a_2, b_2)}{R''(a_2, b_2)\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_2, b_2)} + \ldots = 0.$$

La somme s'étend à toutes les valeurs de a et b qui annulent simultanément $R(x, y)$ et $f(x, y)$, sans annuler $Q(x, y)$; en mettant successivement à la place de P_i les fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_p$, on obtient p équations dans cette seconde série; rappelons que les polynômes

$$P_1(x, y),\ P_2(x, y),\ \ldots$$

sont les premiers membres des équations de p courbes d'ordre $n - 3$, adjointes à la courbe $f = 0$, et linéairement distinctes.

Si les fonctions Q et R vérifient les deux séries d'équations qui précèdent, l'intégrale $\int \frac{Q(x, y)}{R(x, y)}dx$, est nécessairement égale à une fonction rationnelle de x, y, augmentée d'une intégrale de première espèce, appartenant à la courbe $f(x, y) = 0$.

Il nous reste maintenant afin de terminer l'examen du problème primitif, à chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que les intégrales de première espèce disparaissent dans l'expression de l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$, qui se réduira ainsi à une fonction rationnelle de x, y.

11. Revenons à cet effet à l'intégrale

$$I(t) = \int \theta(t)dt.$$

Si cette intégrale est uniforme, et si les équations que nous avons désignées par (E) sont vérifiées, on aura:

$$I(t) = F(t) + \lambda_1 G_1(t) + \lambda_2 G_2(t) + \ldots + \lambda_p G_p(t),$$

$F(t)$ étant une fonction fuchsienne et $G_i(t)$ désignant toujours l'intégrale

$\int\theta_i(t)dt$. Nous allons chercher à quelles conditions doit satisfaire $\theta(t)$, pour qu'on ait

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 0.$$

Soit à cet effet $\zeta(t)$ une fonction thétafuchsienne du premier degré, n'ayant dans R_0 qu'un pôle double, $t = \beta$. On voit comme au n° 5 que l'intégrale $\int I(t)\zeta(t)dt$ est nulle le long du périmètre de R_0, si $I(t)$ est une fonction fuchsienne, c. à. d. se réduit à $F(t)$.

En considérant successivement p fonctions telles que $\zeta(t)$, que nous désignerons par

$$\zeta_1(t),\ \zeta_2(t),\ \ldots,\ \zeta_p(t),$$

admettant respectivement pour infinis doubles les quantités

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_p,$$

on obtient ainsi p équations, auxquelles satisfait l'intégrale $I(t)$, dans le cas où elle se réduit à une fonction fuchsienne.

Nous allons montrer maintenant que si ces équations sont vérifiées, I est nécessairement une fonction fuchsienne.

On a en effet:

$$\int_{R_0} I(t)\zeta_i(t)dt = \int_{R_0} F(t)\zeta_i(t)dt + \int_{R_0}[\lambda_1 G_1(t) + \ldots + \lambda_p G_p(t)]\zeta_i(t)dt.$$

Or la première intégrale du second membre est nulle, puisque $F(t)$ est une fonction fuchsienne; la deuxième est égale à $2\pi i$ multiplié par la somme des résidus dans R_0 de la fonction

$$(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \ldots + \lambda_p G_p)\zeta_i.$$

Cette fonction n'a pas d'autre pôle que le pôle double β_i; d'ailleurs le résidu de $\zeta_i(t)$ par rapport à ce pôle est nul, car l'intégrale $\int\zeta_i(t)dt$ est nulle le long de R_0, par cela seul que $\zeta_i(t)$ est une fonction thétafuchsienne de degré un. Soit A_i le coefficient, nécessairement différent de zéro, de $\frac{1}{(t-\beta_i)^2}$ dans le développement de $\zeta_i(t)$ suivant les puissances croissantes de $t - \beta_i$.

Le résidu de

$$(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \ldots)\zeta_i$$

par rapport au pôle β_i sera ainsi égal à la valeur, pour $t = \beta_i$, de la fonction

$$A_i\left(\lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial t} + \ldots\right);$$

c. à. d. de

$$A_1[\lambda_1 \theta_1(\beta_i) + \lambda_2 \theta_2(\beta_i) + \ldots].$$

On a donc les p relations:

$$\lambda_1 \theta_1(\beta_i) + \lambda_2 \theta_2(\beta_i) + \ldots + \lambda_p \theta_p(\beta_i) = 0. \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$

Or les quantités β_i sont arbitraires; si on les choisit de manière à ne pas annuler le déterminant des relations précédentes, c. à. d. de manière à ne pas annuler une même fonction thétafuchsienne holomorphe de degré un, on tirera nécessairement de ces relations

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 0.$$

12. On peut, comme au n° 7 mettre les conditions précédentes sous une autre forme; soit en effet

$$H_i(t) = \int \zeta_i(t) dt;$$

$H_i(t)$ est une fonction uniforme de t, dans le cercle fondamental, puisque le résidu de $\zeta_i(t)$ correspondant au pôle double β_i, est nul. Il en résulte qu'au lieu d'écrire que la somme des résidus dans R_0, de la fonction $I(t)\zeta_i(t)$ est nulle, on peut écrire le même résultat pour la fonction $\theta(t) H_i(t)$.

13. Pour appliquer ces résultats à l'intégrale $\int \varphi(x, y) dx$, il faut d'abord chercher l'expression de $H_i(t)$ en fonction de x.

H_i étant une intégrale qui n'a qu'un infini, on voit sans difficulté que, dans le plan des quantités x, cette intégrale est une intégrale abélienne de seconde espèce, et l'on a ainsi:

$$H_i(x) = \int \frac{\Omega_i(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(h_i x + k_i y + l_i)} dx,$$

$h_i x + k_i y + l_i = 0$ étant l'équation d'une tangente quelconque à la courbe $f = 0$; $\Omega_i(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe de degré $n - 2$, adjointe à la précédente supposée de degré n, et la coupant aux points, autres que le point de contact, où elle est rencontrée par la tangente considérée.

Il en résulte, comme au n° 8, que les conditions qu'on vient de trouver, expriment que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales

$$\int \varphi(x, y) H_i(x) dx$$

est nulle. On peut donc énoncer finalement la proposition suivante qui résume notre théorie.

Théorème II. *Soient: $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique de genre p; $\varphi(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; $G_1, G_2, \ldots, G_p$, p intégrales abéliennes de première espèce distinctes; $H_1, \ldots, H_p$, p intégrales de deuxième espèce appartenant à la courbe $f = 0$.*

Pour que l'intégrale $\int \varphi(x, y) dx$ se réduise à une fonction rationnelle de x, y, il faut et il suffit:

1° que cette intégrale n'ait pas de période polaire;

2° que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales $\int \varphi(x, y) G_i(x) dx$ soit nulle;

3° que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales $\int \varphi(x, y) H_i(x) dx$ soit également nulle.[1]

La période polaire d'une intégrale $\int F(x, y) dx$, pour un infini $x = a$ de cette intégrale est ainsi définie: supposons que pour revenir à la même valeur de $F(x, y)$ il faille faire décrire à la variable x q fois un contour infiniment petit autour du point a; la période polaire sera la valeur que prend l'intégrale quand la variable décrit q fois ce contour.

Si a n'est pas un point critique pour la fonction y, qui vérifie la relation $f(x, y) = 0$, la fonction $F(x, y)$ se développera suivant les puissances croissantes entières de $x - a$, et la période polaire sera égale à $2\pi i$ fois le résidu correspondant.

Si a est un point critique, il sera nécessaire de calculer les développements de y et $F(x, y)$ suivant les puissances croissantes et fractionnaires

[1] Il faut toutefois, pour que les conditions 3° soient suffisantes, que les points de la courbe $f = 0$ où les p fonctions H_i deviennent infinies, ne soient pas sur une même courbe de degré $n - 3$ adjointe à la courbe $f = 0$ (n° 11).

de a; le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ dans le dernier développement fournira la période polaire.[1]

Comme les conditions 2°, les conditions 3° ne renferment aucun signe d'intégration si les conditions 1° sont vérifiées.

14. En appliquant ces principes à l'exemple traité au n° **9**, on trouve aisément pour la troisième série d'équations, les p relations suivantes, où c_i, d_i sont les coordonnées du point de la courbe $f=0$ où H_i devient infini:

$$\frac{2Q(a_1, b_1)\Omega_i(a_1, b_1)}{R''(a_1, b_1)\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_1, b_1)[h_i a_1 + k_i b_1 + l_i]} + \frac{2Q(a_2, b_2)\Omega_i(a_2, b_2)}{R''(a_2, b_2)\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_2, b_2)[h_i a_2 + k_i b_2 + l_i]} + \cdots$$

$$= \frac{Q(c_i, d_i)\Omega_i(c_i, d_i)}{R(c_i, d_i)\frac{\partial f}{\partial d_i}(c_i, d_i)\, k\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i}, \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i$ étant, au point c_i, d_i, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, déduite de l'équation $f(x, y) = 0$.

15. Remarque. Les conditions données par le théorème II ont une signification simple, qui résulte immédiatement de tout ce qui précède.

Supposons l'intégrale $\int\varphi(x, y)dx$ décomposée par le procédé classique en intégrales abéliennes de première, de seconde et de troisième espèce.

Les conditions 1° expriment que les intégrales de troisième espèce disparaissent;

les conditions 2°, que la somme des intégrales de seconde espèce se réduit à une fonction rationnelle de x, y;

les conditions 3°, que les intégrales de première espèce disparaissent à leur tour.

---

[1] Cf. Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques*, p. 176—177.

TABLE DES VALEURS DES SOMMES

$$S_k = \sum_1^\infty n^{-k}$$

PAR

T. J. STIELTJES

à TOULOUSE.

Dans le *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes* (tome II, pag. 432), LEGENDRE a donné avec 16 décimales les valeurs de $S_2, \ldots, S_{35}$.

Cette table de LEGENDRE ne contient pas de graves erreurs, mais la comparaison avec nos résultats montre que dans 6 cas les valeurs de LEGENDRE ont besoin d'une correction d'une unité de la dernière (seizième) décimale; ce sont les suivants:

$$\begin{array}{lcccccc} & S_5, & S_7, & S_{10}, & S_{11}, & S_{16}, & S_{35}, \\ \text{corrections} & -1, & +1, & +1, & +1, & +1, & +1. \end{array}$$

Ces nombres S_k figurent dans le développement

$$\log \Gamma(1 + x) = -Cx + \sum_2^\infty \frac{(-1)^k}{k} S_k x^k,$$

et la table de LEGENDRE a ainsi servi de base au calcul des coefficients du développement de la fonction entière $[\Gamma(x)]^{-1}$ entrepris par M. BOURGUET. (Acta Mathematica t. 2, p. 271 et suiv.)

La disposition de la table suivante n'exige aucune explication, mais nous devons indiquer l'approximation des valeurs inscrites dans le tableau.

On a donné le résultat brut d'un calcul fait avec 32 décimales. Chaque nombre est la somme d'un certain nombre (trente au plus) de

Acta mathematica. 10. Imprimé le 1 Septembre 1887.

nombres calculés à une demi-unité de la $32^{\text{ème}}$ décimale près. Par conséquent l'erreur d'une des valeurs données sera toujours inférieure à

$$0{,}0000000000 \quad 0000000000 \quad 0000000000 \quad 15.$$

Mais il va sans dire que l'erreur sera presque toujours notablement inférieure à cette limite, d'abord par suite d'une compensation d'erreurs et ensuite aussi parce qu'à partir de $k = 22$ on a obtenu S_k par l'addition de moins de 30 nombres partiels.

Les relations

$$\sum_1^\infty (S_{2k} - 1) = \frac{3}{4}, \qquad \sum_1^\infty (S_{2k+1} - 1) = \frac{1}{4}$$

permettent de contrôler l'ensemble des calculs. La première vérification donne une erreur de 5 unités, la seconde une erreur de 3 unités de la $32^{\text{ème}}$ décimale.

k		S_k		
2	1,6449340668	4822643647	2415166646	03
3	1,2020569031	5959428539	9738161511	46
4	1,0823232337	1113819151	6003696541	18
5	1,0369277551	4336992633	1365486457	03
6	1,0173430619	8444913971	4517929790	93
7	1,0083492773	8192282683	9797549849	82
8	1,0040773561	9794433937	8685238508	65
9	1,0020083928	2608221441	7852769232	40
10	1,0009945751	2781808533	7145958900	34
11	1,0004941886	0411946455	8702282526	46
12	1,0002460865	5330804829	8637998047	72
13	1,0001227133	4757848914	6751836526	37
14	1,0000612481	3505870482	9258545105	14
15	1,0000305882	3630702049	3551728510	66
16	1,0000152822	5940865187	1732571487	66
17	1,0000076371	9763789976	2273600293	54
18	1,0000038172	9326499983	9856461644	61
19	1,0000019082	1271655393	8925656957	80
20	1,0000009539	6203387279	6113152038	70

k	S_k			
21	1,0000004769	3298678780	6463116719	62
22	1,0000002384	5050272773	2990003648	18
23	1,0000001192	1992596531	1073067788	73
24	1,0000000596	0818905125	9479612440	20
25	1,0000000298	0350351465	2280186063	69
26	1,0000000149	0155482836	5041234658	50
27	1,0000000074	5071178983	5429491981	01
28	1,0000000037	2533402478	8457054819	20
29	1,0000000018	6265972351	3049006403	90
30	1,0000000009	3132743241	9668182871	76
31	1,0000000004	6566290650	3378407298	92
32	1,0000000002	3283118336	7650549200	16
33	1,0000000001	1641550172	7005197759	30
34	1,0000000000	5820772087	9027008892	44
35	1,0000000000	2910385044	4970996869	29
36	1,0000000000	1455192189	1041984235	93
37	1,0000000000	0727595983	5057481014	52
38	1,0000000000	0363797954	7378651190	24
39	1,0000000000	0181898965	0307065947	59
40	1,0000000000	0090949478	4026388928	25
41	1,0000000000	0045474737	8304215402	68
42	1,0000000000	0022737368	4582465251	53
43	1,0000000000	0011368684	0768022784	94
44	1,0000000000	0005684341	9876275856	09
45	1,0000000000	0002842170	9768893018	55
46	1,0000000000	0001421085	4828031606	78
47	1,0000000000	0000710542	7395210852	72
48	1,0000000000	0000355271	3691337113	67
49	1,0000000000	0000177635	6843579120	33
50	1,0000000000	0000088817	8421093081	59

k		S_k		
51	1,0000000000	0000044408	9210314381	34
52	1,0000000000	0000022204	4605079804	20
53	1,0000000000	0000011102	2302514106	61
54	1,0000000000	0000005551	1151248454	81
55	1,0000000000	0000002775	5575621361	24
56	1,0000000000	0000001387	7787809725	24
57	1,0000000000	0000000693	8893904544	16
58	1,0000000000	0000000346	9446952165	92
59	1,0000000000	0000000173	4723476047	58
60	1,0000000000	0000000086	7361738011	99
61	1,0000000000	0000000043	3680869002	06
62	1,0000000000	0000000021	6840434499	72
63	1,0000000000	0000000010	8420217249	42
64	1,0000000000	0000000005	4210108624	57
65	1,0000000000	0000000002	7105054312	24
66	1,0000000000	0000000001	3552527156	10
67	1,0000000000	0000000000	6776263578	04
68	1,0000000000	0000000000	3388131789	02
69	1,0000000000	0000000000	1694065894	51
70	1,0000000000	0000000000	0847032947	25

Nous avons mis à profit nos résultats pour calculer la constante Eulérienne d'après la formule

$$C = 1 + \log 2 - \log 3 - \sum_{1}^{\infty} \frac{S_{2k+1} - 1}{(2k+1)4^k},$$

et nous avons obtenu la valeur suivante qui est exacte avec 33 déc.:

$$C = 0.5772156649 \quad 0153286060 \quad 6512090082 \quad 402.$$

ZUR THEORIE DES FLÄCHENPOTENTIALS

VON

J. WEINGARTEN
in BERLIN.

Im neunten Abschnitt der *allgemeinen Lehrsätze in Beziehung auf die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte* verweist GAUSS bei der Besprechung der Unstetigkeiten der zweiten Differentialquotienten des Potentials einer in einem endlichen Raum stetig vertheilten Masse, auf ein in späteren Abschnitten bewiesenes Theorem, aus dem die Bestimmung des Betrages dieser Unstetigkeiten hervorgeht. Der Beweis des Theorems selbst erfordert einen gewissen Aufwand an analytischen Hilfsmitteln der Discussion. Es scheint aber, dass die in den ersten eilf Abschnitten der Lehrsätze entwickelten Mittel sowohl für die Ermittelung der Werthe der fraglichen Unstetigkeiten, wie für den Beweis des betreffenden Theorems selbständig ausreichen.

Wir bestimmen die Lage eines Punkts P im unbegrenzt ausgedehnten Raum durch die drei rechtwinklichen Coordinaten x_1, x_2, x_3. Bezeichnet U eine Function des Orts in diesem Raume, die in allen Theilen desselben als eindeutig, endlich und stetig veränderlich vorausgesetzt wird, so ist der Werth der Function U in jedem bestimmten Punkte P mit dem Grenzwerth derjenigen Werthe vertauschbar welche die Function U in einem veränderlichen Punkte P' annimmt, der dem Punkte P in willkürlicher Weise bis zum Zusammenfallen beider Punkte angenähert wird. Diese Vertauschbarkeit findet nicht mehr statt wenn die Eindeutigkeit, Endlichkeit und Stetigkeit der Function U nur in *einzelnen* Theilen des Raums vorausgesetzt wird, welche durch bestimmte Flächen von einander

geschieden sind, insofern es sich um das Verhältniss in Punkten dieser Scheidungsflächen handelt. Für das Folgende wird es nur erfordert den Fall in Betracht zu ziehen, dass diese Theile gebildet seien aus dem von einer einzelnen geschlossenen Fläche S begrenzten Raum und demjenigen Raum der ausserhalb dieser Fläche liegt. Ist eine Function U für jeden *innerhalb* dieser Theile liegenden Punkt P eindeutig, endlich und stetig bestimmt, so wird bei der Annäherung eines veränderlichen Punktes P' an einen bestimmten Punkt P der Grenzfläche S die Function U des Ortes P' sich einem anderen Grenzwerthe nähern können, wenn der Punkt P' nur Punkte des *inneren* Raums durchläuft, als derjenige ist, der erreicht wird, wenn der Punkt P' nur auf einem Wege durch Punkte des *äusseren* Raums zu dem Punkte P geführt wird. Wir werden diese beiden Grenzwerthe durch Hinzufügung der Indices i und a als U^i und U^a von einander unterscheiden, und es wird unanstössig sein, von diesen beiden Werthen den ersteren als den Werth von U auf der *inneren* Seite von S im Punkte P, den zweiten als den Werth von U auf der *äusseren* Seite von S im Punkte P zu bezeichnen.

Wird nunmehr unter der Function U das Potential V einer innerhalb S mit der nach der Stetigkeit veränderlichen Dichtigkeit k vertheilten Masse verstanden, so sind nach den Entwickelungen der eilf ersten Abschnitte der *Lehrsätze* sowohl V selbst, wie auch die drei ersten Derivirten dieser Function nach den Coordinaten des Punktes P im ganzen Raume eindeutige, endliche und stetige Functionen des Orts P oder der Coordinaten x_1, x_2, x_3. Dagegen sind die sechs zweiten Derivirten von V nur endlich stetig und bestimmt in allen Punkten des inneren und äusseren Raums der Fläche S, so nahe diese Punkte auch derselben liegen, nicht aber in Punkten P dieser Fläche selbst. Aber auch die Bestimmtheit dieser zweiten Derivirten von V fällt fort für Punkte P' sowohl des inneren als des äusseren Raums von S, welche einem Punkte P_0 dieser Fläche, in welchem eine bestimmte Normale oder Tangentialebene nicht Statt hat, über jede Grenze genähert gedacht werden. Dieser Umstand ist aus den Grundlagen der von Gauss gegebenen Formeln für diese Derivirten ohne Weiteres ersichtlich, wenngleich ihn Gauss an der betreffenden Stelle nicht besonders hervorhebt.

In Folge der Stetigkeit der ersten Derivirten der Function V in allen Punkten des Raums bestehen unter Annahme der im Vorhergehenden

angenommenen Bezeichnungsweise die drei Gleichungen, welche aus der nachstehenden Gleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial V}{\partial x_\lambda}\right)^i = 0$$

durch Einsetzung der Zahlen 1, 2, 3 für den Index λ gebildet werden in jedem Punkte (x_1, x_2, x_3) der Fläche S. Setzt man in diese Gleichung anstatt der Coordinaten x_1, x_2, x_3 die Coordinaten

$$x_1 + dx_1, \; x_2 + dx_2, \; x_3 + dx_3$$

eines dem Punkte (x_1, x_2, x_3) unendlich nahe benachbarten Punktes dieser Fläche, und subtrahirt sie selbst von der so entstandenen neuen Gleichung, so ergiebt sich offenbar die fernere:

$$(1) \qquad \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^i\right] dx_1 + \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_\lambda}\right)^i\right] dx_2$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial x_\lambda}\right)^i\right] dx_3 = 0,$$

welche in jedem Punkte P der Fläche S für alle Werthe der unendlich kleinen Verschiebungen dx_1, dx_2, dx_3 die zu einem unendlich nahe benachbarten Punkte in dieser Fläche führen, besteht; solche Punkte P_0 ausgenommen, in denen eine bestimmte Normale an die Fläche S nicht Statt hat, in welchen Punkten die angedeuteten zweiten Derivirten ihre Bestimmtheit verlieren. Bezeichnet man durch α_μ den Winkel, welchen die im Punkte P nach der äusseren Seite von S errichtete Normale mit der Axe der x_μ bildet, so folgt aus der Gleichung (1) dass die Coefficienten der Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 in derselben den Cosinus der betreffenden Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ proportional sind, und dass daher

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\right)^i = m_\lambda \cos \alpha_\mu$$

wenn m_λ einen von dem ursprünglich gewählten Index λ und den Coordinaten x_1, x_2, x_3 abhängigen Factor bezeichnet. Für die linke Seite vorstehender Gleichung findet die Vertauschbarkeit der Indices λ und μ statt, daher auch für die rechte, und es wird

$$m_\lambda \cos \alpha_\mu = m_\mu \cos \alpha_\lambda$$

sein. Es stellen hiernach die gleichen Quotienten

$$\frac{m_\lambda}{\cos\alpha_\lambda} = \frac{m_\mu}{\cos\alpha_\mu}$$

einen von der Wahl der Indices λ oder μ unabhängigen Werth dar, der mit ρ bezeichnet sein möge. Man hat alsdann,

$$m_\lambda = \rho\cos\alpha_\lambda$$

und folglich:

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\right)^i = \rho\cos\alpha_\lambda\cos\alpha_\mu.$$

Die Bestimmung der Grösse ρ selbst erfolgt nunmehr sofort aus den Differentialgleichungen denen die Function V für alle Punkte des inneren und des äusseren Raumes von S bis in die unmittelbare Nähe von S genügt. Aus der aus diesen Differentialgleichungen unmittelbar zu folgernden Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right)^i + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right)^i + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right)^i = 4\pi k$$

folgt unter Benutzung der Gleichung (2) für $(\lambda, \mu) = (1, 1), (2, 2), (3, 3)$:

$$\rho = 4\pi k,$$

und hieraus die Bestimmung des Betrags der Unstetigkeit des zweiten auf die Variablen x_λ, x_μ bezüglichen Differentialquotienten von V durch die Gleichung

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right)^i = 4\pi k\cos\alpha_\lambda\cos\alpha_\mu.$$

Mit Hilfe der bisherigen Entwickelungen ist es leicht die Giltigkeit des von Gauss an der erwähnten Stelle angedeuteten Theorems zu erweisen.

Bezeichnen ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Coordinaten eines Punktes Π der in einem gegebenen endlichen Flächenstück Σ gelegen ist, $d\sigma$ ein unbestimmtes Element dieses Flächenstücks, ferner x_1, x_2, x_3 die Coordinaten irgend

eines Punktes P im Raume und schliesslich r die Entfernung zwischen Π und P. Alsdann ist das Integral

$$J = \int \frac{h d\sigma}{r}$$

ausgedehnt über alle Elemente des Flächenstücks Σ, in welchem h eine eindeutige, endliche und stetige Function des Ortes in diesem Flächenstück bezeichnet, eine im ganzen Raum eindeutige, endliche und stetige Function der Coordinaten x_1, x_2, x_3. Die Differentialquotienten von J nach diesen Coordinaten sind zwar für alle Punkte P ausserhalb Σ eindeutig, endlich und stetig, dagegen unstetig für Punkte Π innerhalb Σ. Es handelt sich um den Nachweis dieser Unstetigkeiten und um die Bestimmung ihres Betrages.

Wir setzen zunächst voraus, dass das Flächenstück Σ keinen Punkt enthalte, in welchem nicht eine bestimmte Normale an Σ statt hat, deren nach einer gewählten Seite zeigende Richtung mit der Axe der x_λ wiederum den Winkel α_λ bilden möge, und dass in keinem Punkte dieses Flächenstücks $\cos\alpha_1$ verschwinde. Man ergänze, was stets in willkürlicher Weise möglich ist, das Flächenstück Σ durch Hinzufügung eines neuen Stücks Σ' zu einer geschlossenen Fläche S, deren *äussere* Seite in Σ diejenige sei nach welcher die Richtung der Normalen gewählt worden. Innerhalb des von S umschlossenen Raumes vertheile man eine Masse mit der nach der Stetigkeit veränderlichen Dichtigkeit k, bei welcher Vertheilung man k im Übrigen als willkürliche Function des Ortes (x_1, x_2, x_3) innerhalb S wählen kann, wenn man diese Function nur der Bedingung gemäss bestimmt, dass in allen Punkten Π der inneren Seite des ursprünglichen Flächenstücks Σ die Bedingung

$$k = \frac{h}{\cos\alpha_1} \tag{4}$$

erfüllt wird. Ist V das Potential der nunmehr innerhalb S vertheilten Masse in irgend einem Punkte (x_1, x_2, x_3) des Raums, dt ein unbestimmtes Element des von S eingeschlossenen Raumes, η_1, η_2, η_3 seine Coordi-

naten, R der Abstand dieses Elements vom Punkte (x_1, x_2, x_3), so besteht bekanntlich die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -\int \frac{k \cos \alpha_1 \, d\sigma}{r} + \int \frac{\partial k}{\partial \eta_1} \frac{dt}{R},$$

in welcher sich das erste Integral über alle Flächenelemente von S, das zweite über alle Raumelemente des von S eingeschlossenen Raums bezieht. Das erste Integral selbst lässt sich zerlegen in den über die Elemente von Σ zu erstreckenden Theil, der der Gleichung (4) zufolge mit J identisch ist, und in den über die Elemente von Σ' zu erstreckenden Theil, welcher durch J' bezeichnet werde. Das über den von S eingeschlossenen Raum erstreckte Integral, welches das Potential einer in diesem Raum mit der Dichtigkeit $\frac{\partial k}{\partial \eta_1}$ vertheilten Masse darstellt, sei schliesslich durch W bezeichnet. Die vorstehende Gleichung geht alsdann über in die folgende:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -J - J' + W.$$

Aus ihr ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda} = -\frac{\partial J}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial J'}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial W}{\partial x_\lambda}.$$

Bezieht man diese Gleichung zunächst auf einen Punkt Π der Fläche Σ welcher der äusseren Seite von Σ angehört, alsdann auf den nämlichen Punkt Π der inneren Seite, und subtrahirt die erhaltenen Resultate, so erhält man in Rücksicht darauf, dass die Differentialquotienten von J' und W im betreffenden Raumtheil durchgängig eindeutig, endlich und stetig sind

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^i = -\left[\left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^i\right],$$

und mit Hilfe der Gleichung (3)

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^i = -4\pi k \cos \alpha_1 \cos \alpha_\lambda$$

d. h. in Folge von (4)

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^i = -4\pi h \cos\alpha_\lambda .$$

Bezeichnet n die Abscisse eines auf der Normale in Π gelegenen Punktes P. so ergiebt sich aus dieser Gleichung ohne Weiteres die folgende:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial n}\right)^a - \left(\frac{\partial J}{\partial n}\right)^i = -4\pi h ,$$

welche das in Rede stehende Theorem ausdrückt. Wenngleich in der Entwickelung desselben vorausgesetzt wurde, dass in der ganzen Ausdehnung von Σ kein Punkt Π vorhanden sei, in welchem nicht eine bestimmte Normale existirte, so ist diese Voraussetzung für das Bestehen des Theorems selbst unwesentlich. Es genügt das Eintreten dieser Voraussetzung in einem *endlichen* den Punkt Π, für den die Unstetigkeit bestimmt werden soll, umgebenden Gebiet von Σ, da die Theile von J welche endlich von Π entfernten Elementen der Fläche Σ entsprechen, zu dieser Unstetigkeit keinen Beitrag liefern. Ebenso unwesentlich erscheint die Voraussetzung des Nichtverschwindens von $\cos\alpha_1$ in allen Punkten von Σ. Sie ist nur erforderlich für Punkte in endlicher Umgebung des betreffenden Punktes Π und stets erfüllt, wenn man unter der Richtung der x_1 diejenige nothwendig existirende Coordinatenrichtung versteht, für welche in diesem Punkte $\cos\alpha_1$ nicht verschwindet. Das Bestehen einer bestimmten Normale in dem betrachteten Punkte erweist sich als die einzige nothwendige und hinreichende Bedingung des Bestehens des in Rede stehenden Theorems, unabhängig von den in diesem Punkte übrigens stattfindenden Krümmungsverhältnissen.

REMARQUES SUR LES INTÉGRALES IRRÉGULIÈRES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Réponse à M. Thomé

PAR

H. POINCARÉ
à PARIS.

J'ai publié deux mémoires sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, le premier *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* dans l'American journal of mathematics (t. 7, 1885, p. 203—258), le second *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires* dans les Acta Mathematica (t. 8, 1886, p. 295—344). Ces deux mémoires ont inspiré à M. Thomé une *Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen* qu'il a fait imprimer dans le Journal de Crelle (t. 101, 1887) et que je ne puis laisser sans réponse.

Soit une équation linéaire de la forme suivante:

$$P_n\frac{d^n y}{dx^n}+P_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+P_1\frac{dy}{dx}+P_0 y=0 \tag{1}$$

où les P sont des polynômes entiers en x d'un même degré m.

On démontre que pour x très grand, cette équation admet n intégrales de la forme suivante:

$$x^{\rho_i}\psi_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

les ψ étant des séries convergentes doublement infinies procédant suivant les puissances positives et négatives de x. Mais on n'a aucun moyen de déterminer les exposants ρ et les coëfficients des séries ψ.

D'autre part, on trouve n séries que j'appellerai *séries normales* et qui satisfont *formellement* à l'équation (1). Ces séries, qui sont généralement divergentes, sont de la forme:

$$e^{a_i x} x^{r_i} \varphi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les φ étant des séries ordonnées suivant les puissances négatives de x. J'ai démontré à ce sujet deux théorèmes.

1°. Pour qu'une série normale soit convergente, il faut et il suffit que la transformée de LAPLACE de l'équation (1) admette une intégrale holomorphe dans tout le plan.

2°. Alors même qu'une série normale diverge, elle représente *asymptotiquement* une des intégrales de l'équation (1), quand x croît indéfiniment avec un argument déterminé.

M. THOMÉ attaque ces deux théorèmes, mais à deux points de vue différents. Quant au premier, il n'en conteste pas l'exactitude, mais il le déclare dénué d'intérêt. C'est là un point sur lequel il est malaisé de discuter.

D'après M. THOMÉ, il est aussi difficile de distinguer si l'équation transformée a une intégrale holomorphe, que de reconnaître si la série normale converge. J'en conviens volontiers, mais j'estime qu'il n'est pas inutile, quand on est en présence de deux problèmes également insolubles, de montrer qu'ils se ramènent l'un à l'autre.

On croirait que M. THOMÉ attendait de moi l'énoncé sous forme explicite des conditions de convergence des séries normales. Il ne dépendait pas de moi de le lui donner; ces conditions s'expriment évidemment par des relations entre les $(n+1)(m+1)$ coëfficients des polynômes P; mais ces relations ne sont pas algébriques. Tout ce qu'on peut faire, c'est étudier les transcendantes qui y entrent. En établissant que la convergence se rattache à une propriété du groupe de l'équation transformée, je montrais en même temps que ces transcendantes sont intimement liées à d'autres fonctions que j'ai étudiées dans mon mémoire *Sur les groupes des équations linéaires* (Acta Mathematica, t. 4, 1884, p. 201—311). Les résultats que j'ai donnés au sujet de ces deux classes de transcendantes sont, il est vrai, fort incomplets; mais il est probable qu'on n'en trouvera pas d'autres d'ici à quelque temps; c'est ce qui m'a déterminé à les pu-

blier, tout en partageant les regrets de M. THOMÉ au sujet des lacunes qui y subsistent encore.

Quant au second théorème, M. THOMÉ le regarde comme faux, et cela parce qu'il l'interprète de la façon suivante:

Ce serait toujours la même intégrale qui serait représentée asymptotiquement par la même série normale, quel que soit l'argument avec lequel x croît indéfiniment; d'où il résulterait que les exposants r_i devraient être égaux aux exposants ρ_i.

Je n'ai jamais dit une pareille bêtise et M. THOMÉ me la prête gratuitement. Le § 5 du mémoire de l'American Journal est tout entier destiné à démontrer le contraire et j'ai encore répété le contraire à plusieurs reprises dans le mémoire des Acta Mathematica, et en particulier dans les deux dernières lignes de la page 309 et les huit premières lignes de la page 310.

En ce qui concerne ces dix lignes, je reconnais que j'aurais mieux fait de les souligner; mais, quant au § 5, je ne pouvais imaginer qu'un paragraphe tout entier échappât au lecteur le plus inattentif.

Je prévois la réponse de M. THOMÉ; mais, dira-t-il, si vous ne pouvez nous donner explicitement la valeur des exposants ρ, votre travail est dénué d'intérêt. J'en suis fâché, mais cette détermination explicite est impossible; on est obligé de se contenter de procédés d'approximations indéfinies et c'est ce que j'ai fait en définitive, dans le § 5, en ramenant le problème à la détermination du groupe d'une équation linéaire, question que j'avais traitée, quoique d'une façon incomplète, dans le mémoire cité des Acta Mathematica (t. 4).

Paris, le 24 Juillet 1887.

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS.

Published under the Auspices of the Johns Hopkins University.

The American Journal of Mathematics, founded under the auspices of the Johns Hopkins University, in 1878, was conducted by Professor Sylvester during the period of his connection with the University. It will be hereafter under the direction of SIMON NEWCOMB (Foreign Member of the Royal Society, and Corresponding Member of the Institute of France), Professor of Astronomy and Mathematics in the Johns Hopkins University and Director of the U. S. Nautical Almanac, as *Editor*, and of THOMAS CRAIG, Ph. D., Associate Professor of Applied Mathematics, as *Associate Editor*.

Seven volumes of about 400 pages each have been issued, and the eighth is now in progress. The journal appears quarterly in the quarto form.

The subscription price is dollars 5 a volume; single numbers dollars 1.50.

Communications in regard to subscriptions should be addressed to

PUBLICATION AGENCY of the Johns Hopkins University, BALTIMORE, Md., U. S. A.

Or to Messrs *MAYER & MÜLLER, BERLIN, PRUSSIA.*

Contents of Recent Volumes.

Ausgegeben den 15. September 1887. — Paru le 15 Septembre 1887.

Inhalt. Table des matières.

Preis des Bandes: 12 Mark. — Prix par volume: 15 Fr.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

10:4

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1887.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

SUR UNE CLASSE DE FORMES DE DIFFÉRENTIELLES ET SUR LA THÉORIE DES SYSTÈMES D'ÉLÉMENTS[1]

PAR

G. KOENIGS

À PARIS.

1. On sait combien il est avantageux pour certaines recherches géométriques d'adopter comme élément générateur de l'espace, non plus le point, mais une courbe ou une surface dépendant d'un certain nombre de paramètres. Les cas où l'on adopte pour élément les droites ou bien les sphères de l'espace ont été particulièrement étudiés, à cause principalement des résultats remarquables auxquels ils conduisent dans la théorie générale des surfaces. La droite et la sphère dépendent de quatre paramètres u_1, u_2, u_3, u_4. Le contact de deux sphères infiniment voisines s'exprime par l'évanouissement d'une certaine forme quadratique des différentielles du_1, du_2, du_3, du_4, dont les coefficients, quoique contenant généralement u_1, u_2, u_3, u_4 peuvent cependant, par un choix convenable des variables, être amenés à être constants. Un fait tout pareil se rencontre lorsque l'on prend pour élément la droite, avec cette seule différence, que la notion de contact doit y être remplacée par une autre, à savoir *la rencontre de deux droites infiniment voisines.*

---

[1] Ces recherches ont été l'objet de deux notes présentées à l'Académie des sciences de Paris en Mars 1887.

Soit, dans l'un et l'autre de ces deux cas, $M(u|du)$ la forme quadratique, dont les coefficients dépendront généralement des u. Cette forme quadratique admet une forme adjointe que nous représenterons par

$$\mathfrak{M}(u\,|\,T),$$

et alors, toute fonction $\theta(u_1, u_2, u_3, u_4)$ donne lieu à un paramètre différentiel, qui possède la propriété d'invariance relativement à une transformation quelconque effectuée sur les paramètres u; cet invariant est la fonction

$$\mathfrak{M}\left(u\,\middle|\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\right).$$

L'évanouissement de cet invariant exprime la condition nécessaire et suffisante pour que, si entre les quatre paramètres u on établit la relation $\theta = 0$, le complexe de droites ou de sphères défini par cette équation soit formé, dans le cas des droites, de droites tangentes à une surface ou rencontrant une courbe fixe, et, dans le cas des sphères, de sphères tangentes à une surface ou bien à une courbe.

2. L'objet de ce travail est d'étendre ces divers résultats au cas d'un élément quelconque. La condition de contact de deux éléments infiniment voisins, si ces éléments sont des surfaces, ou bien leur rencontre, si ces éléments sont des courbes, s'exprime par l'évanouissement d'une forme des $(n+1)$ différentielles des $(n+1)$ paramètres dont dépend l'élément. Cette forme *fondamentale* $M(u|du)$ n'est pas nécessairement quadratique, et ne dérive pas non plus nécessairement d'une forme à coefficients constants. Il s'en faut cependant qu'une forme de différentielles prise au hasard puisse toujours être considérée comme la forme fondamentale correspondant à un certain système d'éléments. Dès que le nombre des paramètres est supérieur à quatre, la forme $M(u|du)$ présente des particularités caractéristiques, en sorte qu'il y a lieu de poser d'abord le problème suivant: *Sous quelles conditions nécessaires et suffisantes une forme de différentielles peut-elle être la forme fondamentale pour un élément convenablement choisi? Construire le type général de ces formes.*

Après avoir complétement résolu cette question, je passe à la question suivante qui en est le complément naturel:

Sachant qu'une forme $M(u|du)$ peut jouer le rôle de forme fondamen-

tale, trouver tous les systèmes d'éléments qui l'admettent en effet pour forme fondamentale.

Je résouds encore cette question et je parviens ainsi au théorème suivant:

Si deux systèmes d'éléments donnent lieu à la même forme fondamentale, il existe une transformation de contact qui transforme l'un dans l'autre ces deux systèmes d'éléments.

Par exemple, la forme $du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2$ est fondamentale pour la droite et pour la sphère prise pour éléments. Il doit donc exister une transformation de contact transformant la géométrie de la droite dans celle de la sphère. Il y a longtemps que M^r S. Lie a découvert une telle transformation.

Si l'on dit de tous les systèmes d'éléments transformables les uns dans les autres par des transformations de contact, qu'ils forment un groupe, de même que l'on dit que des formes de différentielles forment un groupe lorsqu'elles sont transformables les unes dans les autres par un simple changement de variables, on voit qu'à tout groupe d'éléments correspond un groupe de formes et inversement, sous la réserve que ces formes vérifient les conditions auxquelles sont assujetties les formes fondamentales. Il y a lieu alors de distinguer les groupes d'éléments en deux classes. A la première appartiendront les groupes qui ne contiennent que des systèmes d'éléments-surfaces, et aucun système d'éléments-courbes; à la seconde classe appartiendront les groupes qui contiennent un système d'éléments-courbes, auquel cas il y a évidemment dans le groupe une infinité de pareils systèmes. Le groupe qui comprend les sphères de l'espace est, par exemple, de la seconde classe, puisque le système des droites de l'espace fait, d'après Lie, partie de ce même groupe.

Après avoir donné le caractère distinctif des formes principales des groupes de la seconde classe, je traite deux cas particuliers, celui où la forme fondamentale est quadratique, et celui où ses coefficients sont constants, pour lesquels la solution est immédiate. Je démontre à ce sujet un théorème général, qui me paraît devoir conduire à l'étude plus générale des formes fondamentales de degré donné. Il semble résulter de ce théorème que le degré de la forme limite nécessairement le nombre des paramètres dont peut dépendre l'élément. Ain[illegible]sque la forme est quadratique le nombre des paramètres ne peut ê[illegible]levé que 4.

Etude du cas où l'élément est une surface.

3. Supposons que l'on ait pris pour élément une surface dépendant de $(n+1)$ paramètres, et dont l'équation sera en coordonnées rectilignes, x, y, z:

$$z = \varphi(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = \varphi(x, y \mid u); \tag{1}$$

posons aussi

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

et θ étant une fonction quelconque des paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$, convenons de représenter par $\boxed{\theta, t}$ l'expression

$$\boxed{\theta, t} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1} t_1 + \frac{\partial \theta}{\partial u_2} t_2 + \ldots + \frac{\partial \theta}{\partial u_{n+1}} t_{n+1},$$

où les t_i sont des quantités quelconques.

En exprimant que la surface (u) et la surface infiniment voisine $(u+du)$ se touchent au point x, y, z, on trouve les équations

$$\left|\begin{aligned} &\boxed{\varphi, du} = 0 \\ &\boxed{p, du} = 0 \\ &\boxed{q, du} = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

En éliminant x, y entre ces équations, on trouve une forme homogène des différentielles du, dont les coefficients dépendent des u. Je désigne par $M(u \mid du)$ cette forme, qui n'est définie qu'à un facteur près, indépendant des différentielles.

Au lieu des du introduisons des quantités finies $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}$, et considérons la forme

$$M(u \mid t)$$

qui proviendra de l'élimination de x, y entre les équations

$$\begin{aligned} &\boxed{\varphi, t} = 0 \\ &\boxed{p, t} = 0 \\ &\boxed{q, t} = 0. \end{aligned}$$

Ces équations peuvent encore s'écrire,

$$(3)\qquad \left|\begin{array}{l} \boxed{\varphi\, ,\, t} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}\boxed{\varphi\, ,\, t} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\boxed{\varphi\, ,\, t} = 0. \end{array}\right.$$

4. Pour interpréter ces équations nous ferons usage de la considération des espaces à plusieurs dimensions. Les quantités u seront regardées comme constantes, et les t seront les coordonnées linéaires homogènes d'un point d'un espace à n dimensions. Une équation homogène entre les t définit un espace à $(n-1)$ dimensions, que l'on peut appeler une surface et que je représenterai par le symbole E^{μ}_{n-1}, où μ est le degré de l'équation qui lie les coordonnées t d'un point quelconque de cet espace. Si en particulier $\mu = 1$, l'équation est linéaire et l'on a un espace linéaire à $(n-1)$ dimensions E^1_{n-1}, que l'on peut appeler un plan. Deux équations linéaires représentent un espace linéaire à $(n-2)$ dimensions, que je représenterai par E^1_{n-2}; plus généralement, k équations linéaires homogènes entre les t définissent un espace linéaire à $(n-k)$ dimensions, E^1_{n-k}. Un point unique peut être regardé comme un espace linéaire de 0 dimensions E^1_0. Je laisse de côté les espaces E^{μ}_{n-k} à $(n-k)$ dimensions et non linéaires (du degré μ) dont la considération ne nous sera pas utile.

Si l'on se reporte à l'espace ordinaire à trois dimensions, on sait que les surfaces E^{μ}_2 de cet espace se divisent en deux catégories. Pour les surfaces d'une catégorie, les plans tangents sont doublement indéterminés, comme le point de contact; mais pour les surfaces de la seconde catégorie, dites développables, le plan tangent ne dépend que d'un seul paramètre, il est simplement indéterminé, et il est le même pour tous les points d'un même espace linéaire à une dimension E^1_1 (génératrice de contact). Des faits tout pareils se retrouvent dans le cas d'un espace quelconque, mais avec plus de variété.

Il y a, en effet, dans l'espace à n dimensions $(n-1)$ catégories de surfaces. Pour les unes le plan tangent dépend de $(n-1)$ paramètres, comme le point de contact; c'est le cas général. Mais pour d'autres le

plan tangent dépend de $(n-2)$, $(n-3)$, ... de 2 ou même seulement d'un seul paramètre. Il est facile de se rendre compte de la génération de ces surfaces. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de celles dont le plan tangent dépend de $(n-k)$ paramètres; on écrira l'équation

$$\text{(e)} \qquad \theta = T_1 t_1 + T_2 t_2 + \ldots + T_n t_n + T_{n+1} t_{n+1} = 0$$

où les T_i dépendent de $(n-k)$ paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-k}$, et l'on cherchera l'enveloppe de ce plan, en éliminant les $(n-k)$ quantités α_i entre les $(n-k+1)$ équations

$$\text{(e')} \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_{n-k}} = 0, \qquad \theta = 0.$$

On obtiendra ainsi la surface la plus générale dont le plan tangent dépend de $(n-k)$ paramètres, et l'on aperçoit tout de suite que le plan tangent est le même dans tous les points de l'espace à $k-1$ dimensions E^1_{k-1} représenté par les $n-k+1$ équations (e'). Donc, lorsqu'une surface E^μ_{n-1} est telle que ses plans tangents soient $(n-k)$ fois indéterminés, elle est le lieu d'un espace linéaire E^1_{k-1} à $k-1$ dimensions, en tous les points duquel le plan tangent est le même.

On voit que lorsque l'on parle de surface dans l'espace à n dimensions, il y a lieu d'apporter une indication spéciale portant sur l'indétermination du plan tangent. Par exemple $E^\mu_{n-1,\,n-k}$ représentera un espace d'ordre μ à $(n-1)$ dimensions dont le plan tangent est $(n-k)$ fois indéterminé.

5. Revenons maintenant aux équations (3). L'élimination est celle que l'on effectuerait pour trouver la surface $E^\mu_{n-1,2}$ enveloppe du plan à 2 paramètres x, y représenté par l'équation

$$\boxed{\varphi\,,\,t} = 0,$$

qui est linéaire par rapport aux coordonnées t.

Il suit de là que:

Dans l'espace à n dimensions dont les t sont les coordonnées ponctuelles linéaires, l'équation

$$M(u\,|\,t) = 0,$$

où les u sont regardés comme constants, représente une surface $E^n_{n-1,2}$, dont les plans tangents sont seulement deux fois indéterminés.

Lorsque $n + 1 = 4$, ce fait ne constitue pas une exception; mais si $n + 1 > 4$ on est en présence d'une véritable singularité, qui est, comme nous le verrons, caractéristique des formes considérées.

Si l'on représente par $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ les coefficients de l'équation du plan tangent de la surface $M(u|t)$, on aura, en comparant à la première des équations (3)

$$(4) \qquad \frac{T_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}} = \frac{T_2}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}} = \ldots = \frac{T_{n+1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n+1}}},$$

et en éliminant x, y entre ces n équations on tombera sur $(n - 2)$ équations homogènes entre les quantités T, dont les coefficients dépendront des u, et que nous écrirons,

$$(5) \qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1(u|T) = 0 \\ \mathfrak{M}_2(u|T) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u|T) = 0. \end{array}\right.$$

Puisque le plan tangent à la surface $M(u|t) = 0$ ne contient que deux paramètres il devait, à priori, exister $(n - 2)$ relations entre les coefficients de ce plan, ces relations sont précisement les équations (5).

Une forme quelconque de $(n + 1)$ variables $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ étant donnée, on sait qu'il existe une forme étroitement liée à la première, qui contient les coefficients $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ d'une forme linéaire, et dont l'évanouissement exprime le contact du plan représenté par cette forme linéaire avec la surface représentée par la forme proposée elle-même. Cette seconde forme s'appelle la *forme adjointe.*

On voit cependant que l'on ne peut plus parler de forme adjointe du moment que le plan tangent à la surface représentée par la forme contient moins de $(n - 1)$ paramètres; s'il en contient $(n - k)$, *il faut k équations* pour exprimer le contact d'un plan avec la surface, et au lieu d'une forme adjointe unique on a un *système adjoint* de k formes.

Dans le cas actuel, la forme $M(u|t)$ se trouve donc caractérisée par

ce fait qu'elle admet un système adjoint composé de $(n-2)$ *formes, à savoir le système des premiers membres des équations* (5).

Dans le cas de $n+1=4$, le système se réduit à une forme unique, et on n'a dès lors aucune singularité, mais si $n+1>4$, le système (5) comporte plusieurs équations. Il en résulte donc déjà que du moment que $n+1>4$ on ne peut chercher les formes fondamentales relatives à tous les éléments imaginables, que parmi celles qui ont un système adjoint comprenant $(n-2)$ formes simultanées.

6. Ce caractère *purement algébrique* que doit présenter la forme $M(u|du)$ n'est pas cependant suffisant; nous allons voir qu'elle doit présenter encore un autre caractère exceptionnel, où l'on tient compte du mode de composition des coefficients de la forme au moyen des variables u, dont il a été jusqu'ici fait abstraction.

D'après la définition même des équations (5) on a identiquement

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0 \\ \mathfrak{M}_2\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0 \end{array}\right.$$

en sorte que le système des $(n-2)$ équations différentielles simultanées

$$(6)\qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \mathfrak{M}_2\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \end{array}\right.$$

admet la solution $\varphi(x, y \mid u) - z$, où x, y, z sont considérés comme 3 constantes.

Le système des équations (6) admet donc une solution contenant un nombre de constantes égal à l'excès du nombre $(n+1)$ des variables in-

dépendantes sur le nombre $(n-2)$ de ces mêmes équations; et l'on peut dire ainsi, en étendant une locution usitée pour les équations linéaires, que les équations (6) forment un système complet. Les conditions auxquelles sont soumis les coefficients de la forme $M(u|du)$ ne sont donc autres que celles qui expriment, conformément aux théories connues, la compatibilité des équations (6).

7. Ces conditions caractérisent entièrement la forme $\mathfrak{M}(u|du)$ comme le prouve la réciproque suivante.

Soit un système de $(n-2)$ équations différentielles homogènes

$$(\mathrm{E}) \qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \mathfrak{M}_2\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \end{array}\right.$$

assujetti à la seule condition de former un système complet, c'est-à-dire, d'admettre une solution complète douée de trois constantes, dont une nécessairement additive à la fonction θ.

Je dis que le système des fonctions

$$(\mathrm{E}') \qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1(u \mid T) \\ \mathfrak{M}_2(u \mid T) \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u \mid T) \end{array}\right.$$

constitue le système adjoint d'une forme fondamentale, qui est même fondamentale pour une infinité de systèmes d'éléments.

Formons d'abord la forme à laquelle le système (E') est adjoint; pour cela nous prenons dans l'espace à n dimensions (dont les t_i sont des coordonnées linéaires ponctuelles) le plan

$$T_1 t_1 + \dots + T_{n+1} t_{n+1} = 0$$

où les T_i sont liés par les $(n-2)$ équations

$$(\mathrm{E}'')\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_1(u \mid T) = 0 \\ \mathfrak{M}_2(u \mid T) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u \mid T) = 0 \end{cases}$$

et nous cherchons l'enveloppe de ce plan, qui se trouve représentée par une forme $M(u|t)$. Cette forme est la forme cherchée. En y remplaçant les t par des différentielles du, nous obtenons la forme $M(u|du)$. Il faut prouver que cette forme est une forme fondamentale.

Soit en effet

$$\varphi(x, y, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}) - z$$

une solution complète du système (E), où x, y, z représentent les trois constantes, dont l'une est nécessairement additive à θ, puisque θ ne figure pas explicitement dans les équations différentielles. Si l'on considère x, y, z comme des coordonnées linéaires dans l'espace à trois dimensions, et que l'on adopte pour élément la surface à $(n+1)$ paramètres

$$\varphi(x, y|u) - z = 0,$$

la forme $M(u|du)$ sera la forme fondamentale correspondante à ce système d'éléments. Car si l'on veut former le système adjoint à la forme fondamentale relative à cet élément, on doit, comme on l'a vu, éliminer x, y entre les équations

$$\frac{T_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}} = \frac{T_2}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}} = \dots = \frac{T_{n+1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n+1}}};$$

d'après l'hypothèse faite que $\varphi(x, y|u) - z$ vérifie le système (E), cette élimination donnera lieu au système d'équations (E''), en sorte que la forme fondamentale aura le système (E') pour système adjoint, et coïncidera, par conséquent, avec la forme $M(u|du)$.

Maintenant, comme l'on peut adopter toute autre forme de solution complète du système (E), on obtiendra autant de systèmes d'éléments,

admettant la forme fondamentale $M(u|du)$, qu'il y a de solutions complètes distinctes, c'est-à-dire une infinité.

On pouvait déjà prévoir l'existence d'une infinité de systèmes d'éléments donnant lieu à la même forme fondamentale; car si l'on effectue une transformation de contact sur l'espace à trois dimensions, un système de surfaces à $(n + 1)$ paramètres se transforme en un système analogue; et si deux surfaces se touchent, leurs transformées se touchent également. L'évanouissement de la forme $M(u|du)$ qui exprime le contact de deux surfaces infiniment voisines exprime donc aussi le contact de leurs transformées, qui sont également infiniment voisines. Nous pouvons ainsi regarder comme formant un groupe tous les systèmes de surfaces qui dérivent les uns des autres par des transformations de contact, de même que l'on regarde comme formant un groupe toutes les formes de différentielles qui dérivent les unes des autres par un simple changement de variables. On dit aussi que ces formes sont *équivalentes*. Cela posé, nous allons démontrer la proposition réciproque suivante.

Si deux éléments dépendant d'un même nombre de paramètres donnent lieu à la même forme fondamentale, ou bien à deux formes fondamentales équivalentes, ces deux éléments font partie d'un même groupe, c'est-à-dire, que l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation de contact.

Ce théorème, que nous énonçons ici dans le cas des surfaces, subsiste dans le cas où l'élément est une courbe, comme nous le verrons plus loin.

8. Pour démontrer cette proposition nous remarquons que les deux systèmes d'éléments considérés doivent correspondre chacun à une solution complète du système (E), et nous n'avons dès lors qu'à étudier le passage d'une solution complète à une autre solution complète.

Ceci nous conduit à étudier de plus près les solutions du système (E), en partant de ce fait qu'il admet au moins une solution contenant trois constantes, dont une nécessairement doit être additive. Soit alors $\Phi + \gamma$ cette solution complète, donnée par l'équation

$$\text{(V)} \qquad V(\alpha, \beta, \Phi + \gamma, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = 0,$$

où α, β, γ sont les trois constantes. On voit que les $\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$ seront proportionnelles aux $\frac{\partial V}{\partial u_i}$, et, par suite, les équations suivantes

$$(\varepsilon)\qquad\left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u\,\middle|\,\frac{\partial V}{\partial u}\right)=0\\[2ex] \mathfrak{M}_2\left(u\,\middle|\,\frac{\partial V}{\partial u}\right)=0\\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\\[2ex] \mathfrak{M}_{n-2}\left(u\,\middle|\,\frac{\partial V}{\partial u}\right)=0 \end{array}\right.$$

seront vérifiées en vertu de $V=0$, c'est-à-dire si l'on transporte dans ces équations la valeur de Φ, tirée de l'équation $V=0$. D'après cela les équations (ε) étant vérifiées pour toutes valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ et de α, β, γ, le seront encore si ces trois dernières quantités, au lieu d'être constantes dépendent des u et d'autres quantités. Si nous posons alors

$$\alpha=\xi(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}, \theta)=\xi(u\,|\,\theta)$$

$$\beta=\eta(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}, \theta)=\eta(u\,|\,\theta)$$

$$\gamma=\zeta(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}, \theta)=\zeta(u\,|\,\theta)$$

où ξ, η, ζ sont trois fonctions arbitraires, et θ une quantité quelconque, l'équation

$$V\big(\xi(u\,|\,\theta), \eta(u\,|\,\theta), \zeta(u\,|\,\theta), u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}\big)=0$$

définira θ en fonction des u; et par un choix convenable de ξ, η, ζ on pourra faire en sorte que θ représente telle solution que l'on voudra du système des équations compatibles (E). C'est là un fait bien connu dans la théorie des équations différentielles. Différentions l'équation $V=0$ et dans la différentielle totale de ξ distinguons deux parties; l'une provenant de la variation des u et l'autre de la variation de θ, en sorte que

$$d\xi=\delta\xi+\frac{\partial\xi}{\partial\theta}d\theta;$$

nous aurons, en différentiant

$$dV=\frac{\partial V}{\partial\xi}\delta\xi+\frac{\partial V}{\partial\eta}\delta\eta+\frac{\partial V}{\partial\zeta}\delta\zeta+\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}+\frac{\partial V}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\theta}+\frac{\partial V}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)d\theta$$

$$+\frac{\partial V}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial V}{\partial u_2}du_2+\ldots+\frac{\partial V}{\partial u_{n+1}}du_{n+1}=0.$$

2°. S'il y a deux relations, on devra avoir

$$\beta = f(\alpha', \beta', \gamma' + \Omega, \alpha)$$

$$\gamma = g(\alpha', \beta', \gamma' + \Omega, \alpha)$$

et on adjoindra l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \gamma}\frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0.$$

On passera donc de $V(\alpha, \beta, \gamma | u) = 0$ à $W(\alpha', \beta', \gamma' | u) = 0$ en portant dans V les valeurs des α, β, γ tirées des équations

$$(\mathrm{T}_2) \qquad \left|\begin{array}{l} \beta = f(\alpha', \beta', \gamma', \alpha) \\ \gamma = g(\alpha', \beta', \gamma', \alpha) \\ \dfrac{\partial V}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial V}{\partial \beta}\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial V}{\partial \gamma}\dfrac{\partial g}{\partial \alpha}. \end{array}\right.$$

3°. De même, dans le cas d'une seule équation, on verra qu'on passe de $V(\alpha, \beta, \gamma | u)$ à $W(\alpha', \beta', \gamma' | u)$ en portant dans V les valeurs de α, β, γ tirées des équations

$$(\mathrm{T}_3) \qquad \left|\begin{array}{l} \gamma = f(\alpha', \beta', \gamma', \alpha, \beta) \\ \dfrac{\partial V}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial V}{\partial \gamma}\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial \beta} + \dfrac{\partial V}{\partial \gamma}\dfrac{\partial f}{\partial \beta} = 0. \end{array}\right.$$

Interprétons ces résultats. Si dans l'équation

$$V(\alpha, \beta, \gamma | u) = 0$$

on regarde α, β, γ comme des coordonnées, on obtient une famille de surfaces dépendant des $(n + 1)$ paramètres u; de même

$$W(\alpha', \beta', \gamma' | u) = 0$$

représente une seconde famille de surfaces, et d'après les hypothèses faites, ces deux familles constituent deux systèmes d'éléments quelconques parmi ceux qui donnent lieu à une même forme fondamentale, à savoir, celle qui correspond aux équations (E).

Or les trois transformations (T_1), (T_2), (T_3) par l'une desquelles on peut certainement passer d'un système à l'autre représentent évidemment les trois classes de transformations de contact relatives à l'espace à trois dimensions.

Le théorème énoncé au numéro 8 se trouve donc complétement démontré.

Et la relation entre *les groupes de systèmes d'éléments* et *les classes de formes fondamentales* se trouve ainsi entièrement établie.

9. Cherchons maintenant à interpréter les solutions du système (E) sous une forme différente.

Nous venons de voir qu'un changement de solution complète est équivalent à une transformation de contact de l'élément. Nous allons étudier l'équation $V = 0$ à un autre point de vue.

Si dans l'équation

$$V(x, y, z | u) = 0$$

on regarde x, y, z comme donnés, l'équation $V = 0$ est celle qui lie les u de toutes les surfaces du système qui passent par un point donné. On en conclut donc que si l'équation

$$\theta(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) = 0$$

assujettit la surface (u) à passer par un point donné, la fonction $\theta(u)$ vérifie le système des équations (E). Cette proposition se généralise ainsi:

Si l'équation $\theta = 0$ est telle que les surfaces (u) qui la vérifient touchent une surface ou une courbe fixe, ou passent par un point fixe, les équations (E) *sont vérifiées par la fonction θ, soit identiquement, soit en vertu de l'équation $\theta = 0$.*

En effet, soit S une surface fixe; on peut toujours trouver une transformation de contact telle que toutes les surfaces de l'espace qui touchent S aient pour transformées des surfaces passant par un point fixe. Si on applique alors cette transformation, la condition $\theta = 0$ qui exprime le contact des surfaces (u) avec la surface S, exprime que les surfaces transformées passent par un point fixe. Le système (E) n'étant pas modifié par la transformation, il en résulte que θ doit vérifier les équations (E). La même démonstration s'applique au cas où l'on assujettit les surfaces (u) à toucher une courbe fixe.

Voici maintenant la réciproque de cette proposition.

Si la fonction $\theta(u)$ vérifie les équations (E) *soit identiquement, soit en vertu de l'équation $\theta = 0$, cette dernière équation exprime que les surfaces (u) qui la vérifient touchent une courbe ou une surface fixe, ou bien passent par un point fixe.*

En effet, toute fonction θ de l'espèce considérée dérive d'une fonction (solution complète) telle que $W(x', y', z' | u)$ dans laquelle x', y', z' ont reçu des valeurs numériques déterminées, x'_0, y'_0, z'_0, en sorte que

$$W(x'_0, y'_0, z'_0 | u) = \theta(u);$$

si l'on effectue la transformation de contact qui consiste à prendre pour élément les surfaces $W(x', y', z' | u) = 0$, l'équation $\theta = 0$ exprime que les surfaces W qui la vérifient passent un point (x'_0, y'_0, z'_0). Les surfaces primitives $V = 0$ touchent donc une courbe ou une surface fixe, ou bien elles passent par un point fixe.[1]

Examen du cas où l'élément est une courbe.

10. Si l'élément est une courbe dépendant de $(n + 1)$ paramètres, il est facile de ramener ce cas à celui où l'élément est une surface; il suffit d'effectuer une transformation de contact arbitraire (non ponctuelle). On obtient ainsi des surfaces dépendant de $(n + 1)$ paramètres, auxquelles on peut appliquer tous les résultats précédents. On formera ainsi la forme $M(u | du)$ et le système adjoint de cette forme; il ne restera plus qu'à interpréter le rôle de ces diverses fonctions dans le langage des courbes. Les transformations de contact transforment la rencontre de deux courbes dans le contact des deux surfaces correspondants et inversement. Il suit de là que l'évanouissement de la forme $M(u | du)$ exprimera la rencontre des deux courbes infiniment voisines (u) et $(u + du)$.

[1] Ainsi qu'on va le voir, tous ces résultats s'étendent d'eux-mêmes au cas où l'élément est une courbe. Dans le cas particulier où l'élément est une droite, on a ce théorème de M. Klein (Mathematische Annalen, t. 5), que lorsque le paramètre différentiel du premier ordre d'un complexe est nul, ce complexe est formé des sécantes d'une courbe ou des tangentes d'une surface. Dans le mémoire précité, M. Klein n'a pas complété sa démonstration, et je ne crois pas qu'elle ait été reprise par personne, si ce n'est dans mon travail *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (Annales de l'école normale, 2ème série, t. 11).

Ce qui précède fournit une nouvelle démonstration de cet important théorème.

Si la fonction $\theta(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1})$ vérifie les équations (E) identiquement ou en vertu de $\theta = 0$, cette dernière équation exprime que les surfaces transformées touchent une surface fixe ou une courbe fixe, ou bien qu'elles passent par un point fixe. Les courbes primitives doivent donc toucher une surface fixe, ou bien couper une courbe fixe.

On retrouve ainsi une extension fort générale du théorème que M. Klein a fait connaître pour le cas des complexes de droites. D'après M. Klein, pour que le complexe $\theta = 0$ soit formé des tangentes d'une surface ou des sécantes d'une courbe, il faut et il suffit que l'invariant $\mathfrak{M}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right)$ soit nul.

Or, dans le cas des droites, on a $n + 1 = 4$ et $n - 2 = 1$; le système adjoint se réduit précisément à la forme $\mathfrak{M}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right)$.

11. Ce qui précède montre assez qu'il n'y a pas de distinction fort essentielle à faire entre le cas où l'élément est une surface, et celui où l'élément est une courbe. Il suffit, par une transformation de contact, de transformer en surfaces les courbes du système pour pouvoir appliquer les résultats ci-dessus démontrés.

On a vu, par exemple, que si deux éléments donnent lieu à la même forme fondamentale, il existe une transformation de contact qui les transforme l'un dans l'autre. Ce théorème n'a été démontré que dans le cas où l'élément est une surface. Il s'étend de lui-même au cas des courbes.

Soit un système Γ de courbes et un système Σ de surfaces qui donnent lieu à la même forme fondamentale. Une transformation de contact T transforme Γ en un système $T\Gamma$ de surfaces. Le système $T\Gamma$ de surfaces et le système Σ donnent lieu à la même forme fondamentale, il existe donc une transformation de contact T' qui transforme $T\Gamma$ en Σ, en sorte que $T'T\Gamma = \Sigma$; on en conclut que si l'on transforme successivement Σ par les transformations de contact T'^{-1}, T^{-1} inverses de T' et de T on reproduit Γ; ou enfin, que Γ et Σ sont transformables l'un dans l'autre par une transformation de contact, attendu que le produit de deux transformations de contact est une transformation de contact.

Par exemple, on sait que par un choix convenable des coordonnées la sphère et la droite donnent lieu à la forme fondamentale

$$du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2.$$

Il existe donc une transformation de contact qui change la sphère en droite. M^r Sophus Lie a depuis longtemps donné cette remarquable transformation, dont l'usage est si fécond pour la théorie générale des surfaces.

Distinction entre le cas des courbes et celui des surfaces.

12. Malgré la grande similitude entre le cas où l'élément est une courbe et celui où l'élément est une surface, malgré qu'une transformation de contact permette toujours de passer du premier cas au second, il existe néanmoins des particularités dans le cas où l'élément est une courbe, particularités qui tiennent à ce *qu'un système de surfaces ne peut généralement pas se transformer en un système de courbes* par une transformation de contact, même convenablement choisie.

Nous avons déjà dit que nous regardions comme équivalents, ou formant un groupe, tous les systèmes d'éléments qu'une transformation de contact transforme les uns dans les autres. Ce qui précède fait voir assez que nous n'excluons pas le cas où le groupe contient un système de courbes, auquel cas il en comprend une infinité. Mais alors nous sommes conduits à diviser ces groupes en deux classes. Un groupe de la première classe ne comprendra comme éléments que des surfaces, qu'il sera impossible de ramener à des courbes; à la seconde classe appartiendront les groupes qui comprennent un système de courbes, et par suite une infinité de ces systèmes.

Nous avons déjà vu que chaque groupe est caractérisé par une classe de formes fondamentales, c'est-à-dire de formes qui dérivent toutes les unes des autres par un changement de variables.

Le problème qui se présente maintenant est donc celui-ci, *qu'est ce qui caractérise les formes dont le groupe d'éléments correspondant est de la seconde classe?*

Nous allons traiter ce problème dans lequel on verra intervenir, non sans intérêt, ces systèmes simultanés d'équations différentielles dits *semi-linéaires* dont la notion est due à M^r S. Lie.

13. Nous prendrons les équations des courbes considérées comme élément, sous la forme

$$\begin{cases} x = f(z, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = f(z \mid u) \\ y = \varphi(z \mid u). \end{cases}$$

Si les courbes (u), $(u + du)$ se coupent au point x, y, z, on a, en reprenant une notation précédente,

$$\begin{cases} \boxed{f\,,\,du} = 0 \\ \boxed{\varphi\,,\,du} = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduira la forme $M(u\,|\,du)$ par l'élimination de z. Ou encore, on obtiendra la forme $M(u\,|\,t)$ en éliminant z entre les équations

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \boxed{f\,,\,t} = 0 \\ \boxed{\varphi\,,\,t} = 0. \end{cases}$$

Cherchons le système adjoint de la forme M. Pour cela, je différentie totalement les équations ci-dessus, en regardant les u comme constants. Il vient

$$\frac{\partial \boxed{f\,,\,t}}{\partial z} dz + \boxed{f\,,\,dt} = 0$$

$$\frac{\partial \boxed{\varphi\,,\,t}}{\partial z} dz + \boxed{\varphi\,,\,dt} = 0$$

d'où, en posant

$$\text{(b)} \qquad -\lambda = \frac{\dfrac{\partial \boxed{f\,,\,t}}{\partial z}}{\dfrac{\partial \boxed{\varphi\,,\,t}}{\partial z}},$$

on conclut

$$\boxed{f\,,\,dt} + \lambda \boxed{\varphi\,,\,dt} = 0,$$

en sorte qu'on a

$$\text{(c)} \qquad \frac{T_1}{\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1}} = \frac{T_2}{\dfrac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2}} = \ldots = \frac{T_{n+1}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_{n+1}} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_{n+1}}};$$

$T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ désignant les coefficients du plan tangent à la surface E^{μ}_{n-1} représentée par

$$M(u\,|\,t) = 0$$

dans l'espace à n dimensions dans lequel les t_i sont les coordonnées linéaires ponctuelles.

Ce plan tangent dépend de deux paramètres λ et z, comme dans le cas général étudié au début. Mais ici se place une remarque nouvelle.

14. Précédemment, notre surface E^{μ}_{n-1} se trouve être le lieu d'un espace linéaire E^{1}_{n-3}, en tous les points duquel le plan tangent est le même. Mais ici il y a plus; la surface E^{μ}_{n-1} est, d'après les équations (a), le lieu d'un espace linéaire à E^{μ}_{n-2} dimensions, et tout plan mené par l'un de ces espaces générateurs touche la surface en tous les points d'un espace linéaire à trois dimensions, représenté par les équations (a) (b), où λ a reçu une valeur arbitraire déterminée. La différence avec le cas général est donc bien établie; présentons la sous une forme moins symbolique.

Si on élimine z et λ entre les équations (c), on obtient les $(n-2)$ équations du système adjoint

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1(u\,|\,T) = 0 \\ \mathfrak{M}_2(u\,|\,T) = 0 \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u\,|\,T) = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on forme alors les équations

$$(\mathrm{E}_0)\qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u\,\middle|\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u\,\middle|\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \end{array}\right.$$

on voit par les équations (c) elles-mêmes, que la fonction $f(z|u) + \lambda\varphi(z|u) + \mu$, où z, λ, μ jouent le rôle de constantes, est une solution du système (E_0).

Or on sait qu'un système complet de $(n-2)$ équations différentielles homogènes *linéaires* simultanées admet une solution complète de la forme

$$x_0 + \delta x_1 + \lambda x_2 + \mu$$

où λ, μ, δ sont les constantes, et x_0, x_1, x_2 trois solutions particulières.[1] Cette solution est linéaire par rapport à toutes les constantes.

---

[1] On suppose le nombre des variables égal à $(n+1)$.

Dans le cas actuel, nous avons une solution

$$f(z|u) + \lambda\varphi(z|u) + \mu$$

qui est linéaire par rapport à deux des constantes seulement; de là le nom de semi-linéaire que Lie a donné à ce genre d'équations différentielles.

Ainsi, ce qui caractérise une forme $M(u|du)$ dont le groupe d'éléments comprend des systèmes de courbes, c'est que le système adjoint d'équations différentielles est un système *semi-linéaire.*

Je n'insisterai pas davantage sur ces considérations générales, et je passe à quelques applications.

Recherche de tous les cas où la forme fondamentale est quadratique.

15. Je démontrerai d'abord la proposition suivante: *si parmi les équations du système adjoint l'une d'elles est linéaire, le nombre des variables peut être réduit d'une unité.*

Soient en effet les équations

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Si l'équation $\mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0$ est linéaire, elle admet n solutions indépendantes $v_1, v_2, \dots, v_n$; on peut prendre pour variables les fonctions v et une $(n+1)^{\text{ème}}$, formant avec elles un système de variables indépendantes. Les équations du système adjoint deviendront alors

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(v \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial v}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-3}\left(v \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial v}\right) = 0 \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(v \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial v}\right) = \frac{\partial\theta}{\partial v_{n+1}} = 0. \end{array}\right.$$

Toutes les solutions communes au système seront donc nécessairement des fonctions de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et ne contiendront pas v_{n+1}. La solution complète

$$\varphi(x, y \mid v) - z$$

ne contiendra pas v_{n+1}, et la surface

$$z = \varphi(x, y \mid v)$$

dépendra seulement de n paramètres. Il en résulte que v_{n+1} doit se trouver naturellement éliminé des équations du système adjoint, résultat auquel on est encore conduit en écrivant les conditions d'intégrabilité.

Corollaire. *Si p des équations du système adjoint sont linéaires, on peut réduire de p le nombre des paramètres.*

16. Appliquons ceci à la recherche des formes $M(u \mid du)$ qui sont quadratiques.

Je remarque d'abord que si une forme quadratique, de $(n+1)$ variables, est réductible à $(n+1-p)$ carrés, il existe p relations linéaires homogènes entre les dérivées partielles de cette forme, en sorte que ces dérivées sont exprimables en fonction de $(n+1-p)$ d'entr'elles entre lesquelles il n'existe aucune espèce de relation.

Si on assujettit néanmoins les variables à annuler la forme, une relation quadratique unique existe entre ces $(n+1-p)$ dérivées indépendantes. Donc, nous voyons que dans le cas d'une forme quadratique, $(n-3)$ des équations du système adjoint seront linéaires, et la $(n-2)^{\text{ème}}$ sera quadratique. Il en résulte que le nombre des paramètres peut être abaissé de $(n+1)$ à $n+1-(n-3) = 4$. De là ce théorème:

Les éléments qui ont pour forme fondamentale une forme quadratique ne peuvent dépendre de plus de 4 paramètres.[1]

D'ailleurs, si l'on prend une forme quadratique quelconque dépendant de 4 variables

$$M(u \mid du) = M(u_1, u_2, u_3, u_4 \mid du_1, du_2, du_3, du_4),$$

---

[1] Généralement, le nombre des paramètres est inférieur ou égal au degré de la forme augmenté de deux.

et que l'on prenne la forme adjointe unique $\mathfrak{M}(u \mid T)$, l'équation quadratique en $\frac{\partial \theta}{\partial u}$

$$\mathfrak{M}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) = 0$$

admettra une solution complète

$$\varphi(x, y \mid u) - z$$

qui donnera immédiatement un élément pour lequel $M(u \mid du)$ est la forme fondamentale.

Dans cet exemple on n'a pas à s'occuper des conditions d'intégrabilité. Voici un exemple encore où ces conditions sont vérifiées d'elles-mêmes.

Cas des formes à coefficients constants.

17. Pour engendrer les formes fondamentales à coefficients constants, il suffit de partir d'un système de $(n - 2)$ équations différentielles simultanées quelconque à coefficients constants

$$(\mathrm{E}) \qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Les conditions d'intégrabilité sont vérifiées d'elles-mêmes, et si l'on détermine les fonctions $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_{n+1}(x, y)$ des deux constantes x, y, de façon à avoir

$$\mathfrak{M}_1(\varphi) = 0, \qquad \mathfrak{M}_2(\varphi) = 0, \quad \dots, \quad \mathfrak{M}_{n-2}(\varphi) = 0,$$

la fonction

$$-z + \varphi_1(x, y)u_1 + \varphi_2(x, y)u_2 + \dots + \varphi_n(x, y)u_n + \varphi_{n+1}(x, y)u_{n+1}$$

sera une solution complète du système des équations (E).

Si l'on prend pour élément la surface

$$z = \varphi_1(x, y)u_1 + \varphi_2(x, y)u_2 + \dots + \varphi_{n+1}(x, y)u_{n+1},$$

la forme fondamentale correspondante aura ses coefficients constants. Réciproquement, toute forme fondamentale à coefficients constants est évidemment susceptible d'un tel mode de génération.

Sur une forme particulière des équations adjointes.

18. Les équations

$$(A)\qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1(u\,|\,T) = 0 \\ \mathfrak{M}_2(u\,|\,T) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u\,|\,T) = 0 \end{array}\right.$$

peuvent n'être pas entièrement équivalentes aux équations de définition

$$(B)\qquad \frac{T_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}} = \frac{T_2}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}} = \dots = \frac{T_{n+1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n+1}}}.$$

Il se peut en effet que l'espace commun aux espaces

$$\mathfrak{M}_1(u\,|\,T) = 0, \qquad \mathfrak{M}_2(u\,|\,T) = 0, \quad \dots, \quad \mathfrak{M}_{n-2}(u\,|\,T) = 0$$

se décompose en espaces partiels dont l'un d'eux seulement corresponde aux équations (B).

Supposons ici algébriques par rapport aux T les équations (A).

Je m'appuierai sur le théorème suivant:

Lorsque $(n+1)$ quantités sont liées par $(n-2)$ relations homogènes algébriques, on peut trouver $(n+1)$ polynômes

$$\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma), \Phi_2(\alpha, \beta, \gamma), \dots, \Phi_{n+1}(\alpha, \beta, \gamma)$$

de trois paramètres α, β, γ liés par une équation irréductible algébrique

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

ces polynômes étant tels que si l'on substitue $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n+1}$ à la place des $(n+1)$ quantités dans les $(n-2)$ équations, celles-ci se trouvent identiquement satisfaites en vertu de $\Omega = 0$.

Si le système des solutions des $(n-2)$ équations forme un espace indécomposable, le système des polynômes Φ et Ω sera unique; mais s'il

y a décomposition, à chaque espace partiel correspondra un système de fonctions Φ et Ω.

Sans aller bien loin, nous avons déjà rencontré une représentation de ce genre pour les équations (A); reportons-nous en effet à la fonction V; on voit que les fonctions

$$\frac{\partial V}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial u_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial u_{n+1}},$$

mises à la place de $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ dans les équations (A), vérifient ces équations en vertu de l'équation

$$V(x, y, z \mid u) = 0.$$

On a donc une représentation immédiate des équations (A) lorsque l'on connaît un des éléments qui correspondent à la forme, car ces équations pourront s'écrire sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{T_1}{\dfrac{\partial V}{\partial u_1}} = \dfrac{T_2}{\dfrac{\partial V}{\partial u_2}} = \dfrac{T_3}{\dfrac{\partial V}{\partial u_3}} = \ldots = \dfrac{T_{n+1}}{\dfrac{\partial V}{\partial u_{n+1}}} \\ \qquad\qquad V = 0. \end{array}\right.$$

Mais dans le cas où l'on part de la forme elle-même, on aura plus généralement

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{T_1}{\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma \mid u)} = \dfrac{T_2}{\Phi_2(\alpha, \beta, \gamma \mid u)} = \ldots = \dfrac{T_{n+1}}{\Phi_{n+1}(\alpha, \beta, \gamma \mid u)}, \\ \qquad\qquad \Omega(\alpha, \beta, \gamma \mid u) = 0, \end{array}\right.$$

où il est entendu que α, β, γ peuvent être déterminés en fonction de u et de deux constantes de sorte que l'expression

$$\Phi_1 du_1 + \Phi_2 du_2 + \ldots + \Phi_{n+1} du_{n+1}$$

admette un facteur intégrant.

Cette nouvelle forme des équations (A) est principalement utile pour rechercher les formes fondamentales d'un degré donné.

Paris le 9 Juillet 1887.

SUR UN CAS SPÉCIAL DE
L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LAMÉ

PAR

E. A. STENBERG
À HELSINGFORS.

La méthode donnée par M. HERMITE dans son admirable mémoire *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (premier fascicule, Paris, Gauthier-Villars 1885, §§ 44, 45), pour intégrer l'équation différentielle de LAMÉ

$$y'' - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y = 0$$

n'est plus applicable, quand les équations trouvées au § 45, c'est-à-dire

$$H_{2\nu-1} + h_1 H_{2\nu-3} + h_2 H_{2\nu-5} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 + h_\nu = 0,$$

$$2\nu H_{2\nu} + (2\nu - 2)h_1 H_{2\nu-2} + (2\nu - 4)h_2 H_{2\nu-4} + \ldots + 2h_{\nu-1} H_2 = 0$$

ou

$$H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + h_2 H_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1} H_0 = 0,$$

$$(2\nu - 1)H_{2\nu-1} + (2\nu - 3)h_1 H_{2\nu-3} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 - h_\nu = 0$$

suivant les cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$, conduisent par l'élimination de λ à une équation

$$\Phi(k^2 \operatorname{sn}^2 \omega, \; k \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega) = 0,$$

où la fonction doublement périodique Φ ne devient nul que pour $\omega = iK'$.

La fonction $f(x)$ du même paragraphe n'a, en effet, alors aucun pôle et ne peut pas par conséquent servir d'élément simple.

Il en est ainsi, particulièrement, toujours, quand l'équation de LAMÉ est satisfaite par des fonctions doublement périodiques spéciales de seconde espèce de M. MITTAG-LEFFLER.[1] C'est ce cas, laissé de côté par M. HERMITE, que je me propose d'étudier ici.

Soit y une fonction de cette espèce, ayant le seul pôle $x = iK'$, auquel correspond le développement suivant

$$y = \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \frac{h_2}{\varepsilon^{n-4}} + \ldots + \frac{h_i}{\varepsilon^{n-2i}} + \ldots.$$

La quantité λ, qui entre dans les multiplicateurs

$$e^{2\lambda K}, \qquad e^{2\lambda i K'}$$

de cette fonction, est alors, comme l'a démontré M. MITTAG-LEFFLER dans son article cité ci-dessus, soumise à la condition

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^{n-1} + \frac{h_1}{\Gamma(n-2)}\lambda^{n-3} + \ldots + \frac{h_{\nu-2}}{\Gamma(4)}\lambda^3 + \frac{h_{\nu-1}}{\Gamma(2)}\lambda = 0$$

ou

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^{n-1} + \frac{h_1}{\Gamma(n-2)}\lambda^{n-3} + \ldots + \frac{h_{\nu-2}}{\Gamma(3)}\lambda^2 + h_{\nu-1} = 0$$

suivant les cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$.

Pour reconnaître si l'équation de LAMÉ a une solution ainsi qualifiée nous déterminons d'abord les $\nu + 1$ coefficients

$$h_1,\ h_2,\ h_3,\ \ldots,\ h_\nu,\ h_{\nu+1}$$

au moyen des formules de M. HERMITE au § 44:

$$h_1 = -\frac{h + n(n+1)s_0}{4n-2},$$

$$2(2n-3)h_2 = (2n-1)h_1^2 - \frac{n(n+1)}{2}s_1,$$

$$i(2n-2i+1)h_i = (2n-1)h_1 h_{i-1} - \frac{n(n+1)}{2}(s_1 h_{i-2} + s_2 h_{i-3} + \ldots + s_{i-1}),$$

---

[1] MITTAG-LEFFLER, *Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce.* Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, 26 Janvier 1880.

où les quantités s_0, s_1, s_2, ... sont les coefficients du développement

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} + s_0 + s_1 \varepsilon^2 + s_2 \varepsilon^4 + \ldots$$

c'est-à-dire

$$s_0 = \frac{1 + k^2}{3}$$

$$s_1 = \frac{1 - k^2 + k^4}{15}$$

$$s_2 = \frac{2 - 3k^2 - 3k^4 + 2k^6}{189}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

J'emploie comme élément simple la fonction

$$f(x) = \chi(x) e^{\lambda(x - iK')},$$

où je pose

$$\chi(x) = \frac{\mathrm{Al}'(x)}{\mathrm{Al}(x)} + iJ.$$

On a

$$\chi(iK' + \varepsilon) = \frac{\mathrm{Al}'(\varepsilon)_1}{\mathrm{Al}(\varepsilon)_1} = \frac{1}{\varepsilon} - A_0 \varepsilon - A_1 \varepsilon^3 - A_2 \varepsilon^5 - \ldots,$$

où à l'aide de la relation

$$D_x^2 \log \mathrm{Al}(x)_1 = -\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}$$

les coefficients seront donnés par la formule

$$A_i = \frac{s_i}{2i + 1}.$$

Nous pourrons ainsi écrire

$$f(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + H_0 + H_1 \varepsilon + H_2 \varepsilon^2 + \ldots,$$

où nous aurons

$$H_0 = \lambda$$

$$H_1 = - A_0 + \frac{\lambda^2}{\Gamma(3)}$$

$$H_2 = - A_0\lambda + \frac{\lambda^3}{\Gamma(4)}$$

$$H_3 = - A_1 - A_0\frac{\lambda^2}{\Gamma(3)} + \frac{\lambda^4}{\Gamma(5)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et en général

$$H_{2i} = - A_{i-1}\lambda - A_{i-2}\frac{\lambda^3}{\Gamma(4)} - A_{i-3}\frac{\lambda^5}{\Gamma(6)} - \ldots - A_0\frac{\lambda^{2i-1}}{\Gamma(2i)} + \frac{\lambda^{2i+1}}{\Gamma(2i+2)},$$

$$H_{2i+1} = - A_i - A_{i-1}\frac{\lambda^2}{\Gamma(3)} - A_{i-2}\frac{\lambda^4}{\Gamma(5)} - \ldots - A_0\frac{\lambda^{2i}}{\Gamma(2i+1)} + \frac{\lambda^{2i+2}}{\Gamma(2i+3)}.$$

D'après cela, si nous considérons la fonction

$$F(x) = -\frac{D_x^{2\nu-1}f(x)}{\Gamma(2\nu)} - h_1\frac{D_x^{2\nu-3}f(x)}{\Gamma(2\nu-2)} - \ldots - h_{\nu-1}D_xf(x) + Ce^{\lambda(x-iK')}$$

ou

$$F(x) = \frac{D_x^{2\nu-2}f(x)}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1\frac{D_x^{2\nu-4}f(x)}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1}f(x) + Ce^{\lambda(x-iK')}$$

suivant les cas de $n = 2\nu$ ou $n = 2\nu - 1$, et posons $x = iK' + \varepsilon$, la partie principale de son développement sera égale à celle de y.

$F(x)$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce de M. Mittag-Leffler avec les multiplicateurs

$$e^{2\lambda K}, \qquad e^{2\lambda iK'},$$

car

$$f(x + 2K) = e^{2\lambda K}f(x) - 2Je^{\lambda(x+2K)}$$

$$f(x + 2iK') = e^{2\lambda iK'}f(x) - 2iJ'e^{\lambda(x+2iK')}$$

d'où

$$f^{(r)}(x + 2K) = e^{2\lambda K}f^{(r)}(x) - 2\lambda^r Je^{\lambda(x+2K)}$$

$$f^{(r)}(x + 2iK') = e^{2\lambda iK'}f^{(r)}(x) - 2\lambda^r iJ'e^{\lambda(x+2iK')}$$

et par conséquent, en ayant égard à l'équation conditionnelle, à laquelle la quantité λ est soumise

$$F(x + 2K) = e^{2\lambda K} F(x),$$

$$F(x + 2iK') = e^{2\lambda i K'} F(x).$$

Cela posé, je dis que la fonction $F(x)$ sera une intégrale de l'équation de Lamé s'il est possible de déterminer les quantités C et λ de telle sorte que dans les développements des fonctions $F(x)$ et y, suivant les puissances croissantes de ε, non seulement, comme nous l'avons vu, les parties principales mais aussi les termes constants et les coefficients de ε^2 soient égaux, toutefois sans que l'équation conditionnelle cesse d'être satisfaite par λ.

En substituant $F(x)$ pour y dans le premier membre de l'équation de Lamé, nous obtiendrons en effet alors une fonction doublement périodique de seconde espèce de M. Mittag-Leffler —

$$D_x^2 F(x) - [n(n + 1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h] F(x),$$

dont les multiplicateurs seront

$$e^{2\lambda K}, \quad e^{2\lambda i K'}$$

et qui n'aura qu'un seul pôle $x = iK'$, auquel correspondra un développement de la forme

$$\frac{c_0}{\varepsilon} + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + \ldots.$$

L'équation conditionnelle de cette fonction sera ainsi

$$c_0 \lambda = 0,$$

d'où

$$c_0 = 0,$$

parce que nous ne nous occupons point des solutions doublement périodiques de première espèce, dont l'étude complète est donnée par M. Hermite au § 52. La fonction en question, n'ayant ainsi aucun pôle, sera de la forme $Ce^{\lambda x}$ et par conséquent, comme étant égal à zéro pour $x = iK'$, identiquement nul.

Posons, dans le cas de $n = 2\nu$, le terme constant du développement de $F(x)$,

$$-H_{2\nu-1} - h_1 H_{2\nu-3} - h_2 H_{2\nu-5} - \ldots - h_{\nu-1} H_1 + C$$

égal à h_ν et le coefficient de ε^2

$$-\nu(2\nu+1)H_{2\nu+1} - (\nu-1)(2\nu-1)h_1 H_{2\nu-1} - (\nu-2)(2\nu-3)h_2 H_{2\nu-3} - \ldots$$
$$\ldots - 2.5 h_{\nu-2} H_5 - 1.3 h_{\nu-1} H_3 + \frac{C}{2}\lambda^2$$

égal à $h_{\nu+1}$, et dans le cas de $n = 2\nu - 1$ le terme constant ainsi que le coefficient de ε^2, c'est-à-dire les expressions

$$H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + h_2 H_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1} H_0 + C,$$
$$\nu(2\nu-1)H_{2\nu} + (\nu-1)(2\nu-3)h_1 H_{2\nu-2} + (\nu-2)(2\nu-5)h_2 H_{2\nu-4} + \ldots$$
$$\ldots + h_{\nu-1} H_2 + \frac{C}{2}\lambda^2$$

égaux à zéro. Par cela nous obtenons d'abord pour $n = 2\nu$

$$C = H_{2\nu-1} + h_1 H_{2\nu-3} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 + h_\nu$$

et pour $n = 2\nu - 1$

$$C = -[H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + \ldots + h_{\nu-2} H_2 + h_{\nu-1} H_0]$$

et ensuite, en ayant égard aux expressions des H, la relation

$$\text{(A)} \qquad \lambda^{n+2} + (n+2)[ns_0 + (n-1)h_1]\lambda^n$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-2i+1)}(n+2)\Big[(n-i)s_i + \sum_{j=1}^{j=i}(n-i-j)s_{i-j}h_j$$
$$+ (n-2i-1)h_{i+1}\Big]\lambda^{n-2i} = 0,$$

où $N = \nu$ dans le premier cas et $N = \nu - 1$ dans le second. Cette relation doit être satisfaite par une racine λ de l'équation conditionnelle, si l'équation de Lamé est intégrée par une fonction du genre considéré.

A chaque racine commune λ de ces équations correspond une autre $-\lambda$, et comme chaque valeur de λ nous donne une intégrale particulière, il n'existe qu'une seule quantité λ^2, qui en même temps satisfait aux deux équations, et à celle correspondent les deux fonctions $F(x)$ et $F(-x)$, qui entrent dans l'intégrale générale de l'équation de LAMÉ

$$C_1F(x) + C_2F(-x).$$

Pour que cette équation différentielle ait une intégrale doublement périodique du genre considéré, il est donc nécessaire et suffisant que les équations (A) et

$$\lambda^{n-1} + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-2i)} h_i \lambda^{n-2i-1} = 0$$

soient satisfaites par une même valeur de λ^2.

En faisant les coefficients de ε dans les développements des fonctions $F(x)$ et y égaux nous obtenons une équation

$$\text{(B)} \qquad \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+2)} + \sum_{i=0}^{i=\nu-1} \frac{\lambda^{n-2i-1}}{\Gamma(n-2i)}\left(s_i + \sum_{j=1}^{j=i} h_j s_{i-j} + h_{i+1}\right) = 0,$$

qui est satisfaite par chaque racine λ^2 de l'équation conditionnelle. Par cette relation (B) nous pouvons simplifier l'équation (A) sans qu'elle cesse de jouer le rôle en question. Désignons par a et b les membres gauches des équations (A) et (B); la formule

$$b\lambda - \frac{\Gamma(n+3)}{n+1} a = 0$$

donnera en effet l'équation

$$\text{(A')} \qquad \frac{\lambda^{n+2}}{\Gamma(n+3)} + h_1 \frac{\lambda^n}{\Gamma(n+1)}$$

$$-\sum_{i=1}^{i=N} \frac{\lambda^{n-2i}}{\Gamma(n-2i+1)}\left(is_i + \sum_{j=1}^{j=i-1} (i-j) h_j s_{i-j} - h_{i+1}\right) = 0,$$

où les coefficients des $\dfrac{\lambda^{n-2i}}{\Gamma(n-2i+1)}$, ne dépendant que par les quantités h de la valeur n, se laissent calculer plus facilement que ceux de l'équation (A).

Applications. Parce qu'il n'existe aucune fonction doublement périodique de seconde espèce de M. MITTAG-LEFFLER, dont le pôle unique soit d'ordre inférieur au troisième, l'équation de LAMÉ ne peut être du genre spécial étudié ci-dessus que pour $n \geqq 3$.

I. Considérons en premier lieu le cas de $n = 3$. On a

$$h_1 = -\frac{h + 4(1 + k^2)}{10}$$

$$h_2 = \frac{5}{6} h_1^2 - s_1.$$

L'équation conditionnelle de λ est

$$\lambda^2 + 2h_1 = 0$$

et celle que nous avons désignée par (A′)

$$\frac{\lambda^5}{\Gamma(6)} + h_1 \frac{\lambda^3}{\Gamma(4)} + (h_2 - s_1)\lambda = 0.$$

Si

$$h_1^2 = \frac{1}{4}(1 - k^2 + k^4)$$

le membre gauche de la dernière équation est divisible par $\lambda^2 + 2h_1$. Les seules équations de LAMÉ du genre considéré au cas de $n = 3$ sont ainsi

$$y'' - \left[12k^2 \operatorname{sn}^2 x - 4(1 + k^2) + 5\sqrt{1 - k^2 + k^4}\right] y = 0$$

et

$$y'' - \left[12k^2 \operatorname{sn}^2 x - 4(1 + k^2) - 5\sqrt{1 - k^2 + k^4}\right] y = 0,$$

où $\sqrt{1 - k^2 + k^4}$ désigne la racine positive.

Pour la première, la fonction $F(x)$, qui entre dans l'intégrale générale

$$C_1 F(x) + C_2 F(-x),$$

est

$$F(x) = \frac{D_x^2 f(x)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - k^2 + k^4}\, f(x) + Ce^{\lambda(x - iK')},$$

où

$$\lambda = \sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}$$

$$C = \frac{1}{6}\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}\left[2(1 + k^2) - \sqrt{1 - k^2 + k^4} + 3\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}\right],$$

et pour la seconde équation

$$F(x) = \frac{D_x^2 f(x)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - k^2 + k^4}f(x) + Ce^{\lambda(x - iK')},$$

où

$$\lambda = i\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}$$

$$C = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - k^2 + k^4} + \frac{i}{6}\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}\left[2(1 + k^2) + \sqrt{1 - k^2 + k^4}\right].$$

Dans ces formules le radical $\sqrt{1 - k^2 + k^4}$ a la valeur nommée et $\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}$ désigne la racine quatrième réelle et positive.

II. Dans le cas de $n = 4$ on a

$$h_1 = -\frac{h}{14} + \frac{10}{21}(1 + k^2)$$

$$h_2 = \frac{7}{10}h_1^2 - s_1$$

$$h_3 = \frac{49}{90}h_1^3 - \frac{17h_1s_1 + 10s_2}{9}.$$

Les deux équations caractéristiques sont

$$\frac{\lambda^2}{\Gamma(4)} + h_1\lambda = 0$$

$$\frac{\lambda^6}{\Gamma(7)} + h_1\frac{\lambda^4}{\Gamma(5)} + (h_2 - s_1)\frac{\lambda^2}{\Gamma(3)} + h_3 - h_1s_1 - 2s_2 = 0,$$

elles ont une racine λ^2 commune si

$$h_1^3 - \frac{35}{4}h_1s_1 + \frac{35}{4}s_2 = 0.$$

Nous obtenons trois valeurs distinctes pour h et ainsi trois équations de Lamé du genre considéré, dont les intégrales auront la forme

$$F(x) = -\frac{D_x^3 f(x)}{6} - h_1 D_x f(x) + Ce^{\lambda(x - iK')}$$

où

$$\lambda = \pm\sqrt{-6h_1}$$

$$C = -\frac{4}{5}h_1^2 + 2h_1 s_0 - \frac{4}{3}s_1.$$

ACTA MATHEMATICA

INHALTSVERZEICHNISS DER BÄNDE | TABLE DES MATIÈRES DES TOMES

1—10

BEARBEITET VON | COMPOSÉE PAR

G. ENESTRÖM.

ÜBERSICHT. — SOMMAIRE.

ACTA MATHEMATICA.

1, **1882/1883** [(8) + **399** p. + pl. + portr.].	**6**, **1885** [(3) + **416** p.].
2, **1883** [(4) + **429** p. + **4** pl.].	**7**, **1885/1886** [(6) + VI + **392** p. + portr.].
3, **1883/1884** [(4) + **380** + (1) p.].	**8**, **1886** [(4) + **392** p.].
4, **1884** [(3) + **416** p.].	**9**, **1886/1887** [(4) + **400** p.].
5, **1884/1885** [(4) + **408** p. + **2** pl.].	**10**, **1887** [(4) + **397** p.].

Aux tomes **4—7** ont été jointes, comme Appendice, les années 1884 et 1885 de la Bibliotheca Mathematica* rédigée par G. Eneström [1884: (2) p. + 124 col.; 1885: (3) p. + 200 col.].

[Notices sur le journal:] *Roma,* Accad. d. Lincei, Transunti **7**$_3$, 1883, 104. (F. Casorati.) — *Torino,* Accad. d. sc., Atti **18**, 1883, 243—244. (E. d'Ovidio.) — *Milano,* Istituto Lombardo, Rendiconti **16**$_2$, 1883, 3—4. (F. Brioschi). — *Venezia,* Istituto Veneto, Atti **1**$_6$, 1883, 435—436. (E. Beltrami.) — *Paris,* Acad. d. sc., Comptes rendus **95**, 1882, 1339. (Ch. Hermite.) — Bullet. d. sc. mathém. **7**$_2$, 1883, 130. (J. T[annery].) — *Leipzig,* Astronom. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **18**, 1883, 60. (H. Bruns.) — *Berlin,* Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. 1883, 933—934. (K. Weierstrass.) — *Göttingen,* Gesellsch. d. Wissensch., Nachrichten 1884, 508—509. (E. Schering.) — *Kjöbenhavn,* Vidensk. Selsk., Oversigt 1882, (55)—(56). (H. G. Zeuthen.) — Tidsskrift for Mathematik **6**$_4$, 1882, 187—192. (H. G. Zeuthen) — *Christiania,* Vidensk. Selsk., Oversigt 1883, 4—9. (C. A. Bjerknes.) — Finsk Tidsskrift (Helsingfors) **14**, 1883, 382—385. (Hj. Mellin.) — Ny svensk Tidskrift (Lund) 1883, 80—83. (K. W[ickse]ll.) — Nordisk Revy (Upsala), Profnummer 1883, 13—14. (A. Söderblom.) — Nordisk Tidskrift (Stockholm) 1882, 613—618. (G. Eneström.) — [Analyse des tomes **1—3**:] Bullet. d. sc. mathém. **8**$_2$, 1884; Revue 136—171 (J. T[annery]); **11**$_2$, 1887; Revue 137—149 (G. K.). — [Tables des matières des tomes **1—7**, **9**:] Archiv. der Mathem. **69**, 1883, Litter. Ber. 30; **70**, 1884, Litter. Ber. 11, 46; **1**$_2$, 1884, Litter. Ber. 25—26; **2**$_2$, 1885, Litter. Ber. 13—14, 38—39; **3**$_2$, 1885, Litter. Ber. 24; **4**$_2$, 1886, Litter. Ber. 36; **5**$_2$, 1887, Litter. Ber. 34. (H.)

---

* L'année 1886 de cette revue bibliographique a paru séparément, mais à prix de souscription réduit pour les abonnés aux Acta Mathematica.

Le cahier **1**:1 a paru en décembre 1882, le cahier **10**:4 le 30 novembre 1887. Les dix tomes publiés ont contenu en tout 162 mémoires ou notes dont 95 (embrassant 2382 pages) sont rédigés en français, 66 (embrassant 1561 pages) en allemand et 1 (embrassant 36 pages) en anglais.

La répartition des auteurs d'après leur nationalité donne pour résultat la table suivante:

	nombre d'auteurs	nombre de mémoires	nombre de pages	%
suédois	11	19	510	12,8
norvégiens	2	2	56	1,4
danois	4	5	137	3,4
finlandais	3	8	133	3,3
français	16	42½	1594	40,1
allemands	28	64½	1220	30,7
italiens	4	6	92	2,3
suisses	2	2	88	2,2
russes	3	4	45	1,1
néerlandais	1	5	38	1,0
américain	1	1	36	0,9
belge	1	2	28	0,7
autrichien	1	1	2	0,1
Total	**77**	**162**	**3979**	100,0

I. Alphabetisches Register. — Table alphabétique.

APPELL, PAUL EMILE.

Né à Strasbourg (département du Bas-Rhin) en France le 27 septembre 1855, répétiteur à l'école des hautes études 1876—1877, maître de conférences à la faculté des sciences de Paris 1877—1879, chargé de cours à la faculté des sciences de Dijon 1879—1881, maître de conférences à l'école normale de Paris 1881—1885, professeur de mécanique rationnelle à la faculté des sciences de Paris depuis 1885.

Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y).
1, 109—131, 132—144.

Deux mémoires. — Plusieurs des résultats contenus dans ces mémoires ont été exposés dans les notes *Sur les fonctions uniformes d'un point analytique; Sur les fonctions doublement périodiques à points singuliers essentiels; Théorèmes sur les fonctions d'un point analytique* insérées aux Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **94**, 1882, 700—703, 936—938; **95**, 1882, 624—626. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 333. (H[AMBURGE]R.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 138—142. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 880—881.

Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle.
1, 145—152.

Comparez la note: *Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercles* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **94**, 1882, 1238—1240). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 323—324. (D[YC]K.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 142—143. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 881. — L'auteur a étendu les résultats contenus dans ce mémoire dans deux articles: *Sur certains développements en séries de puissances* (Bullet. de la soc. mathém. de France **11**, 1883, 65—69) et *Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercles* (Mathem. Ann. **21**, 1883, 118—125).

Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes. **2**, 71—80.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 357—358. (D[YC]K.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 155—156. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 883.

APPELL, PAUL EMILE.

Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle $\Delta F = 0$. **4**, 313—374.

Comparez la note *Sur les fonctions satisfaisant à l'équation* $\Delta F = 0$ (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **96**, 1883, 368—371). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 373—374. (M[ÜLLER].)

Sur quelques applications de la fonction $Z(x, y, z)$ à la Physique mathématique. **8**, 265—294.

Comparez les notes *Sur la distribution du potentiel dans des masses liquides limitées par des faces planes* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **98**, 1884, 214—216) et *Sur la distribution du potentiel dans une masse liquide ayant la forme d'un prisme rectangulaire indéfini* (L. c. **98**, 1884, 358—360; en commun avec M. CHERVET). — L'auteur a poursuivi ces études dans un mémoire: *Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation* $\Delta F = 0$ (Journ. de mathém. $\mathbf{3}_4$, 1887, 5—52).

BELTRAMI, EUGENIO.

Né à Cremona en Italie le 16 novembre 1835, professeur extraordinaire à l'université de Bologna en 1862, ensuite professeur ordinaire à Pisa en 1863, à Bologna en 1866 et à Roma en 1873, professeur de physique mathématique à l'université de Pavia depuis 1876.

Sur les couches de niveau électromagnétiques. **3**, 141—152.

Exposition très simplifiée de plusieurs théorèmes que l'auteur avait fait paraître dans des travaux antérieurs. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 1005—1006. (L[OR]B[ER]G.) — Beiblätter zu den Annalen der Physik **8**, 1884, 398—399. — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887; Revue 142—143. (G. K.)

BENDIXSON, IVAR.

Né à Stockholm le 1 août 1861, licencié ès sciences en 1881, chargé de conférences à l'université de Stockholm 1884—1885.

Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points. **2**, 415—429.

Ce memoire se rattache à l'ouvrage de M. G. CANTOR: *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Leipzig 1883, 8°). — Comparez la note: *Några studier öfver oändliga punktmängder* (Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlingar **40**, 1883, n° *2*: 31—35). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 455. (SCH[LE]G[EL].)

Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss. **9**, 1—34.

Quelques-uns des résultats contenus dans ce mémoire ont été indiqués dans

BENDIXSON, IVAR.

deux notes *Sur la formule d'interpolation de Lagrange* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **101**, 1885, 1050—1053, 1129—1131. — Corrections à la suite de la table des matières du tome **9**.

BERGER, ALEXANDER FREDRIK.

Né à Nysund (Vermland) en Suède le 30 juin 1844, maître de conférences à l'université d'Upsala depuis 1875.

Déduction de quelques formules analytiques d'un théorème élémentaire de la théorie des nombres. **9**, 301—320.

BERTRAND, JOSEPH LOUIS FRANÇOIS.

Né à Paris le 11 mars 1822, ingénieur des mines en 1842, professeur titulaire de physique générale et mathématique au Collége de France en 1862, sécrétaire perpétuel de l'académie des sciences de Paris depuis 1874.

Sur les unités électriques. **8**, 387—392.

Comparez la note de l'auteur *Sur les unités électriques* (Bulletin d. sc. mathém. 7_2, 1883, 72—85).

BJERKNES, CARL ANTON.

Né à Christiania le 24 octobre 1825, sous-chef des mines à Kongsberg, plus tard professeur au lycée de la même ville 1848—1854, professeur de mathématiques à l'université de Christiania depuis 1863.

Recherches hydrodynamiques. PREMIER MÉMOIRE. **Les équations hydrodynamiques et les relations supplémentaires.** **4**, 121—170.

Ce mémoire commence l'exposition systématique des recherches auxquelles se rapportent un très grand nombre de mémoires et de notes publiées précédemment par l'auteur dans différents recueils. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 823—827. (W[ANGERIN].)

BOHLIN, KARL PETRUS THEODOR.

Né à Stockholm le 30 octobre 1860, assistant à l'observatoire de Stockholm depuis 1884, maître de conférences d'astronomie à l'université d'Upsala en 1886.

Über die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme. **10**, 109—130.

Ces recherches ont été publiées aussi, sous une forme un peu différente, dans le mémoire *Om betydelsen af lefvande kraftens princip för frågan om dynamiska systems stabilitet* inséré dans le Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar **13** afd. I, n° 1, 1887.

BOURGUET, JEAN PIERRE LOUIS.

Né à Virac (Tarn) en France le 1 novembre 1833, professeur de mathématiques à Paris.

Note sur les intégrales eulériennes. **1**, 295—296.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 233—234. (H[OPPE].) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 148. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 881.

Sur quelques intégrales définies. **1**, 363—367.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 233—234. (H[OPPE].)

Sur les intégrales eulériennes et quelques autres fonctions uniformes. **2**, 261—295.

Extrait, en partie remanié, du mémoire: *Développement en séries des intégrales Eulériennes* (Annales de l'éc. normale [de Paris] 10_2, 1881, 175—232. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 230—232. (H[OPPE].) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 160—161. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 885.

Sur la fonction eulérienne. **2**, 296—298.

Réimpression d'une note insérée dans les Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **96**, 1883, 1307—1310. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 232. (H[OPPE].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 885.

CANTOR, GEORG FERDINAND LOUIS PHILIPPE.

Né à S:t Pétersbourg le 3 mars 1845, maître de conférences à l'université de Halle en 1869, professeur extraordinaire à la même université en 1872, professeur ordinaire depuis 1879.

Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels. **2**, 305—310.

Traduction du mémoire: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen* (Journ. für Mathem. **77**, 1874, 258—263.)

Une contribution à la théorie des ensembles. **2**, 311—328.

Traduction du mémoire: *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* (Journ. für Mathem. **84**, 1877, 242—259).

Sur les séries trigonométriques. **2**, 329—335.

Traduction du mémoire: *Über trigonometrische Reihen* (Mathem. Ann. **4**, 1871, 139—143).

Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques. **2**, 336—348.

Traduction du mémoire: *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (Mathem. Ann. **5**, 1872, 123—132).

CANTOR, GEORG FERDINAND LOUIS PHILIPPE.

Sur les ensembles infinis et linéaires de points. I—IV. **2**, 349—380.

Traduction de quatre mémoires: *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (Mathem. Ann. **15**, 1879, 1—8; **17**, 1880, 355—358; **20**, 1882, 113—122; **21**, 1883, 51—59).

Fondements d'une théorie générale des ensembles. **2**, 381—408.

Extrait, en partie remanié, d'un mémoire: *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (Mathem. Ann. **21**, 1883, 545—591). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 453—455. (SCH[LE]G[EL].) — Une analyse des résultats contenus dans ce mémoire et dans les précédents a été donnée par M. J. T[ANNERY] dans le Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 162—171.

Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à N dimensions. Première communication. **2**, 409—414.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 453—455. (SCH[LE]G[EL].)

De la puissance des ensembles parfaits de points. **4**, 381—392.

Plusieurs des résultats exposés dans ce mémoire se trouvent aussi dans la note *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, n° 6 (Mathem. Ann. **23**, 1884, 453—488.) — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 460. (ST[OLZ].)

Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punctmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. Zweite Mittheilung. **7**, 105—124.

Aux mémoires précédents de M. CANTOR se rattachent des recherches de MM. BENDIXSON, MITTAG-LEFFLER, PHRAGMÉN et SCHEEFFER publiées dans les Acta Mathematica. Des analyses détaillées ont été données par M. KERRY dans l'article: *Über G. Cantors Mannigfaltigkeitsuntersuchungen* (Vierteljahrsschr. f. wissensch. Philosophie **9**, 1885, 191—232) et M. GUTBERLET dans la première partie du mémoire: *Das Problem des Unendlichen* (Zeitschr. f. Philosophie und philos. Kritik **88**, 1886, 179—195).

CASORATI, FELICE.

Né à Pavia en Italie le 17 décembre 1835, professeur à l'université de Pavia depuis 1857.

Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes. **8**, 345—359.

Réimpression, corrigée par l'auteur, d'une brochure imprimée à Milano en 1885. — Les premières recherches sur ce sujet se trouvent dans les notes *Sur les fonctions à périodes multiples* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **57**, 1863, 1018—1020; **58**, 1864, 127—131, 204—207.)

duBOIS-REYMOND, PAUL.

Über den Begriff der Länge einer Curve. Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Ludwig Scheeffer über Rectification der Curven. 6, 167—168.

Le mémoire de SCHEEFFER dont il s'agit, est inséré au tome **4**, p. 49—82.

ELLIOT, VICTOR ZÉPHIRIN.

Né à Guise (Aisne) en France le 27 mars 1847, professeur à la faculté des sciences de Besançon depuis 1879.

Sur une équation linéaire du second ordre à coefficients doublement périodiques. 2, 233—260.

Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 281—282. (H[AMBURGE]R.) — Bullet. d. sc. mathém. **8**$_2$, 1884; Revue 159—160. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 884.

FALK, MATTHS.

Né à Eskilstuna en Suède le 19 septembre 1841, maître de conférences à l'université d'Upsala en 1869, professeur au lycée de Skara en 1876 et au lycée d'Upsala depuis 1877.

Beweis eines Satzes aus der Theorie der elliptischen Functionen. 7, 197—200.

FIEDLER, OTTO WILHELM.

Né à Chemnitz (Sachsen) en Allemagne le 3 avril 1832, professeur à l'école polytechnique de Prag en 1864, à l'école polytechnique de Zürich depuis 1867.

Über die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen. 5, 331—408.

Avec 2 planches. — Quelques-uns des résultats exposés dans ce mémoire ont été publiés par l'auteur dans l'ouvrage *Cyclographie* (Leipzig 1882, 8°) p. 237 et suiv., et dans une note: *Zu zwei Steiner'schen Abhandlungen* insérée dans la Vierteljahrsschr. der naturf. Gesellsch. in Zürich **28**, 1883, 409—418. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 521. (H[AUC]K.) — Quelques détails du mémoire ont été développés dans les *Geometrische Mittheilungen* VII, VIII (Vierteljahrsschr. der naturf. Gesellsch. in Zürich **29**, 1884, 343—358.

FUCHS, LAZARUS.

Né à Moschin (Posen) en Allemagne le 5 mai 1833, maître de conférences à l'université de Berlin en 1865, professeur extraordinaire à la même université en 1866, professeur ordinaire à l'université de Greifswald en 1869, à l'université de Göttingen en 1874, à l'université de Heidelberg en 1875, professeur à l'université de Berlin depuis 1884.

Über lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen. 1, 321—362.

FUCHS, LAZARUS.

Les résultats contenus dans ce mémoire ont été exposés dans une note avec le même titre insérée dans les Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften 1882, 703—710. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **14** (1882), 242—243. (H[AMBURGE]R.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 150—151. (J. T[ANNERY].)

Sur un développement en fraction continue.
Voir HERMITE.

GOURSAT, EDOUARD.

Né à Lanzac (département du Lot) en France le 21 mai 1858, chargé de conférences à la Sorbonne en 1879, chargé de cours à la faculté des sciences de Toulouse en 1881, maître de conférences à l'école normale de Paris depuis 1885.

Sur un théorème de M. Hermite. **1**, 189—192.

Le théorème en question se rapporte aux intégrales définies affectées de coupures; voir le mémoire de M. HERMITE: *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (Journ. für Mathem. **91**, 1881, 54—78.) — Cf. la note *Sur quelques intégrales doubles* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **96**, 1883, 1304—1307). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1884), 220. (H[OPPE].)

Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies. **2**, 1—70.

Avec 4 planches. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 243—246. (H[AMBURGE]R.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 152—155. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 882—883.

Démonstration du théorème de Cauchy. **4**, 197—200.

Cette note a aussi été publiée dans le Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar **9**, 1885, n° 5. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 236. (ST[OLZ].)

Sur une classe d'intégrales doubles. **5**, 97—120.

Ce mémoire se rapporte à une question soulevée par M. HERMITE dans le mémoire *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (Journ. für Mathem. **91**, 1881, 77). — Les résultats ont été résumés dans la note *Sur quelques intégrales doubles* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **96**, 1883, 1304—1307).

GYLDÉN, JOHAN AUGUST HUGO.

Né à Helsingfors en Finlande le 29 mai 1841, maître de conférences d'astronomie à l'université de Helsingfors en 1862, astronome adjoint à l'observatoire de Poulkowa en 1863, astronome titulaire au même observatoire en 1865, directeur de l'observatoire de Stockholm depuis 1871.

GYLDÉN, JOHAN AUGUST HUGO.

Eine Annäherungsmethode im Probleme der drei Körper. **1**, 77—92.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **14** (1882), 925—926. (B[RUNS].) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 136—138. (J. T[ANNERY].) — Beiblätter zu den Annalen der Physik **8**, 1884, 169. (W. H.)

Die intermediäre Bahn des Mondes. **7**, 125—172.

Untersuchungen über die Convergenz der Reihen welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden. **9**, 185—294.

HACKS, JACOB.

Né à Süchteln (Rheinprovinz) en Allemagne le 6 juin 1863, docteur ès sciences en 1887.

Einige Sätze über Summen von Divisoren. **9**, 177—181.

Über Summen von grössten Ganzen. **10**, 1—52.

Correction à la suite de la table des matières du tome **10**. — Ce mémoire a été présenté en 1887 à la faculté des sciences de Bonn pour obtenir le grade de doctorat.

HALPHEN, GEORGES HENRI.

Né à Rouen en France le 30 octobre 1844, membre de l'Institut de France, chef d'esquadron d'artillerie.

Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre. **3**, 325—380.

Une partie de ces recherches est exposée déjà dans le mémoire *Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables* (Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'Institut de France **28** n° 1, 1883). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 266—269. (H[AMBURGE]R.) — Bullet. d. sc. mathém. 11_2, 1887; Revue 146—149. (G. K.)

HERMITE, CHARLES.

Né à Dieuze (Lorraine) en France le 24 décembre 1822, membre de l'Institut de France en 1856, professeur à l'école polytechnique de Paris en 1867, professeur à la faculté des sciences de Paris depuis 1869.

Sur une relation donnée par M. Cayley, dans la théorie des fonctions elliptiques. **1**, 368—370.

Cette relation a été donnée par M. CAYLEY dans la note: *A theorem in elliptic functions* (Proceedings of the London mathem. society **10**, 1879, 43—48); comparez l'analyse de cette note dans le Bullet. d. sc. mathém. 6_2, 1882; Revue 215. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15**

HERMITE, CHARLES.

(1883), 386—387. (M[ÜLLER].) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{8}_2$, 1884; Revue 151. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques 4 (1883), 882.

Sur quelques points dans la théorie des nombres. **2**, 299—304.

En commun avec M. **R. Lipschitz** (note de M. HERMITE: p. 299—300, note de M. LIPSCHITZ: p. 301—304.) — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15**, 1883, 136. (S[IMO]N.) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{8}_2$, 1884; Revue 161. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques 4 (1883), 885.

Sur un développement en fraction continue. **4**, 89—92.

En commun avec M. **L. Fuchs** (note de M. HERMITE: p. 89—90, note de M. FUCHS: p. 91—92). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 169—170. (G[ÜNTHE]R.)

Sur l'usage des produits infinis dans la théorie des fonctions elliptiques. **4**, 193—196.

En commun avec M. **R. Lipschitz** (note de M. HERMITE: p. 193, note de M. LIPSCHITZ: p. 194—196). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 407. (M[ÜLLER].)

Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques. **5**, 297—330.

Correction à la suite de la table des matières du tome **8**. — Réimpression, revue par l'auteur, d'un mémoire publié dans le Bulletin de l'académie des sciences de S:t Pétersbourg **29**, 1884, 325—352. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 423—424. (M[ÜLLER].)

HILL, GEORGE WILLIAM.

Né à NewYork, U. S. A. le 3 mars 1838, assistant au bureau de l'»American Ephemeris» à Washington depuis 1861.

On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. **8**, 1—36.

Correction à la suite de la table des matières du tome **8**. — Réimpression, revue par l'auteur, d'un mémoire publié à Cambridge, Mass. en 1877. — Comparez le discours de M. GLAISHER: *Address on presenting the gold medal of the [royal astronomical] society to Mr G. W. Hill* (Monthly notices of the royal astronomical society of London **47**, 1887, 203—220).

HOLST, ELLING BOLT.

Né à Drammen en Norvège le 19 juillet 1849, maître de conférences (stipendiat) à l'université de Christiania depuis 1876.

HOLST, ELLING BOLT.

Beweis des Satzes dass eine jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat. **8**, 155—160.

Traduction de la note: *Bevis for at enhver algebraisk Ligning har Rod,* insérée dans les Forhandlinger i Videnskabs-Selbskabet i Christiania Aar 1886 (N° 1, 8 pages). — Comparez la note de M. LORIA dans le tome **9**, p. 71—72.

HUMBERT, GEORGES.

Né à Paris le 7 janvier 1859, ingénieur des mines en 1879, répétiteur à l'école polytechnique de Paris depuis 1884.

Sur les intégrales algébriques de différentielles algébriques. **10**, 281—298.

KOBB, GUSTAF.

Né à Göteborg en Suède le 25 juillet 1863, licencié ès sciences en 1885, chargé de conférences à l'université de Stockholm 1887.

Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution. **10**, 89—108.

Ce mémoire est en partie une traduction de la note *Om integrationen af differentialeqvationerna för en materiel punkts rörelse på en rotationsyta* (Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlingar **44**, 1887, 159—163). Comparez aussi la note: *Om integrationen af differentialeqvationerna för en tung partikels rörelse på en rotationsyta med vertikal axel* (L. c. **43**, 1886, 367—373).

KOENIGS, GABRIEL.

Né à Toulouse (Haute-Garonne) en France le 17 janvier 1858, sous-bibliothécaire à l'école normale de Paris en 1882, professeur de mécanique à la faculté des sciences de Besançon en 1883, professeur d'analyse à la faculté des sciences de Toulouse en 1885, maître de conférences à l'école normale de Paris depuis 1886.

Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments. **10**, 313—338.

Ces recherches ont été l'objet de deux notes *Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systemes d'éléments* insérées dans les Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **104**, 1887, 673—675, 842—844.

KÖNIGSBERGER, LEO.

Né à Posen en Allemagne le 15 octobre 1837, professeur à l'école militaire de Berlin en 1860, professeur extraordinaire à l'université de Greifswald en 1864, professeur ordinaire à la

LECORNU, LÉON FRANÇOIS ALFRED.

Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers. **10**, 201—280.

Résumé d'un mémoire manuscrit auquel l'académie des sciences de Paris a décerné en 1886 une mention honorable.

LE PAIGE, CONSTANTIN.

Né à Liége en Belgique le 9 mars 1852, chargé de cours à l'université de Liége en 1876, professeur extraordinaire à la même université en 1882, professeur ordinaire d'analyse et de géométrie depuis 1885.

Sur les surfaces du troisième ordre. **3**, 181—200.

Corrections à la fin du tome **3**. — Les résultats contenus dans ce mémoire ont été énoncés dans deux notes *Sur les surfaces du troisième ordre* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **97**, 1883, 34—36, 158—159, et dans un memoire *Sur les surfaces du troisième ordre* (Verslagen en mededeelingen der akademie van wetenschappen [Amsterdam]; Afd. Natuurkunde **19**, 1884, 328—348). — [Analyse:] Jornal de sciencias mathematicas **5**, 1884, 74. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 583—584. (A[ugust].)

Nouvelles recherches sur les surfaces du troisième ordre. **5**, 195—202.

Les résultats contenus dans ce travail ont été exposés sommairement dans la note *Sur les surfaces du troisième ordre* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **98**, 1884, 971—972), et développés dans la note *Sur les groupes de points en involution marqués sur une surface* (L. c. **99**, 1884, 534—538), ainsi que dans deux mémoires: *Sur la génération de certaines surfaces par des faisceaux quadrilinéaires* (Bulletin de l'académie royale de Belgique 8_3, 1884, 238—255) et *Sur la forme quadrilinéaire et les surfaces du troisième ordre* (L. c. 8_3, 1884, 555—563). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 585. (A[ugust].) — Bullet. d. sc. mathém. 11_2, 1887; Revue 143—144. (G. K.)

LERCH, MATYÁŠ.

Né à Milínov (département du Susice) en Bohême le 20 février 1860, maître de conférences à l'école polytechnique tchèque de Prag depuis 1886.

Un théorème de la théorie des séries. **10**, 87—88.

LINDELÖF, LORENS LEONARD.

Né à Karvia en Finlande le 13 novembre 1827, maître de conférences d'astronomie à l'université de Helsingfors en 1855, professeur de mathématiques à la même université en 1857, directeur en chef de l'administration centrale des établissements d'instruction en Finlande en 1874.

LINDELÖF, LORENZ LEONARD.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 175. (L[AZARU]S.) Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887; Revue 140. (G. K.) — Les résultats de ce mémoire ont été utilisés par l'auteur dans un mémoire: *Statistiska beräkningar angående finska civilstatens enke- och pupillkassa* (Acta soc. scient. Fennicæ **14**, 1885, 1—83).

LINDSTEDT, ANDERS.

Né à Sundborn (Dalarne) en Suède le 27 juin 1854, maître de conférences d'astronomie à l'université de Lund en 1877, astronome adjoint à l'université de Dorpat en 1879, professeur à la même université en 1883, professeur à l'école polytechnique de Stockholm depuis 1886.

Le théorème dont il s'agit a été énoncé par M. TISSERAND dans la note *Sur un théorème de M. A. Lindstedt concernant le problème des trois corps* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **98**, 1884, 1207—1213) et dans les Annales de l'observatoire de Paris; Mémoires tome **18**, 1885.

LIPSCHITZ, RUDOLPH OTTO SIGISMUND.

Né à Königsberg en Allemagne le 14 mai 1832, maître de conférences à l'université de Bonn en 1857, professeur à l'université de Breslau en 1862, à l'université de Bonn depuis 1864.

Voir HERMITE.

Voir HERMITE.

Sur une formule de la théorie des fonctions ϑ. Corrections à la suite de la table matières du tome **7**.

Ce mémoire se rattache aux mémoires suivants de l'auteur: *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften* (Sitzungsber. der preuss. Akad. d. Wissensch. 1882, 1077—1087; 1883, 169—188); *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements* (L. c. 1883, 541—560).

LORIA, GINO.

Né à Mantova en Italie le 19 mai 1862, maître de conférences à l'université de Torino en 1886, professeur de géométrie supérieure à l'université de Genova depuis 1887.

Sur une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. **9**, 71—72.

Comparez le mémoire de M. Holst, inséré dans le tome **8**, p. 155—160.

MALMSTEN, CARL JOHAN.

Né à Uddetorp (Vestergötland) en Suède le 9 avril 1814, maître de conférences à l'université d'Upsala en 1840, professeur de mathématiques à la même université en 1842, membre du ministère suédois en 1859, gouverneur de la province de Skaraborg en 1866. Mort à Upsala le 11 février 1886.

Zur Theorie der Leibrenten. **1**, 63—76.

Les pages 75—76 contiennent une »Nachschrift» de M. E. Schering. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **14** (1882), 169. (L[azaru]s.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 136. (J. T[annery].)

Sur la formule

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2} . \Delta u'_x + \frac{B_1 . h^2}{1 . 2} . \Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1 . 2 . 3 . 4} . \Delta u^{IV}_x + \text{etc.}$$

5, 1—46.

Réimpression, corrigée par l'auteur, d'un mémoire publié dans le Journ. für Mathem. **35**, 1847, 55—82. L'original suédois dont ce mémoire est une traduction a paru sous le titre: *Om den Eulerska formeln* $hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2} \Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1 . 2} \Delta u''_x + (!) \frac{B_2 h^4}{1 \ldots 4} \Delta u^{IV}_x$ — &c. dans les Vetenskapsakademiens handlingar 1844 (Stockholm, in-8°), 363—406. Les résultats ont été résumés dans plusieurs ouvrages, tout dernièrement encore dans l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable par* J. Tannery (Paris, Hermann 1886, in-8°), 352—363. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 203—205. (H[oppe].)

MARKOFF, ANDRÉ.

Né à Riazan en Russie le 2 juin 1856, professeur à l'université de S:t Pétersbourg depuis 1886.

Sur une question de maximum et de minimum proposée par M. Tchebycheff. **9**, 57—70.

Comparez l'*Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite* publié dans les Annales de l'école normale [de Paris] 3_3, 1886, 81—88. — La question dont il s'agit a été proposée par M. Tchebycheff dans la note *Sur les valeurs limites des intégrales* (Journ. de mathém. 19_2, 1874, 157—160).

MATTHIESSEN, LUDWIG.

Né à Fissau (Fürstenthum Lübeck) en Allemagne le 22 septembre 1830, maître de conférences à l'université de Kiel en 1857, sous-recteur au lycée de Husum en 1864, professeur ordinaire de physique à l'université de Rostock depuis 1874.

Untersuchungen über die Lage der Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels gegeneinander und gegen einen Hauptstrahl. **4**, 177—192.

Les résultats de ce mémoire ont été publiés aussi, sous une forme un peu différente, dans l'article: *Neue Untersuchungen über die Lage der Brennlinien unendlich dünner copulirter Strahlenbündel gegen einander und gegen einen Hauptstrahl* (Zeitschr. für Mathem. u. Phys. **29**, 1884; Supplement 86—100. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 934—935. (W[ANGERIN].) — Beiblätter zu den Annalen der Physik **8**, 1884, 580—581. (F.)

MELLIN, ROBERT HJALMAR.

Né à Törnävä (Österbotten) en Finlande le 19 juin 1854, maître de conférences à l'université de Helsingfors en 1884, professeur à l'école polytechnique de Helsingfors depuis 1884.

Über die transcendente Function $Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$. **2**, 231—232.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 371—372. (M[ÜLLER].) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{8}_2$, 1884; Revue 159. (J. T[ANNERY].)

Eine Verallgemeinerung der Gleichung

$$\Gamma(1 + x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$ **3**, 102—104.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 233. (H[OPPE].) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887; Revue 140. (G. K.)

Über gewisse durch die Gammafunction ausdrückbare unendliche Producte. **3**, 322—324.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 395—396. (H[OPPE].) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887; Revue 146. (G. K.)

Zur Theorie der Gammafunction. **8**, 37—80.

Les resultats de ce mémoire ont été exposés préalablement dans deux mémoires avec le titre: *Om en ny klass af transcendenta funktioner hvilka äro nära beslägtade med gammafunktionen* (Acta societatis scientiarum Fennicæ **14**, 1885; **15**, 1886).

Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen. **9**, 137—166.

Ce mémoire se rattache au travail précédent.

MINKOWSKI, HERMANN.

Né à Alexoten en Russie le 21 juin 1864, maître de conférences à l'université de Bonn depuis 1886.

Untersuchungen über quadratische Formen. I. Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält. **7**, 201—258.

Ce mémoire a été présenté par l'auteur, en 1885, à l'université de Königsberg i/Pr. pour obtenir le grade de doctorat. — Au mémoire se rattachent les recherches suivantes: *Über positive quadratische Formen* (Journ. für Mathem. **99**, 1886, 1—9); *Über den arithmetischen Begriff der Äquivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen* (L. c. **100**, 1887, 449—459); *Zur Theorie der positiven quadratischen Formen* (L. c. **101**, 1887, 196—202).

MITTAG-LEFFLER, MAGNUS GUSTAF.

Né à Stockholm le 16 mars 1846, maître de conférences à l'université d'Upsala en 1872, professeur à l'université de Helsingfors (Finlande) en 1877 et à l'université de Stockholm depuis 1881.

Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. **4**, 1—79.

Plusieurs des résultats démontrés dans ce mémoire ont été exposés dans les notes: *En metod att analytiskt framställa en funktion af rationel karakter, hvilken blir oändlig alltid och endast uti vissa föreskrifna oändlighetspunkter, hvilkas konstanter äro på förhand angifna* (Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlingar **33**, 1876, n° *6*: 3—16); *Ytterligare om den analytiska framställningen af funktioner af rationel karakter* (L. c. **34**, 1877, n° *1*: 17—32); *Om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter med en godtyckligt vald gränspunkt* (L. c. **34**, 1877, n° *1*: 33—43); *Om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter med ett ändligt antal godtyckligt föreskrifna gränspunkter* (L. c. **34**, 1877, n° *2*: 31—41); *Fullständig analytisk framställning af hvarje entydig monogen funktion, hvars singulära ställen utgöra en värdemängd af första slaget* (L. c. **39**, 1882, n° *2*: 11—45); *Om den analytiska framställningen af en entydig monogen funktion, hvilken uti omgifningen af hvarje punkt som är belägen innanföre en viss cirkelperiferi, endast har ett ändligt antal singulära ställen* (L. c. **39**, 1882, n° *4*: 21—25); *Extrait d'une lettre à M. Hermite* (Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{3}_2$, 1879, 269—278); *Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **94**, 1882, 414—416, 511—514, 713—715, 781—783, 938—941, 1040—1042, 1105—1108, 1163—1166; **95**, 1882, 335—336). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 351—354. (H[URWITZ].)

Démonstration nouvelle du théorème de Laurent. **4**, 80—88.

Reproduction d'un mémoire publié dans les Mémoires de la société des

MITTAG-LEFFLER, MAGNUS GUSTAF.

sciences de Liége 11_4, 1885. — Le texte suédois dont ce mémoire est une traduction a été inséré dans le Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlingar **40**, 1883, n° 9: 5—13, avec le titre: *Ett nytt bevis för Laurents teorem.* — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 350—351. (H[URWIT]Z.)

MOLK, JULES.

Né à Strasbourg (département du Bas-Rhin) en France le 8 décembre 1857, maître de conférences à la faculté des sciences de Rennes en 1884, chargé de cours à la faculté des sciences de Besançon depuis 1885.

Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination. **6**, 1—166.

Ce mémoire a été présenté, en 1884, à la faculté des sciences de Paris pour obtenir le grade de doctorat. Il contient un développement du grand mémoire de M. KRONECKER: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (Journ. für Mathem. **92**, 1882, 1—123).

NETTO, EUGEN.

Né à Halle a/S. en Allemagne le 30 juin 1846, professeur à l'université de Strasbourg en 1879, à l'université de Berlin depuis 1882.

Zur Theorie der Discriminanten. **1**, 371—399.

Ce mémoire se rattache à un travail publié avec le même titre dans le Journ. für Mathem. **90**, 1880, 164—186. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 52—54. (T[OEPLITZ].) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 151—152. (J. T[ANNERY].)

Zur Theorie der Elimination. **7**, 101—104.

Über orthogonale Substitutionen. **9**, 295—300.

Comparez le théorème d'algèbre de M. STIELTJES inséré dans le tome **6**, p. 319—320.

NOETHER, MAX.

Né à Mannheim en Allemagne le 25 septembre 1844, maître de conférences à l'université de Heidelberg en 1870, professeur extraordinaire à la même université en 1874, professeur extraordinaire à l'université d'Erlangen depuis 1875.

Über die reductiblen algebraischen Curven. **8**, 161—192.

Un extrait de ce mémoire a été publié avec le titre: *Über reducible Curven* dans les Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Societät zu Erlangen **17**, 1885, 13—18.

PHRAGMÉN, EDVARD.

Né à Örebro en Suède le 2 octobre 1863, licencié ès sciences en 1886, chargé de conférences à l'université de Stockholm 1886.

Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre. **5**, 47—48.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 333. (St[olz].)

Sur un théorème concernant les fonctions elliptiques. **7**, 33—42.

Traduction de la note: *En sats ur de elliptiska funktionernas teori* (Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlingar **41**, 1884, n° *9*: 199—207).

Über die Begrenzungen von Continua. **7**, 43—48.

Remaniement de la note: *En ny sats inom teorien för punktmängder* (Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlingar **41**, 1884, n° *1*: 121—124).

PICARD, CHARLES EMILE.

Né à Paris le 24 juillet 1856, maître de conférences à la faculté des sciences de Paris en 1877, chargé de cours à la faculté des sciences de Toulouse en 1879, et à la faculté des sciences de Paris en 1881, professeur à la faculté des sciences de Paris depuis 1886.

Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions. **1**, 297—320.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 356—357. (N[etto].) — Bullet. d. sc. mathém. **8**$_2$, 1884; Revue 148—150. (J. T[annery].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 881—882.

Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires. **2**, 114—135.

Les résultats de ce mémoire ont été énoncés préalablement dans la note *Sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes et sur un groupe de substitutions linéaires* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **94**, 1882, 579—582). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 432—434. (H[amburge]r.) — Bullet. d. sc. mathém. **8**$_2$, 1884; Revue 156—157. (J. T[annery].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 883—884.

Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et sur les fonctions hyperfuchsiennes correspondantes. **5**, 121—182.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 385—388. (D[yc]k.) —Les recherches de ces trois mémoires ont été poursuivies par l'auteur dans le mémoire *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (Annales de l'école normale [de Paris] **2**$_3$, 1885, 357—

PICARD, CHARLES EMILE.

384) et dans la troisième partie du mémoire *Sur les intégrales de différentielles totales de second espèce* (Journ. de mathém. **2**$_4$, 1886, 329—372). — Comparez aussi le *Mémoire sur les formes quadratiques binaires indéfinies à indéterminées conjuguées* (Annales de l'école normale [de Paris] **1**$_3$, 1884, 9—54).

PINCHERLE, SALVATORE.

Né à Trieste en Autriche le 11 mars 1853, professeur au lycée de Pavia en 1875, professeur à l'université de Bologna depuis 1880.

Note sur une intégrale définie. **7**, 381—386.

Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies. **10**, 153—182.

Quelques-uns des résultats contenus dans ce mémoire ont été exposés dans les notes suivantes: *Sur une formule dans la théorie des fonctions* (Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlingar **43**, 1886, 51—55); *Alcune osservazioni sui polinomi del prof. Appell* (Rendiconti dell' accademia dei Lincei [Roma] **2**$_4$, 1886, *2*: 214—217); *Costruzione di nuove espressioni analitiche atte a rappresentare funzioni con un numero infinito di punti singolari* (L. c. **3**$_4$, 1887, *1*: 370—375); et dans le mémoire *Studi sopra alcune operazioni funzionali* (Memorie dell' accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna **7**$_4$, 1886, 393—442).

POINCARÉ, HENRI.

Né à Nancy en France le 29 avril 1854, ingénieur des mines en 1879, chargé de cours à la faculté des sciences de Caen en 1879, maître de conférences à la faculté des sciences de Paris en 1881, chargé de cours en 1884, professeur de physique mathématique en 1886 à la même faculté.

Théorie des groupes fuchsiens. **1**, 1—62.

Corrections, tome **4**, p. 312. — Plusieurs des résultats contenus dans ce mémoire ont été énoncés dans une série de notes *Sur les fonctions fuchsiennes* insérées dans les Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] (**92**, 1881, 333—335, 395—398, 859—861, 957, 1198—1200, 1274—1276; **93**, 1881, 301—303, 581—582), ainsi que dans la note *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires* (Mathem. Ann. **19**, 1882, 553—564. L'auteur en avait exposé une partie déjà dans un mémoire manuscrit présenté en 1880 à l'académie des sciences de Paris pour le concours du grand prix des sciences mathématiques. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **14** (1882), 338—344. (D[YC]K.) — Bullet. d. sc. mathém. **7**$_2$, 1883, 130—133. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 878—879.

POINCARÉ, HENRI.

Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. **7**, 259—380.

Les principaux résultats de ce mémoire ont été exposés dans deux notes *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **100**, 1885, 1068—1070; **101**, 1885, 307—309). Comparez aussi une note avec le même titre (L. c. **100**, 1885, 346—348) et les deux notes *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (Bullet. astronom. **2**, 1885, 109—118, 405—413.) — [Analyse:] Beiblätter zu den Annalen der Physik **10**, 1886, 326—327. (F. A.) — Pour ce qui concerne le § 5 de ce mémoire, comparez aussi la note de M. MATTHIESSEN: *Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **102**, 1886, 857—858) et la réponse de M. POINCARÉ (L. c. **102**, 1886, 970—972).

Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. **8**, 295—344.

Comparez les deux notes *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **101**, 1885, 939—941, 990—991).

Sur les résidus des intégrales doubles. **9**, 321—380.

Les principaux résultats de ce mémoire ont été exposés dans la note *Sur les résidus des intégrales doubles* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **102**, 1886, 41—44).

Remarques sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. Réponse à M. Thomé. **10**, 310—312.

Cette réponse se rapporte à la *Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen* publiée par M. L. W. THOMÉ dans le Journ. für Mathem. **101**, 1887, 203—208.

PRYM, FRIEDRICH EMIL.

Né à Duren (Rheinprovinz) en Allemagne le 28 septembre 1841, professeur à l'école polytechnique de Zürich en 1865, professeur à l'université de Würzburg depuis 1869.

Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Thetaformel. **3**, 201—215.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **14** (1882), 419—428. (H. ST[AHL].) — Bullet. d. sc. mathém. **11**$_2$, 1887; Revue 144. (G. K.)

Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. **3**, 216—239.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **14** (1882), 419—428. (H. ST[AHL].) — Bullet. d. sc. mathém. **11**$_2$, 1887; Revue 144—145. (G. K.)

Über die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel.

Voir KRAZER.

REYE, THEODOR.

Né à Cuxhaven en Allemagne le 20 juin 1838, maître de conférences à l'école polytechnique de Zürich en 1863, professeur à la même école en 1867, professeur à l'école polytechnique d'Aachen en 1870, depuis 1872 professeur à l'université de Strasbourg.

RUNGE, CARL.

Né à Bremen le 30 août 1856, maître de conférences à l'université de Berlin en 1883, professeur à l'université de Hannover depuis 1886.

SCHEEFFER, KARL LUDWIG.

Né à Königsberg i/Pr. le 1 juin 1859, maître de conférences à l'université de München en 1884, mort à München le 11 juin 1885.

SCHERING, ERNST CHRISTIAN JULIUS.

Né à Sandbergen an der Elbe (près Lüneburg) en Allemagne le 13 juillet 1833, maître de conférences à l'université de Göttingen en 1859, professeur extraordinaire à la même uni-

SCHERING, ERNST CHRISTIAN JULIUS.

versité en 1860, professeur ordinaire et en même temps un des directeurs de l'observatoire astronomique depuis 1868.

Zur Theorie der quadratischen Reste. **1**, 158—170.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 141. (S[IMO]N.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 143—144. (J. T[ANNERY].)

[Zur Theorie der Leibrenten.]

Voir MALMSTEN.

SCHLÄFLI, LUDWIG.

Né à Grasswyl (Canton Bern) en Suisse le 15 janvier 1814, maître de conférences à l'université de Bern en 1847, professeur à la même université depuis 1853.

Über $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx}\cdot\frac{dx}{1+x^2}$ und verwandte Integrale. **7**, 187—196.

SCHROETER, HEINRICH EDUARD.

Né à Königsberg i/Pr. le 8 janvier 1829, maître de conférences à l'université de Breslau en 1855, depuis 1861 professeur ordinaire à la même université.

Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen. **5**, 205—208.

1. Démonstration d'une formule due à M. CAYLEY (comparez la note de M. HERMITE: *Sur une relation donnée par M. Cayley dans la théorie des fonctions elliptiques,* dans le tome **1**, 1883, p. 368—370). 2. Formes irrationnelles des équations modulaires pour les transformations du 5ᵉ, 11ᵉ, 23ᵉ degré. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 409—410. (M[ÜLLER].)

SCHUBERT, HERMANN CÄSAR HANNIBAL.

Né à Potsdam en Allemagne le 22 mai 1848, depuis 1876 professeur de mathématiques à la »Gelehrtenschule« de Hamburg.

Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension. **8**, 97—118.

SCHWERING, KARL.

Né à Osterwick (Westphalen) en Allemagne le 28 septembre 1846, maître de conférences à l'université de Münster en 1872, professeur de mathématiques au lycée de Brilon en 1875, ensuite au lycée de Coesfeld depuis 1878.

Über gewisse trinomische komplexe Zahlen. **10**, 57—86.

Correction à la suite de la table des matières du tome **10**.

SONINE, NIKOLAJ.

Né à Toula en Russie le 22 février 1849, maître de conférences à l'université de Varszawa en 1872, professeur extraordinaire à la même université en 1877, professeur ordinaire depuis 1879.

Sur la généralisation d'une formule d'Abel. **4**, 171—176.

La formule dont il s'agit se rapporte au calcul inverse des intégrales définies. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 354—356. (H[URWIT]Z.) — Réimprimé en russe avec quelques additions dans les Записки Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей (Одесса), 1885 [Mémoires de la société des naturalistes de la Nouvelle Russie à Odessa].

SPARRE, MAGNUS LOUIS MARIE DE.

Né à Mannenbach (canton de Thurgau) en Suisse le 12 mai 1849, sous-lieutenant d'artillerie en 1870, lieutenant en 1872, capitaine en 1875, démissionnaire en 1876, professeur de mathématiques à la faculté catholique des sciences de Lyon depuis 1882.

Sur l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}+\left[2\nu\frac{k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}+2\nu_1\frac{\operatorname{sn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x}-2\nu_2\frac{\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}x}\right]\frac{dy}{dx}$

$$=\left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2x}(n_3-\nu_2)(n_3+\nu_2+1)+\frac{\operatorname{dn}^2x}{\operatorname{cn}^2x}(n_2-\nu_1)(n_2+\nu_1+1)\right.$$

$$\left.+\frac{k^2\operatorname{cn}^2x}{\operatorname{dn}^2x}(n_1-\nu)(n_1+\nu+1)+k^2\operatorname{sn}^2x(n+\nu+\nu_1+\nu_2)(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1)+h\right]y,$$

équation où ν,ν_1,ν_2, **désignent des nombres quelconques,** n,n_1,n_2,n_3 **des nombres entiers positifs ou négatifs, et** h **une constante arbitraire.** **3**, 105—140, 289—321.

Deux mémoires. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 277—279. (H[AMBURGE]R.) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887; Revue 140—142. (G. K.)

STAUDE, OTTO.

Né à Limbach (Sachsen) en Allemagne le 27 mars 1857, maître de conférences à l'université de Breslau en 1883, professeur à l'université de Dorpat depuis 1886.

Über hyperelliptische Integrale zweiter und dritter Gattung. **8**, 81—92.

Ces recherches ont été poursuivies dans les memoires suivants: *Über Verallgemeinerungen des Graves'schen Theorems in der analytischen Mechanik* (Berichte der Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1886; Mathem. Cl. 199—206); *Über periodische und bedingt periodische Bewegungen* (Sitzungsber. d. Naturforscher-Gesellschaft bei der Univ. Dorpat 1886); *Über eine Gattung doppelt reell periodischer Functionen zweier reeller Veränderlicher* (Mathem. Ann. **29**, 1887, 467—485); *Über bedingt periodische Bewegungen* (Sitzungsber. der Naturf.-Gesellsch. bei der Univ. Dorpat 1887), ainsi que dans le mémoire signalé ci-après.

WEIERSTRASS, KARL.

Né à Osterfelde (Regierungsbezirk Münster) en Allemagne le 31 octobre 1816, professeur de mathématiques à Deutsch-Crone en 1842 et à Braunsberg en 1848, professeur extraordinaire à l'université de Berlin et à l'école des arts et des métiers (Gewerbe-Institut) en 1856, professeur ordinaire à la même université depuis 1864.

Sur la théorie des fonctions elliptiques. Traduit de l'allemand par A. Pautonnier. **6**, 169—228.

Le texte allemand de ce mémoire a été publié avec le titre: *Zur Theorie der elliptischen Functionen* dans les Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften 1883, 95—105, 163—173, 621—647.

[Eine Integrationsmethode für lineare partielle Differentialgleichungen]. Voir Kowalevski.

WEINGARTEN, JULIUS.

Né à Berlin le 25 mars 1836, professeur à l'académie royale des architectes (Bauakademie) de Berlin depuis 1864.

Zur Theorie des Flächenpotentials. **10**, 303—309.

ZELLER, CHRISTIAN JULIUS JOHANNES.

Né à Mühlhausen près Stuttgart en Allemagne le 24 juin 1822, professeur de mathématiques au séminaire de Schoenthal 1848—1854, curé à Schöckingen en 1854, depuis 1874 recteur au séminaire de Markgröningen (Würtemberg).

Zu Eulers Recursionsformel für die Divisorensummen. **4**, 415—416.

Comparez la note de M. Stern insérée dans le tome **6**, p. 327—328. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 147—148. (S[imo]n.)

Kalender-Formeln. **9**, 131—136.

Ces formules ont été signalées aussi dans la note: *Problema duplex calendarii fundamentale* (Bullet. de la soc. mathém. de France **7**, 1883, 59—61) et dans les Mathematisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen (Tübingen) Heft 2, 1885, p. 54.

ZEUTHEN, HIERONYMUS GEORG.

Né à Grimstrup (Jylland) en Danemarc le 15 février 1839, maître de conférences à l'université de Kjöbenhavn en 1871, professeur extraordinaire à la même université en 1883, professeur ordinaire depuis 1886.

Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative. **1**, 171—188.

L'auteur présente une formule, qu'il avait indiquée précédemment dans la note *Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes* (Mathem. Ann. **3**, 1870, 150—156), sous une forme due à M. Halphen (voir la note *Sur les correspondances entre les points de deux courbes,*

ZEUTHEN, HIERONYMUS GEORG.

Bulletin de la soc. mathém. de France **5**, 1877, 7—18). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 566—568. (SCH[UBER]T.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 144—145 (J. T[ANNERY].) — A ce mémoire se rattache une note *Sur un problème de Steiner* publiée dans le Bullet. d. sc. mathém. 11_2, 1887, 82—86.

Sur les pentaèdres complets inscrits à une surface cubique. **5**, 203—204.

Cette note fait suite à l'article précédent de M. LE PAIGE: *Nouvelles recherches sur les surfaces du troisième ordre.* — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 592. (R[EINHAR]DT.)

N. H. ABEL.

Portrait (héliotypie); au commencement du tome **1**.

WEIERSTRASS.

Portrait (héliotypie); au commencement du tome **7**.

[Avant-propos de la rédaction.]

Au commencement du tome **1** (2 pages). — En allemand et en français.

[Annonce de la mort de Hj. Holmgren et C. J. Malmsten.]

Au commencement du cahier **7** : 4 (2 pages).

[Communication sur un prix de mathématiques fondé par le roi Oscar II.] **7**, I—VI.

En allemand et en français. — Cette communication a aussi été publiée séparément en suédois, danois, français, allemand et anglais. — [Reproductions ou traductions:] *Paris,* Acad. d. sc., Comptes rendus **101**, 1885, 531—533. — Revue scientifique **36**, 1885, 318—319. — Giorn. di matem. **23**, 1885, 244—246. — Deutsche Litteraturz. **6**, 1885, 1254—1255. — *Leipzig,* Astronom. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **20**, 1885, 210—213. — Quarterly journ. of mathem. **21**, 1886, 209—212. — *Washington,* Smithsonian Institution, Annual report 1885, n° 1, 331—333. — Cronica cientifica **9**, 1886, 34—36 (en espagnol). — Физико-математическiя науки **1**, 1885, B: 193—196 (en russe).

Preisaufgabe der fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1889. **8**, 264.

II. Systematisches Register. — Table méthodique.

1. ALGEBRA UND ZAHLENTHEORIE. — ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES.

2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG. — THÉORIE DES PROBABILITÉS.

3. ALLGEMEINE FUNKTIONENTHEORIE. — THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS.

4. THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNKTIONEN. ALLGEMEINES. — THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES. GÉNÉRALITÉS.

5. THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNKTIONEN. BESONDERE FUNKTIONEN. — THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES. FONCTIONS SPÉCIALES.

6. THEORIE DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. — THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

7. THEORIE DER PARTIELLEN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN. — THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

8. GEOMETRIE. — GÉOMÉTRIE.

9. MECHANIK UND MATHEMATISCHE PHYSIK. — MÉCANIQUE ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

III. Namenregister. — Table des noms d'auteurs.

Preis des Bandes: [illegible] Mark — Prix par volume: 15 Fr.

ACTA

MATHEMATICA

Ausgegeben den 30. November 1887. — Paru le 30 Novembre 1887.

Inhalt. Table des matières.

Preis des Bandes: 12 Mark. — Prix par volume: 15 Fr.

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

11

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1887—1888.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

REDACTION

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 11. — 1887–1888. — TOME 11.

CORRECTION.

Tome **10**, page 381, ligne 2, au lieu de 1816 lire 1815.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

11:1

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1887.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

Digitized by Google

DÉMONSTRATION D'UN
THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES FONCTIONS UNIFORMES
LIÉES PAR UNE RELATION ALGÉBRIQUE.

Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler

PAR

EMILE PICARD
À PARIS.

Le théorème que je me propose de démontrer peut être énoncé de la manière suivante.

Si entre deux fonctions analytiques uniformes d'une variable existe une relation algébrique de genre supérieur à l'unité, ces fonctions ne pourront avoir de point singulier essentiel isolé.

Je possède de cette proposition deux démonstrations essentiellement différentes. La première, qui s'appuie sur la théorie des fonctions fuchsiennes, ne sera à très peu près que la reproduction de celle que j'ai donnée, il y a quelques années, dans le Bulletin des sciences mathématiques **7**$_2$ (1883), p. 107—116, pour une proposition moins générale en apparence, mais identique au fond à celle que je viens d'énoncer. Quant à la seconde, j'en ai seulement autrefois indiqué le principe dans un cas particulier, et c'est à une ingénieuse remarque de M. Hurwitz que je dois d'avoir pu la pousser jusqu'au bout.

Première démonstration.

1. Mon point de départ est dans la proposition suivante qui résulte des recherches de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes (*Mémoire*

sur les groupes des équations linéaires, Acta Mathematica tome 4). x et y étant liés par la relation algébrique

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

de genre au moins égal à *deux,* on peut trouver une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \varphi(x, y) \cdot z$$

(où φ est rationnelle en x et y) n'ayant d'autres points singuliers que les points analytiques $(x = a, y = b)$, points singuliers de l'équation (1), et jouissant des propriétés suivantes. Si l'on prend deux intégrales convenables ω_1 et ω_2, l'équation

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u$$

donne pour x une fonction fuchsienne de u, fonction qui n'est définie que pour les valeurs de u, dans lesquelles le coefficient de i est positif. *De plus,* dans le voisinage d'un point analytique $(x = a, y = b)$ (b faisant partie d'un système circulaire de p racines), le quotient $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ sera fonction uniforme de $(x - a)^{\frac{1}{p}}$, et *enfin,* aucune des substitutions du groupe de l'équation linéaire n'est parabolique.

La fonction u de x, que nous venons de définir, a pour chaque valeur de x une infinité de déterminations; quel que soit x, toutes ces déterminations ont des valeurs finies, et, dans ces expressions mises sous la forme ordinaire des quantités complexes, le coefficient de i est toujours positif et différent de zéro. u désignant l'une d'entre elles, toutes les autres sont données par la formule

$$\frac{Au + B}{Cu + D}$$

où A, B, C et D sont réels, avec $AD - BC = 1$.

La substitution (A, B, C, D) est une substitution du groupe fuchsien défini plus haut. Ce groupe, comme je l'ai dit, ne renferme pas de substitutions paraboliques.

2. Ces résultats étant admis, soient

$$x = P(z), \qquad y = Q(z)$$

deux fonctions analytiques, uniformes dans le voisinage d'un point a, que nous allons supposer être, pour ces fonctions, un point singulier essentiel *isolé*. Je suppose qu'entre x et y existe une relation algébrique

$$f(x, y) = 0$$

de genre égal ou supérieur à deux.

J'envisage la fonction u de x, définie plus haut; je remplace dans cette fonction x par $P(z)$; u devient une fonction de z, dont nous allons faire l'étude, dans le voisinage de a, c'est-à-dire à l'intérieur d'un certain cercle C décrit du point a comme centre, cercle à l'intérieur duquel les fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ sont uniformes et ont le seul point singulier essentiel a.

Dans le voisinage de toute valeur de z, à laquelle ne correspond pas un système de valeurs de x et y qui donnent un point singulier de la relation algébrique, la fonction u est évidemment uniforme. Soit maintenant $z = z_1$ une valeur de z pour laquelle on ait $x = a'$, $y = b'$, cette dernière faisant partie d'un système circulaire de p racines; l'équation $P(z) = a'$ admettra la racine $z = z_1$ à un degré de multiplicité multiple de p, puisque la valeur de y tirée de l'équation (1) doit être une fonction uniforme de z. Or $u(x)$ étant dans le voisinage de $x = a'$ fonction uniforme de $(x - a')^{\frac{1}{p}}$, sera par suite une fonction uniforme de z dans le voisinage de z_1. Nous concluons de là que u est une fonction uniforme de z, dans tout contour simple, situé à l'intérieur de C et ne comprenant pas le point a.

Nous allons maintenant rechercher la forme de u dans le voisinage du point a. Soit pour un point du cercle C une détermination u de la fonction $u(z)$; quand z fait un tour complet autour du point a dans le sens positif, $x = P(z)$ décrit dans son plan une courbe également fermée, et par conséquent la nouvelle détermination de u a la forme

$$\frac{Au + B}{Cu + D},$$

cette substitution étant une des substitutions du groupe dont il a été parlé précédemment, et deux cas vont être à distinguer, suivant que cette substitution est hyperbolique ou elliptique.

3. Supposons d'abord que la substitution (A, B, C, D) soit hyperbolique. On a alors $(A+D)^2 > 4$. On peut alors, comme il est bien connu, trouver cinq quantités réelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et k, telles que $\frac{\alpha+\beta u}{\gamma+\delta u}$ se reproduise multiplié par k après un tour complet de z autour du point a.

k est d'ailleurs une constante positive différente de l'unité; designons par μ son logarithme arithmétique. Le quotient

$$\frac{\alpha+\beta u}{\gamma+\delta u} : (z-a)^{\frac{\mu}{2\pi i}}$$

reprend par suite la même valeur après un tour complet, et l'on peut écrire

$$\frac{\alpha+\beta u}{\gamma+\delta u} = (z-a)^{\frac{\mu}{2\pi i}} \varphi(z),$$

la fonction $\varphi(z)$ étant uniforme dans le cercle C; $\varphi(z)$ n'aura dans ce domaine d'autre point singulier que le point a, car le dénominateur $\gamma+\delta u$ ne peut jamais devenir nul, puisque γ et δ sont réels. De plus $\varphi(z)$ ne s'annulera jamais, puisque $\alpha+\beta u$ ne peut s'annuler; par suite, le quotient $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ est uniforme et continu dans C à l'exception de a. On peut alors écrire

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \ldots + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \frac{A_1}{z-a} + A + B(z-a) + \ldots,$$

série double procédant suivant les puissances croissantes de $z-a$. En intégrant, on voit de suite que A_1 doit être un entier m positif ou négatif, puisque $\varphi(z)$ est uniforme; on a donc

$$\varphi(z) = (z-a)^m e^{f(z)},$$

$f(z)$ étant uniforme dans C et continue à l'exception du point a. En résumé, nous obtenons

$$\frac{\alpha+\beta u}{\gamma+\delta u}=(z-a)^{\frac{\mu}{2\pi i}+m}e^{f(z)}.$$

Or le coefficient de i dans le premier membre a un signe invariable, puisque dans u le coefficient de i est toujours positif; nous allons montrer que le coefficient de i dans le second membre ne peut avoir un signe constant; écrivons à cet effet

$$(z-a)^{\frac{\mu}{2\pi i}+m}e^{f(z)}=e^{\left(\frac{\mu}{2\pi i}+m\right)\log(z-a)+f(z)}.$$

Si dans cette expression le coefficient de i a toujours le même signe, le signe $+$ pour fixer les idées, le coefficient de i dans

$$\left(\frac{\mu}{2\pi i}+m\right)\log(z-a)+f(z)$$

devra rester compris entre $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$, c'est-à-dire entre deux limites fixes.

Posons

$$\left(\frac{\mu}{2\pi i}+m\right)\log(z-a)+f(z)=U+iV.$$

Il est tout d'abord évident que, si m n'est pas nul, V ne peut rester entre deux limites fixes, car une rotation autour du point a augmente V de $2m\pi$.

Supposons donc $m=0$; l'égalité précédente pourra s'écrire

$$\log(z-a)+\frac{2\pi i}{\mu}f(z)=-\frac{2\pi V}{\mu}+\frac{2\pi i U}{\mu},$$

ou

$$(z-a)e^{\frac{2\pi i}{\mu}f(z)}=e^{-\frac{2\pi V}{\mu}}e^{\frac{2\pi i U}{\mu}}.$$

Mais le module du second membre reste compris entre deux limites déterminées, tandis que le premier peut devenir aussi petit que l'on veut, que $f(z)$ soit continue ou non au point $z=a$.

Il résulte de la contradiction que nous venons de rencontrer que la substitution (A, B, C, D) ne peut être hyperbolique.

4. Supposons maintenant que la substitution soit elliptique. Nous avons dans ce cas

$$(A+D)^2<4.$$

On pourra encore trouver quatre quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et k telles que $\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u}$ se reproduise multiplé par k après un tour de z autour de a; mais ici ces quantités ne sont plus réelles. On a pour déterminer le rapport de γ à δ l'équation du second degré

$$B\delta^2 + (D - A)\delta\gamma - C\gamma^2 = 0,$$

et pareillement

$$B\beta^2 + (D - A)\beta\alpha - C\alpha^2 = 0;$$

$\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\gamma}{\delta}$ sont donc racines de l'équation du second degré

$$B + (D - A)x - Cx^2 = 0,$$

dont les racines sont imaginaires, puisque

$$(A + D)^2 < 4 \quad \text{et} \quad AD - BC = 1.$$

Nous prendrons pour $\frac{\alpha}{\beta}$ la racine dans laquelle le coefficient de i est négatif, et par suite dans $\frac{\gamma}{\delta}$ le coefficient de i sera positif.

Quant au multiplicateur k, il est nécessairement une racine de l'unité, sans quoi le groupe dont fait partie la substitution (A, B, C, D) ne serait pas un groupe discontinu; nous poserons donc $k = e^{\frac{2m\pi i}{n}}$, m et n étant positifs et premiers entre eux.

Ceci posé, considérons le quotient

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} : (z - a)^{\frac{m}{n}};$$

ce quotient sera une fonction uniforme dans le domaine C.

Ecrivons donc

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} = (z - a)^{\frac{m}{n}} \varphi(z).$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, le coefficient de i dans $-\frac{\gamma}{\delta}$ est négatif, tandis qu'il est positif dans $-\frac{\alpha}{\beta}$. Le dénominateur $\gamma + \delta u$ ne peut donc s'annuler, puisque dans u le coefficient de i est

toujours positif; il y a plus, le module du premier membre reste toujours inférieur à une limite qu'il serait facile d'assigner. On en conclut que le point $z = a$ ne peut être un point singulier essentiel pour $\varphi(z)$. Ce point est donc un pôle ou un point ordinaire pour la fonction φ; dans ces conditions, l'expression

$$(z - a)^{\frac{m}{n}} \varphi(z),$$

n étant plus grand que 1 et m étant premier à n, ne peut que tendre vers zéro ou augmenter indéfiniment quand z tend vers a; la seconde supposition étant, d'après ce qui précède, inadmissible, cette expression a la valeur zéro pour $z = a$. Nous arrivons donc à cette conclusion:

De quelque manière que z tende vers le point a, la fonction u tend vers $-\frac{\alpha}{\beta}$. Or, pour $u = -\frac{\alpha}{\beta}$, la fonction fuchsienne x de u, définie par la relation (n° 1)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u,$$

possède une valeur parfaitement déterminée; donc, de quelque manière que z tende vers a, la fonction $x = P(z)$ tend vers une valeur déterminée, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que le point a est un point singulier essentiel de $P(z)$.

La substitution (A, B, C, D) ne peut donc être elliptique; or, comme le groupe ne renferme que des substitutions elliptiques et hyperboliques, il ne nous reste plus qu'à supposer que la fonction u de z est uniforme dans le voisinage de a.

5. L'examen de ce cas sera bien facile. On aurait alors

$$u = A(z) + B(z),$$

où

$$A(z) = A_0 + A_1(z - a) + \dots,$$

$$B(z) = \frac{B_1}{z - a} + \frac{B_2}{(z - a)^2} + \dots.$$

$B(z)$ doit être nulle, sinon le coefficient de i dans la fonction u aurait un signe variable. On a donc

$$u = A_0 + A_1(z - a) + A_2(z - a)^2 + \dots.$$

Dans la constante A_0, le coefficient de i doit être différent de zéro et positif; il ne peut, en effet, être nul, car alors le coefficient de i dans u serait le même que dans

$$A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots,$$

et ce dernier dans le voisinage de $z=a$ n'a évidemment pas un signe constant.

On voit donc que, quand z tend vers a, u tend vers une valeur A_0 dans laquelle le coefficient de i est différent de zéro et positif. En raisonnant comme plus haut, nous en concluons que, pour $z=a$, la fonction $P(z)$ a une valeur parfaitement déterminée.

Il est maintenant bien aisé de conclure. Nous sommes en effet, par ce qui précède, conduit à cette conclusion que le point *a ne peut être* un point singulier *essentiel* de $P(z)$ et $Q(z)$. C'est donc bien, comme on voit, le théorème énoncé au début qui se trouve ainsi démontré d'une manière complétement rigoureuse. On peut encore dire, ce qui reviendra au même, que:

Si entre deux fonctions analytiques uniformes ayant un point singulier essentiel isolé, existe une relation algébrique, le genre de cette relation ne peut dépasser un.

Seconde démonstration.

6. Nous allons maintenant donner une seconde démonstration du même théorème, sans rien emprunter à la théorie des fonctions fuchsiennes. A cet effet, nous supposerons d'abord que la relation $f(x, y)=0$ soit hyperelliptique; nous pourrons alors nous placer dans l'hypothèse où cette relation a précisément la forme

$$y^2=(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n);$$

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont n constantes différentes et n est supérieur à quatre.

Nous supposons, comme plus haut, que l'on puisse poser

$$x=P(z), \qquad y=Q(z)$$

P et Q étant des fonctions analytiques, uniformes dans le voisinage d'un point a, qui sera pour ces fonctions un point singulier essentiel isolé.

Il est clair que les équations

$$P(z) = b_1, \qquad P(z) = b_2, \quad \ldots, \quad P(z) = b_n,$$

n'auront dans le cercle C que des racines d'un degré pair de multiplicité.

Ceci posé, formons le quotient

$$\frac{\frac{dP}{dz}}{\sqrt{(P-b_1)(P-b_2)(P-b_3)(P-b_4)}}$$

ce sera une fonction $R(z)$, uniforme dans le cercle C, et continue sauf au point a qui pourra être pour elle un point singulier essentiel. Nous pouvons donc écrire

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\sqrt{(P-b_1)\ldots(P-b_4)}} = \int_{z_0}^{z} R(z)dz = S(z) + A\log(z-a)$$

$S(z)$ désignant une fonction uniforme dans C, et continue sauf au point a, qui pourra être pour elle un point singulier essentiel; A représente une constante, et $2\pi i A$ est évidemment une somme de multiples de périodes de l'intégrale elliptique.

On conclut de là que $P(z)$ est une fonction doublement périodique φ de $S(z) + A\log(z-a)$, soit

$$P(z) = \varphi[S(z) + A\log(z-a)].$$

Je vais maintenant montrer que $P(z)$ ayant cette forme, l'équation

$$(1) \qquad P(z) = b$$

où b est différent de b_1, b_2, b_3, b_4 ne peut avoir dans C toutes ses racines d'un degré pair de multiplicité. Remarquons d'abord que la dérivée de $\varphi(u)$ considérée comme fonction de u ne s'annule que quand φ prend une des valeurs b_1, b_2, b_3 ou b_4; il en résulte que si $z = z_1$ est une racine d'un certain degré de multiplicité de l'équation (1), elle sera racine du même degré de multiplicité de l'équation:

$$S(z) + A\log(z-a) = S(z_1) + A\log(z_1-a).$$

Si donc nous désignons par u_1 et u_2 les racines de l'équation $\varphi(u) = b$ dans un parallélogramme de périodes (ω, ω'), toutes les équations

$$(2) \qquad \begin{aligned} S(z) + A\log(z - a) &= u_1 + m\omega + m'\omega' \\ S(z) + A\log(z - a) &= u_2 + m\omega + m'\omega' \end{aligned}$$

où m et m' sont des entiers quelconques, devront avoir dans C toutes leurs racines d'un degré pair de multiplicité.

Considérons maintenant la fonction

$$\mathcal{G}(z) = (z - a)e^{\frac{S(z)}{A}}$$

c'est une fonction uniforme dans C, et continue sauf au point a qui est pour elle un point singulier essentiel. Les équations

$$\mathcal{G}(z) = e^{\frac{u_1 + m\omega + m'\omega'}{A}}, \qquad \mathcal{G}(z) = e^{\frac{u_2 + m\omega + m'\omega'}{A}}$$

n'auront dans C que des racines d'un degré pair de multiplicité, car ces équations sont identiques aux équations (2), puisque, comme nous l'avons dit, on a

$$2\pi i A = \alpha\omega + \beta\omega'$$

α et β étant des entiers. De plus, ces équations sont en nombre infini; nous avons donc une fonction $\mathcal{G}(z)$ uniforme dans C, continue sauf au point singulier essentiel a, *et telle que pour une infinité de valeurs de* h, l'équation

$$\mathcal{G}(z) = h$$

a dans C toutes ses racines de degré pair de multiplicité. C'est à la démonstration de l'impossibilité de ce fait que nous sommes ramené.

En considérant quatre des valeurs possibles de h, et en raisonnant sur $\mathcal{G}$, comme nous avons raisonné plus haut sur P, on montrera que φ_1 désignant une fonction doublement périodique, on a:

$$(3) \qquad \mathcal{G}(z) = \varphi_1[S_1(z) + A_1\log(z - a)]$$

$S_1(z)$ étant une fonction de même nature que S et $\mathcal{G}$.

Or *l'identité* (3) *est inadmissible.* Car soit $\lambda + m\omega_1 + m'\omega'_1$ une série de pôles de la fonction φ_1, dont ω_1 et ω'_1 désignent les périodes; les équations

$$(4) \qquad S_1(z) + A_1\log(z - a) = \lambda + m\omega_1 + m'\omega'_1$$

auront certainement des racines dans le cercle C, car ces équations reviennent aux équations:

$$(z - a)e^{\frac{S_1(z)}{A_1}} = e^{\frac{\lambda + m\omega_1 + m'\omega'_1}{A_1}}$$

(en se rappelant la relation nécessaire $2\pi i A_1 = \alpha_1\omega_1 + \beta_1\omega'_1$).

Le second membre a une infinité de valeurs quand on donne aux entiers m et m' toutes les valeurs entières possibles. Or si l'on considère la fonction:

$$(z - a)e^{\frac{S_1(z)}{A_1}}$$

elle prend une infinité de fois dans le voisinage de a toute valeur donnée, *deux* exceptions seulement étant possibles, d'après une proposition générale que j'ai donnée autrefois sur les valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel.[1] Pour une racine de l'équation (4), $\mathcal{G}(z)$ sera infini, ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathcal{G}(z)$ doit être continue pour tous les points de C à l'exception seulement de a.

Le théorème est ainsi complétement démontré pour les courbes hyperelliptiques.

7. Il a été supposé, dans ce qui précède, que la relation entre x et y était hyperelliptique. Mes tentatives, pour passer au cas général, n'avaient pas été couronnées de succès, mais on peut cependant achever la démonstration, en restant dans le même ordre d'idées, grâce à une remarque fort intéressante que m'a communiquée M. A. Hurwitz dans une lettre déjà ancienne.

Soit $f(x, y) = 0$, la relation que l'on ne suppose pas hyperelliptique, et pour laquelle on a par conséquent $p > 2$. A l'équation précédente, le savant géomètre associe une relation

$$f_1(x, y_1) = 0 \qquad \text{de genre } p = 2$$

jouissant des propriétés suivantes: les points de ramification de la fonction algébrique y_1 de x sont tous compris parmi les points de ramification de la fonction algébrique y de x (on suppose, pour plus de simplicité, et comme il est permis, que tous les points de ramification de la

[1] *Mémoire sur les fonctions entières* (Annales de l'école normale supérieure de Paris, 1880).

fonction donnent seulement des cycles de deux racines), et dans le voisinage de tout point analytique (x, y) la fonction y_1 peut être considérée comme une fonction uniforme du point (x, y). L'équation $f_1(x, y_1)$ peut d'ailleurs être déterminée d'une infinité de manières, comme le montre la considération de la surface de RIEMANN correspondant à $f(x, y) = 0$.

Substituons maintenant dans cette fonction y_1 de x

$$x = P(z).$$

y_1 va devenir une fonction de z, uniforme et continue dans le voisinage de tout point du cercle C, autre que le point a; quand z fera un tour autour du point a, y_1 pourra ne pas retrouver la même valeur, mais comme y_1 n'a qu'un nombre limité de valeurs, on est assuré qu'après un certain nombre de tours, soit m, y_1 reprendra sa valeur initiale. Or posons

$$z - a = z'^m$$

x sera une fonction uniforme de z' dans le voisinage de $z' = 0$, et y_1 sera pareillement une fonction uniforme de cette même variable; nous avons donc deux fonctions x et y_1 de z', uniformes dans le voisinage de $z' = 0$ qui est pour elles un point singulier essentiel isolé, et liées par la relation

$$f_1(x, y_1) = 0$$

dont le genre est égal à deux. Cette conclusion est inadmissible d'après ce que nous avons dit d'une manière générale des relations hyperelliptiques. Le théorème est donc, cette fois, établi sans aucune restriction.

8. Des deux démonstrations précédentes, la seconde ne faisant pas appel à la théorie des fonctions fuchsiennes a évidemment un caractère plus élémentaire. Elle est cependant beaucoup plus artificielle, et il me paraît plus naturel, pour démontrer l'impossibilité en question, de s'adresser précisément aux fonctions uniformes réalisant cette expression des coordonnées d'une courbe algébrique à l'aide d'un paramètre. Les fonctions fuchsiennes se justifient en quelque sorte ainsi elles mêmes; je veux dire qu'on peut tenir pour certain, d'après le théorème qui fait l'objet de cet article, qu'il est impossible d'obtenir des fonctions uniformes plus simples que celles de M. POINCARÉ pour exprimer les coordonnées d'une courbe algébrique de genre quelconque.

Paris, le 11 Octobre 1887.

EINE VERALLGEMEINERUNG DER DEKADISCHEN SCHREIBWEISE

NEBST

FUNCTIONENTHEORETISCHER ANWENDUNG

VON

EMIL STRAUSS

in FRANKFURT a/M.

Bekanntlich lassen sich viele Sätze über ganze rationale Functionen auch auf ganze transcendente Functionen übertragen. Man könnte daher vermuthen, dass dies auch bei dem folgenden Satze der Fall ist:

»Wenn eine ganze rationale Function mit rationalen Coefficienten für *eine* Wurzel einer irreductibeln algebraischen Gleichung verschwindet, so verschwindet sie für *sämmtliche* Wurzeln derselben.»

Würde sich dieses Theorem auch auf ganze transcendente Functionen (d. h. Functionen, die durch beständig convergente Potenzreihen darstellbar sind,) ausdehnen lassen, so wäre damit ein einfacher Beweis für die Transcendenz von π erbracht. Dieser Satz ist indessen nicht richtig und es soll in den folgenden Zeilen eine ganze transcendente Function mit rationalen Coefficienten construirt werden, welche zwar für eine Wurzel, nicht aber zugleich für die anderen Wurzeln einer irreductibeln algebraischen Gleichung verschwindet. Es ist dies auf mannigfaltige Weise möglich, am bequemsten wohl mit Benutzung der im folgenden zu entwickelnden Darstellung einer beliebigen Grösse, einer Darstellung, die sich als Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise auffassen lässt.

I.

Es sei gegeben eine unendliche Reihe von Grössen

$$c_1, c_2, \ldots, c_\nu, \ldots$$

und zwar möge sein:

$$c_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \qquad c_2 = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}, \quad \ldots, \quad c_\nu = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}, \quad \ldots,$$

wo die Grössen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

irgend welche ganze positive Zahlen ausser 0 und 1 bedeuten. Es lässt sich dann jede positive, rationale oder irrationale Grösse ω, die kleiner ist als 1, in der Form darstellen:

$$\omega = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \ldots,$$

wo $a_1, a_2, \ldots$ ganze Zahlen bedeuten, die den Ungleichungen genügen

$$a_1 < \alpha_1, \qquad a_2 < \alpha_2, \quad \ldots.$$

Um diesen Satz zu beweisen genügt es die Methode anzugeben, wie die Grössen a gefunden werden, wenn die Grössen α gegeben sind.

Man setze

$$(1).(2) \qquad \left|\begin{array}{ll} [\alpha_1\omega] & = a_1 \\ [\alpha_2\omega_1] & = a_2 \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots} \\ [\alpha_\nu\omega_{\nu-1}] & = a_\nu \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \alpha_1\omega - a_1 = \omega_1 \\ \alpha_2\omega_1 - a_2 = \omega_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_\nu\omega_{\nu-1} - a_\nu = \omega_\nu \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Dabei bedeutet $[x]$ die grösste ganze Zahl, welche nicht grösser ist als x; es sind demnach die Grössen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$, sämmtlich echte Brüche, es sei denn, dass eine derselben und mithin alle folgenden verschwinden. In dem letzteren Falle ist die Darstellung eine endliche, sonst ist sie unendlich. Die Grössen a genügen ferner der geforderten Bedingung

$$a_\nu < \alpha_\nu.$$

Die Darstellung liefert einen convergenten Ausdruck; denn es ist

$$\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_1 a_2} + \dots + \frac{a_\nu}{a_1 a_2 \dots a_\nu} \leqq \frac{a_1 - 1}{a_1} + \frac{a_2 - 1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{a_\nu - 1}{a_1 a_2 \dots a_\nu}$$

also

$$\leqq 1 - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_\nu}.$$

Endlich ist zu zeigen, dass

$$(3) \qquad \lim \left[\omega - \frac{a_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1 a_2} - \dots - \frac{a_\nu}{a_1 a_2 \dots a_\nu}\right] = 0.$$

Multiplicirt man die ν ersten von den Gleichungen (2) der Reihe nach mit

$$\frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_1 a_2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_\nu}$$

und addirt dann, so erhält man

$$\omega - \frac{a_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1 a_2} - \dots - \frac{a_\nu}{a_1 a_2 \dots a_\nu} = \frac{\omega_\nu}{a_1 a_2 \dots a_\nu} < \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_\nu},$$

woraus die Gleichung (3) sich ergiebt. Damit ist der in Rede stehende Satz erwiesen.

Es seien noch, wiewohl für unseren nächsten Zweck unnöthig, die folgenden Bemerkungen zu dieser Darstellungsweise einer Zahl, welche eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise repräsentirt, hinzugefügt.

1°. Wenn von irgend einem Index ab jede Grösse a den höchsten Werth hat, den sie haben kann, so lässt sich statt dieser Darstellung eine endliche geben.

Denn es sei

$$\omega = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_k c_k + (a_{k+1} - 1) c_{k+1} + (a_{k+2} - 1) c_{k+2} + \dots;$$

nun ist aber

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{k+\nu} - 1) c_{k+\nu} = c_k,$$

also

$$\omega = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_{k-1} c_{k-1} + (a_k + 1) c_k.$$

Dieses ist eine endliche Darstellung und wenn $a_k + 1 < \alpha_k$, so ist dieselbe auch von der gewünschten Form; wo nicht, so muss sein

$$a_k + 1 = \alpha_k,$$

also

$$(a_k + 1)c_k = c_{k-1}.$$

Mithin ist die noch kürzere Darstellung möglich

$$\omega = a_1 c_1 + \ldots + a_{k-2}c_{k-2} + (a_{k-1} + 1)c_{k-1}.$$

Dieses ist nun die gewünschte Form, wenn $a_{k-1} + 1 < \alpha_{k-1}$; wo nicht, so verfährt man wie eben. Schliesslich muss man auf diese Weise zum Ziele gelangen, da $\omega < 1$ vorausgesetzt wird und die Ungleichung stattfindet

$$(a_1 + 1)c_1 \leqq 1.$$

2°. Abgesehen von dem eben erwähnten Falle giebt es für eine Grösse ω *stets nur eine* Darstellung in der gewünschten Form, nämlich die oben gelehrte.

Denn wenn ω sich in zweierlei Weise darstellen liesse:

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_k c_k + a_{k+1} c_{k+1} + \ldots = s$$

und

$$a'_1 c_1 + a'_2 c_2 + \ldots + a'_k c_k + a'_{k+1} c_{k+1} + \ldots = s',$$

so seien die ersten beiden von einander verschiedenen Grössen a diejenigen mit dem Index $k+1$, während die vorangehenden übereinstimmen mögen und zwar sei

$$a_{k+1} > a'_{k+1}$$

dann ist

$$s \geqq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_k c_k + (a'_{k+1} + 1)c_{k+1}. \tag{4}$$

Da wir voraussetzen, dass keine der Darstellungen zu den oben erwähnten gehöre, d. h. zu denen, bei welchen von irgend einem Index ab jedes a um 1 kleiner ist als das entsprechende α, so ist

$$a'_{k+2}c_{k+2} + a'_{k+3}c_{k+3} + \ldots < (\alpha_{k+2} - 1)c_{k+2} + (\alpha_{k+3} - 1)c_{k+3} + \ldots$$

$$\text{d. h. } < c_{k+1},$$

also

$$(5) \qquad s' < a'_1 c_1 + a'_2 c_2 + \dots + a'_k c_k + (a'_{k+1} + 1) c_{k+1};$$

durch Vergleichung von (4) und (5) ergiebt sich

$$s > s'.$$

II.

Wir wollen jetzt mit Hilfe dieser Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise einer Zahl eine ganze transcendente Function bilden, die zwar für eine, nicht aber für jede Wurzel einer irreductibeln Gleichung verschwindet.

Als die irreductible Gleichung wählen wir die Gleichung:

$$kx^2 - 1 = 0,$$

wo k eine positive ganze, nicht quadratische Zahl bedeutet. Es sei ferner ω eine beliebige irrationale Grösse, welche nur die beiden Ungleichungen befriedigt:

$$\omega < 1 \quad \text{und} \quad \omega\sqrt{k} < 1.$$

Wir entwickeln dann die beiden Grössen ω und $\omega\sqrt{k}$ auf die in I gezeigte Weise; dabei soll sein

$$\alpha_1 = k, \qquad \alpha_2 = 2k, \qquad \dots, \qquad \alpha_\nu = \nu k, \quad \dots$$

also

$$c_1 = \frac{1}{\underline{|1}\,k}, \qquad c_2 = \frac{1}{\underline{|2}\,k^2}, \qquad \dots, \qquad c_\nu = \frac{1}{\underline{|\nu}\,k^\nu}, \quad \dots.$$

Die Entwicklungen seien:

$$\omega = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots$$

$$\omega\sqrt{k} = b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots,$$

wo

$$a_\nu < \nu k, \qquad b_\nu < \nu k.$$

Betrachten wir jetzt die beiden Potenzreihen

$$F(x) = \frac{a_1}{\underline{|1}} x^2 + \frac{a_2}{\underline{|2}} x^4 + \ldots + \frac{a_\nu}{\underline{|\nu}} x^{2\nu} + \ldots$$

$$G(x) = \frac{b_1}{\underline{|1}} x^2 + \frac{b_2}{\underline{|2}} x^4 + \ldots + \frac{b_\nu}{\underline{|\nu}} x^{2\nu} + \ldots,$$

so sind diese beständig convergent; denn setzt man statt der Grössen a und b ihre oberen Grenzen, so erhält man noch immer eine beständig convergente Reihe, nämlich die Reihe für $kx^2e^{x^2}$.

Nun ist

$$F\left(\pm\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = \omega, \qquad G\left(\pm\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = \omega\sqrt{k}.$$

Setzt man daher endlich

$$H(x) = F(x) - xG(x),$$

so ist

$$H\left(+\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = 0, \qquad H\left(-\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = 2\omega.$$

Demnach hat die ganze transcendente Function $H(x)$, welche rationale Coefficienten besitzt, die Eigenschaft zwar für eine Wurzel der obigen irreductibeln Gleichung zu verschwinden, nicht aber für die andere.

NOTE SUR LA FONCTION

$$\mathfrak{R}(w\,,\,x\,,\,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i x}}{(w+k)^s}$$

PAR

M. LERCH

À VINOHRADY.

Soit x une quantité dont la partie imaginaire est positive ou nulle, w une quantité réelle positive et moindre que l'unité et soit s une quantité dont la partie réelle est supérieure à l'unité. En représentant par $(w+k)^s$ la quantité $e^{s \lg (w+k)}$, où le logarithme est pris en sens arithmétique, considérons la somme

$\Im x \geq 0$

$0 < w < 1$

$\Re s > 1$

$$\mathfrak{R}(w\,,\,x\,,\,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i x}}{(w+k)^s} \tag{1}$$

convergente pour chaque valeur de s, si la partie imaginaire de x est supérieure à zéro, et ne convergente que pour les valeurs de s dont la partie réelle est positive, si x est une quantité réelle.

En se rappelant de la formule connue

$$\int_0^{\infty} e^{-(w+k)z} z^{s-1}\,dz = \frac{\Gamma(s)}{(w+k)^s}$$

nous aurons

$$\Gamma(s)\mathfrak{R}(w\,,\,x\,,\,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-wz-k(z-2\pi i x)} z^{s-1}\,dz.$$

Acta mathematica. 11. Imprimé le 2 Décembre 1887.

Or on peut démontrer aisément l'égalité suivante

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-wz-k(z-2\pi i x)}\, z^{s-1}\,dz = \int_0^{\infty} z^{s-1}\,dz \sum_{k=0}^{\infty} e^{-wz-k(z-2\pi i x)}$$

et il s'ensuit la formule

$$(2)\qquad \Gamma(s)\mathfrak{R}(w\,,x\,,s) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-wz}\,z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi i x-z}}.$$

En appliquant un raisonnement dû à RIEMANN [1] et employé dans une excellente communication de M. HURWITZ [2] nous ferons voir que la série (1) est une *fonction transcendante entière* de s et nous développerons une relation qui nous semble mériter d'être signalée.

Considérons l'intégrale

$$(3)\qquad K(w\,,x\,,s) = \int_{(\infty\,,0\,,\infty)}\frac{e^{-wz}\,z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi i x-z}}$$

prise le long d'un contour fermé $(\infty\alpha\beta\gamma\alpha\infty)$ enveloppant l'origine au moyen d'un cercle $\alpha\beta\gamma\alpha$ du rayon a ne contenant ni à son intérieur ni à sa périphérie aucun des points $2\pi i(x+\nu)$, $(\nu = 0\,,\pm 1\,,\pm 2\,,\pm 3\,,\ldots)$.

Nous avons représenté, dans cette intégrale, par z^{s-1} la quantité $e^{(s-1)\lg z}$, la partie imaginaire de $\lg z$ étant supposée ou nulle ou positive et non supérieure à 2π, de sorte que la fonction z^{s-1} est continue dans tout le plan des z à l'exception des points de la *coupure* $(0\ldots\infty)$ où elle est discontinue de la manière qu'on peut exprimer par les formules

$$\begin{aligned}(z+0.i)^{s-1} &= z^{s-1} = e^{(s-1)\lg z}\\ (z-0.i)^{s-1} &= e^{2\pi i(s-1)}z^{s-1} = e^{2\pi i(s-1)}\,e^{(s-1)\lg z},\end{aligned}$$

le logarithme y étant pris en sens arithmétique. Nous avons évidemment

$$K = \int_{\infty}^{a}\frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi i x-z}} + \int_{(\alpha\beta\gamma\alpha)}\frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi i x-z}} + e^{(s-1)2\pi i}\int_{a}^{\infty}\frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi i x-z}}$$

---

[1] *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (Monatsber. der Preuss. Akad. der Wissensch. 1859).

[2] Zeitschrift für Mathem. und Physik t. 27, 1882.

et en nous rappelant de ce que

$$\lim_{a=0} \int_{(a\beta\gamma a)} \frac{e^{-wz} z^{s-1}\, dz}{1 - e^{2\pi i x - z}} = 0$$

nous aurons

$$K = 2ie^{s\pi i} \sin \pi s \Gamma(s) \mathfrak{K}(w, x, s),$$

et puisqu'on a

$$\Gamma(s)\Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

il s'ensuit la formule

$$(4) \qquad \mathfrak{K}(w, x, s) = e^{-s\pi i} \Gamma(1 - s) \frac{1}{2\pi i} K(w, x, s).$$

L'intégrale K donnée par la formule (3) existe évidemment pour chaque valeur finie de s et on démontre aisément qu'elle est une fonction transcendante entière de cette variable. Cette intégrale devant s'annuler, d'après le théorème de Cauchy, pour $s = 1, 2, 3, \ldots$ et la fonction $\Gamma(1 - s)$ ne devenant infinie que pour ces valeurs-ci, il suit de la formule (4) que $\mathfrak{K}(w, x, s)$ est elle-même une fonction transcendante entière de s; c. q. f. d.

La fonction sous le signe $\int$ dans la formule (3) ne devient infinie que pour $z = 2\pi i(x + \nu)$, $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. Soit C_n le cercle du centre $2\pi i x$ et du rayon $\pi(2n + 1)$, cercle qui ne contient à sa périphérie aucun des infinis de la dite fonction, et représentons par $\mathfrak{A}_n$ le contour composé du contour $(\lambda_n a\beta\gamma a\lambda_n)$ et du cercle C_n parcouru dans le sens *rétrograde,* λ_n désignant l'intersection du cercle C_n avec l'axe réel. Ce contour $\mathfrak{A}_n$ limite une aire finie simplement connexe qui ne contient d'autres infinis de la fonction sous le signe $\int$ dans la formule (3) que les suivants:

$$z = (x + \nu). \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n)$$

Cela étant, le théorème de Cauchy nous donne

$$(\alpha) \qquad K_n = \int_{\mathfrak{A}_n} \frac{e^{-wz} z^{s-1}\, dz}{1 - e^{2\pi i x - z}} = -2\pi i \sum_{k=-n}^{n} e^{-2\pi i w(x+k)} \{2\pi i(x + k)\}^{s-1},$$

en désignant par $\{2\pi i(x+k)\}^{s-1}$ la quantité $e^{(s-1)\lg 2\pi i(x+k)}$, la partie imaginaire du logarithme étant supposée ou nulle ou positive et non supérieure à 2π.

La quantité w étant réelle, positive et moindre que l'unité la fonction

$$\frac{e^{-wz}z^s}{1-e^{2\pi i x - z}} = \frac{e^{(1-w)z}z^s}{e^z - e^{2\pi i x}}$$

sera moindre en valeur absolue qu'une certaine quantité finie pour chaque valeur de z appartenant à la circonférence C_n, et si nous supposons que la *partie réelle de s est négative,* cette fonction-là devient infiniment petite pour les valeurs indéfiniment croissantes de n, de sorte que nous aurons

$$\lim_{n=\infty} \int_{C_n} \frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi i x - z}} = 0,$$

et par conséquent

$$\lim_{n=\infty} K_n = \int_{\infty, 0, \infty} \frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi i x - z}} = K,$$

de sorte que la formule (α) nous donne

$$K(w, x, s) = -2\pi i e^{-2\pi i w x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2k\pi i w}}{\{2\pi i(x+k)\}^{1-s}}. \tag{5}$$

Il est permis de supposer que la partie réelle de x est entre les limites $(0 \dots 1)$; dans ce cas nous aurons

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2k\pi i w}}{\{2\pi i(x+k)\}^{1-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2k\pi i w}}{\{2\pi i(x+k)\}^{1-s}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i w}e^{2k\pi i w}}{\{-2\pi i(1-x+k)\}^{1-s}}.$$

Or on a, d'après les conventions faites plus haut:

$$\{2\pi i(x+k)\}^{1-s} = (2\pi)^{1-s} e^{\frac{\pi i}{2}(1-s)} (x+k)^{1-s},$$

$$\{-2\pi i(1-x+k)\}^{1-s} = (2\pi)^{1-s} e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)} (1-x+k)^{1-s},$$

de sorte que la formule (5) devient

$$(5') \qquad \frac{ie^{2\pi iwx}}{(2\pi)^s} K(w, x, s)$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2k\pi iw}}{(x+k)^{1-s}} + e^{2\pi iw + \frac{\pi i}{2}(1-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi iw}}{(1-x+k)^{1-s}}.$$

Nous n'avons défini la fonction $\mathfrak{K}$ que pour les valeurs réelles et positives de w. Représentons par $[u^\sigma]$ la quantité $e^{\sigma \lg u}$, la partie imaginaire de $\lg u$ devant être contenue entre les limites $(-\pi i \ldots \pi i)$, de sorte que la fonction $[u^\sigma]$ sera continue et uniforme dans le plan des u affecté de la *coupure* $(-\infty \ldots 0)$ le long de laquelle celle-là est discontinue, et posons d'une manière générale

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi ix}}{[(w+k)^s]}.$$

D'après cette convention nous aurons

$$(x+k)^{1-s} = [(x+k)^{1-s}], \qquad (1-x+k)^{1-s} = e^{2\pi i(1-s)}[(1-x+k)^{1-s}]$$

et la formule (5') deviendra

$$\frac{ie^{2\pi iwx}}{(2\pi)^s} K(w, x, s)$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)} \mathfrak{K}(x, -w, 1-s) + e^{2\pi iw - \frac{3\pi i}{2}(1-s)} \mathfrak{K}(1-x, w, 1-s)$$

ou, d'après (4), en changeant s en $1-s$:

$$(6) \qquad \mathfrak{K}(w, x, 1-s)$$

$$= \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left\{ e^{\pi i(\frac{1}{2}s - 2wx)} \mathfrak{K}(x, -w, s) + e^{\pi i(-\frac{1}{2}s + 2w(1-x))} \mathfrak{K}(1-x, w, s) \right\}.$$

Cette formule devient une relation concrète en supposant que la partie imaginaire de x est supérieure à zéro, que w est une quantité réelle

entre les limites (0 ... 1) et que la partie réelle de s est positive; si elle fait partie de l'intervalle (0 ... 1), la même chose aura lieu aussi dans le cas où la valeur de x est réelle. En exprimant les fonctions $\mathfrak{K}$ par les intégrales K au moyen de la formule (4) on obtient une relation entre les trois intégrales

$$K(w, x, 1-s), \qquad K(x, -w, s), \qquad K(1-x, w, s).$$

Remarquons encore que pour $s = 0$ la formule (5) nous donne d'après une digression facile

$$\frac{e^{2\pi i w x}}{1 - e^{2\pi i x}} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{e^{2k w \pi i}}{k - x},$$

formule qui a été donnée par M. Kronecker dans les Sitzungsberichte der Preuss. Akad. der Wissensch. (Avril 1883 et Juillet 1885).

ÜBER DIE INTEGRALE DES VIELKÖRPER-PROBLEMS[1]

VON

H. BRUNS

in LEIPZIG.

I.

1. Die bis jetzt bekannten Integrale des Vielkörper-Problems, nämlich die Schwerpunkts- und Flächen-Sätze und der Satz von der lebendigen Kraft, besitzen die gemeinsame Eigenschaft, dass sie die Coordinaten und die Geschwindigkeits-Componenten nur in algebraischen Verbindungen enthalten. Dieser Umstand, sowie die Vergeblichkeit der bisherigen Bemühungen zur Auffindung weiterer Integrale legen die Vermuthung nahe, dass der Kreis der algebraischen Integrale mit den genannten abgeschlossen sei. Es soll deshalb hier die Aufgabe behandelt werden, alle algebraischen, die Zeit nicht explicite enthaltenden Integrale aufzusuchen. Das Ergebniss ist, wie hier gleich bemerkt werden soll, negativer Art, d. h. die noch fehlenden Integrale sind sämmtlich transcendent.

Es seien $m_\alpha, x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ die Massen und die Coordinaten der materiellen Punkte, $r_{\alpha\beta}$ die Distanz der Massen m_α, m_β,

$$U = \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

die Kräftefunction für den Fall des Newton'schen Gravitationsgesetzes, dann können wir die Bewegungsgleichungen in der Form

$$(1) \qquad \frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha, \qquad \frac{dX_\alpha}{dt} = \frac{1}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \quad \text{etc.}$$

[1] Mit Genehmigung des Verfassers abgedruckt aus den Berichten der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1887; Math. Cl. 1—39, 55—82.

schreiben. Wir beschränken uns, wie bereits angedeutet, auf die von t freien Integrale und bezeichnen, wie üblich, als Integral einen aus den $x, X, \ldots$ gebildeten Ausdruck φ, dessen Ableitung nach t unter Berücksichtigung der Differentialgleichungen (1) identisch verschwindet, der also der Bedingung

$$(2) \qquad 0 = \sum_a \frac{\partial \varphi}{\partial x_a} X_a + \ldots + \sum_a \frac{\partial \varphi}{\partial X_a} \cdot \frac{1}{m_a} \frac{\partial U}{\partial x_a} + \ldots$$

genügt. Ausserdem werden wir mit Ausdrücken φ zu thun haben, welche die Bedingung (2) zwar nicht identisch befriedigen, wohl aber in Folge der Bedingung $\varphi = 0$. Derartige Ausdrücke wollen wir, in Ermangelung einer anderen Bezeichnungsweise, kurz »Integralgleichungen« nennen. Solche Ausdrücke entstehen z. B. durch Verbindung und Umformung von Gleichungen, welche Bestandtheile einer allgemeinen, particulären oder singulären Lösung der vorgelegten Differentialgleichungen sind. Im vorliegenden Falle haben wir diese verschiedenen Möglichkeiten nicht näher zu untersuchen; wir können deshalb auch davon absehen, dass das vorgelegte Problem überhaupt keine singulären Lösungen besitzt.

Zur Abkürzung des Ausdruckes wollen wir noch festsetzen, dass die Zeichen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R}$ benutzt werden sollen, wenn es sich nur darum handelt, anzuzeigen, dass eine Grösse eine ganze Function oder eine rationale Function ist, ohne dass es dabei auf die besondere Form derselben weiter ankommt.

2. Bei der Aufsuchung der algebraischen Integrale des Systems (1) wollen wir zunächst ein etwas allgemeineres System von Differentialgleichungen zu Grunde legen, und erst später auf das System (1) zurückgehen. Es seien die $2m$ Variablen $x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m$ als Functionen von t durch das Gleichungssystem

$$(3) \qquad \frac{dx_a}{dt} = y_a, \qquad \frac{dy_a}{dt} = A_a(x_1, \ldots, x_m),$$

definirt, wo die A_a algebraische Functionen der $x_1, \ldots, x_m$ ohne t bedeuten. Diese algebraischen Functionen können wir uns immer dargestellt denken als rationale Functionen der x und einer einzigen algebraischen Irrationalität s, welche als Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$(4) \qquad F(s, x_1, \ldots, x_m) = s^n + S_1 s^{n-1} + \ldots + S_n = 0$$

definirt ist, in der $S_\alpha = \mathfrak{S}(x)$. Wir werden vorläufig bezüglich der $A_1, \ldots, A_m, F$ nur folgende zwei Einschränkungen festsetzen. Erstlich soll F eine ganze homogene Function (vom n^{ten} Grade) der Variablen s und x, ohne willkürliche, in den A_α nicht vorkommende Constanten, bedeuten; zweitens sollen die A homogene Functionen der x, s und zwar von einer geraden Ordnung $2N$ sein. Beide Einschränkungen treffen für unser specielles Problem (1) zu. Setzt man nämlich

$$(5) \qquad s = \sum r_{\alpha\beta},$$

und schafft man die Quadratwurzeln, als welche sich die r darstellen, fort, so erhält man für s in der That eine Gleichung der vorausgesetzten Art. Ferner werden die Ableitungen der Kräftefunction in (1) homogene rationale Functionen von den x, y, z und von s, und zwar von der Ordnung -2, indem sich jedes r rational durch diese Variablen ausdrücken lässt. Um sich hiervon zu überzeugen, hat man nur nöthig, in (5) alle Quadratwurzeln bis auf eine fortzuschaffen.

Ein algebraisch von den x, y abhängiges Integral φ der Gleichungen (3) lässt sich nun immer definiren als Wurzel einer gewissen Gleichung

$$(6) \qquad \varphi^p + B_1 \varphi^{p-1} + \ldots + B_p = 0,$$

in welcher $B_\alpha = \mathfrak{R}(x, y)$ ist, und von der wir voraussetzen dürfen, dass sie nicht in Factoren von ähnlicher Beschaffenheit zerlegbar sei. Die Differentiation nach t liefert

$$(7) \qquad \frac{dB_1}{dt} \varphi^{p-1} + \ldots + \frac{dB_p}{dt} = 0.$$

Verschwinden in dieser Gleichung sämmtliche Coefficienten, so sind die B rational aus den x, y zusammengesetzte Integrale, also φ eine algebraische Verbindung rationaler Integrale. Verschwinden die Ableitungen der B nicht, so nehmen sie die Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$ an, und die Gleichungen (6) und (7) besitzen eine gemeinsame Wurzel, d. h. die Gleichung (6) wird reductibel, wenn man den Variablen x, y die Irrationalität s »adjungirt«. Beide Gleichungen besitzen also einen gemeinsamen Theiler

$$(8) \qquad \varphi^q + C_1 \varphi^{q-1} + \ldots + C_q, \qquad [C_\alpha = \mathfrak{R}(x, y, z)],$$

welcher nicht in Factoren von ähnlicher Form zerlegbar ist und der verschwindet, wenn für φ das betrachtete algebraische Integral substituirt wird. Die Wiederholung derselben Schlussweise führt zu der Bedingung

$$\frac{dC_1}{dt}\varphi^{q-1} + \ldots + \frac{dC_q}{dt} = 0,$$

welche wegen der Irreductibilität von (8) nicht anders erfüllt sein kann, als wenn die Ableitungen der C sämmtlich verschwinden. Die C sind daher Integrale von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$. Zusammenfassend können wir also sagen: die gesuchten algebraischen Integrale lassen sich immer als algebraische Verbindungen von Integralen der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$ darstellen.

3. Es sei nun φ ein Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$. Denken wir uns dasselbe als Quotienten zweier Polynome von der Form $\mathfrak{G}(x, y, s)$ geschrieben, so können die Coefficienten in Zähler und Nenner ausser den in den Differentialgleichungen auftretenden Constanten noch irgend welche Parameter $a_1, a_2, \ldots$ enthalten, denen beliebige constante Werthe beigelegt werden dürfen, ohne dass φ aufhört Integral zu sein. Wir wollen zeigen, dass ein solches Integral sich allemal als rationale Verbindung von parameterfreien Integralen derselben Art darstellen lässt. Zu dem Ende denken wir uns einen Quotienten φ' zweier Polynome D und E angesetzt, welche genau dieselben Terme wie Zähler und Nenner von φ, aber mit unbestimmten Coefficienten $D_1, D_2, \ldots$, resp. $E_1, E_2, \ldots$ enthalten.

Die Forderung, dass φ' ein Integral sein soll, führt zu der Bedingung

$$D\frac{dE}{dt} - E\frac{dD}{dt} = 0, \tag{9}$$

welche, vollständig entwickelt, eine gewisse Anzahl von Gleichungen liefert, die in Bezug auf die Coefficienten $D_1, D_2, \ldots, E_1, E_2, \ldots$ bilinear sind. Diese Gleichungen sind mit einander verträglich, denn sie werden durch die Coefficienten von φ erfüllt; andererseits sind die $D_1, D_2, \ldots, E_1, E_2, \ldots$ nicht vollständig durch jene Gleichungen bestimmt, wenn φ die Parameter $a_1, a_2, \ldots$ enthält. Die allgemeinste Art und Weise, der Bedingung (9) durch den Quotienten φ' zu genügen, besteht nun darin, dass die $D_1, D_2, \ldots, E_1, E_2, \ldots$ gewissen Ausdrücken gleichgesetzt werden, welche in rationaler Weise 1) eine gewisse Anzahl von Parametern $b_1, b_2, \ldots$; 2) eine einzige

algebraisch von den Parametern b abhängige Grösse c enthalten. Die Grösse c können wir uns definirt denken als Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$c^k + c_1 c^{k-1} + \ldots + c_k = 0, \tag{10}$$

in welcher die $c_1, c_2, \ldots$ die Form $\mathfrak{R}(b)$ besitzen. Aus dem auf diese Art gewonnenen Integral φ' wird φ erhalten, wenn man für die b gewisse Verbindungen der Parameter a einsetzt. Ferner lässt sich jede an φ' ausführbare Umformung oder Zerlegung auch an φ ausführen, so dass wir uns auf die Untersuchung von φ' beschränken dürfen. Wir denken uns nun φ' auf die Form

$$\varphi' = F_0 + F_1 c + \ldots + F_{k-1} c^{k-1}$$

gebracht, wo die F gleich $\mathfrak{R}(x, y, s, b)$ sind. Dieser Ausdruck kann wegen der Irreductibilität von (10) nicht anders ein Integral sein, als wenn die $F_0, F_1, \ldots$ Integrale sind, d. h. man kann jedes Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$, welches die Parameter in nicht rationaler Weise enthält, als ein Aggregat von Integralen der Form $\mathfrak{R}(x, y, s, b)$ darstellen.[1]

4. Es sei jetzt φ ein Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s, b)$. Wir greifen einen der Parameter heraus — derselbe werde b genannt — und betrachten φ als Function von b. Wenn φ oder der reciproke Werth von φ die Form $\mathfrak{G}(b)$ besitzen, so sind offenbar die Coefficienten der einzelnen Potenzen von b in φ oder dem reciproken Ausdrucke Integrale, welche den Parameter b nicht enthalten. Wenn weder φ, noch der reciproke Werth von φ nach b ganz rational sind, so schreiben wir φ in der Form $H:K$, wo H und K die Form $\mathfrak{G}(b)$ besitzen. Zerlegen wir dann φ in den nach b ganzen Theil φ_1 und in den echtgebrochenen Theil ψ_1, so sind, wie man sofort durch Entwickelung von φ nach fallenden Potenzen von b erkennt, φ_1 und ψ_1 Integrale, und zwar sind auch die Coefficienten der einzelnen Potenzen von b in φ_1 Integrale. Den reciproken Werth von ψ_1, welcher unecht gebrochen ist, zerlegen wir wieder

[1] Wenn die Differentialgleichungen gewisse Parameter $e_1, e_2, \ldots$, welche nicht in der Gleichung für s vorkommen, in rationaler Weise enthalten, so lässt sich auf ähnliche Weise zeigen, dass Integrale, in denen die e algebraisch vorkommen, sich auf solche von der Form $\mathfrak{R}(e_1, e_2, \ldots)$ reduciren lassen. Derartige Parameter sind z. B. beim Vielkörperproblem durch die Massen gegeben.

in den ganzen rationalen Theil φ_2 und in den echt gebrochenen ψ_2, dann sind φ_2 und ψ_2 ebenfalls Integrale. Setzt man dieses Verfahren, welches schliesslich von selbst abbricht, bis an's Ende fort, so gelangt man zu der Kettenbruchdarstellung

$$\varphi = \varphi_1 + 1 : \varphi_2 + 1 : \varphi_3 + \ldots,$$

wo die φ_a ganze Functionen der b bedeuten, deren Coefficienten Integrale ohne den Parameter b sind. Durch Wiedereinrichtung des Kettenbruches erhält man dann φ als Quotienten zweier ganzen Functionen von b, deren Coefficienten von b freie Integrale der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$ sind.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens erkennt man, dass jedes Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$, welches gewisse Parameter $b_1, b_2, \ldots$ in rationaler Weise enthält, allemal aus einer Anzahl parameterfreier Integrale in ganz oder gebrochen linearer Form zusammengesetzt werden kann. Dieser Satz führt in Verbindung mit den über die Differentialgleichungen (3) gemachten Voraussetzungen sofort zu einer für das Folgende wichtigen Consequenz. Es sei k eine beliebige constante Zahl; man ersetze in den Differentialgleichungen die Grössen x, t und entsprechend s, y durch

$$xk^2, \; tk^{1-2N}, \; sk^2, \; yk^{1+2N},$$

wo N die in § 2 angegebene Bedeutung besitzt, dann hebt sich die Grösse k aus den Differentialgleichungen heraus, und es geht deswegen jedes Integral φ durch diese Substitution wiederum in ein Integral über, welches jedoch jetzt im Allgemeinen den Parameter k enthält. Es sei nun φ ein parameterfreies Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$, welches durch die angegebene Substitution in φ' übergehen möge. Wir schreiben φ in der Form »$\mathfrak{G}(x, y, s)$ dividirt durch $\mathfrak{G}'(x, y, s)$«, dann nimmt jeder Term in Zähler und Nenner nach der Substitution wieder die ursprüngliche Gestalt an, jedoch mit einer bestimmten Potenz von k multiplicirt, deren Exponenten wir als die Dimension des betreffenden Terms bezeichnen. Schreiben wir nun Zähler und Nenner von φ' in der Form

$$L = L_0 k^p + L_1 k^{p-1} + \ldots + L_p,$$
$$M = M_0 k^q + M_1 k^{q-1} + \ldots + M_q,$$

so umfassen die Coefficienten L_α, M_α immer nur Terme gleicher Dimension. Diese Coefficienten müssen nun durch Multiplication mit einem und demselben Factor in Integrale übergehen, und man erkennt leicht, dass man für diesen Multiplicator den reciproken Werth irgend eines der Coefficienten z. B. $1 : L_0$ wählen darf. Wir erhalten dann φ linear zusammengesetzt aus Integralen der Form »$\mathfrak{G}(x, y, s)$ dividirt durch $\mathfrak{G}'(x, y, s)$«, deren Zähler und Nenner nur Terme von gleicher Dimension enthalten. Solche Integrale sollen »homogen in den Dimensionen« oder, wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, schlechtweg homogen heissen.

5. Es sei jetzt φ ein homogenes Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$, welches wir uns in die Gestalt $\mathfrak{G}(x, y, s) : \mathfrak{G}'(x, y, s)$ gebracht denken. Da ein von den y freier Ausdruck nicht der Bedingung

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

identisch genügen kann, wenn er nicht gleichzeitig von den x frei ist, so muss wenigstens eine der Variabeln y in φ vorkommen. Es sei dies y_1. Wir denken uns Zähler und Nenner von φ nach y_1 in Linearfactoren zerlegt, setzen also an

$$\varphi = Q(y_1 - \eta_1)^\alpha (y_1 - \eta_2)^\beta (y_1 - \eta_3)^\gamma \ldots, \tag{11}$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ganze positive oder negative Zahlen, die η rationale oder algebraische Functionen der Variabeln x, y, s unter Ausschluss von y_1 bedeuten und Q eine rationale Function derselben Variablen ist. Da φ Integral ist, so erhalten wir

$$0 = \frac{d \log \varphi}{dt} = \frac{d \log Q}{dt} + \sum \frac{\alpha}{y_1 - \eta_1}\left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{d\eta_1}{dt}\right).$$

Zur Umformung dieses Ausdruckes wollen wir für den Augenblick die Zeit t, so weit sie in den Variablen x, y, s unter Ausschluss von x_1 und y_1 vorkommt, mit τ bezeichnen, dann ist

$$\frac{d \log Q}{dt} = \frac{\partial \log Q}{\partial x_1} y_1 + \frac{d \log Q}{d\tau},$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} y_1 + \frac{d\eta_1}{d\tau},$$

also

$$0 = \frac{\partial \log Q}{\partial x_1} y_1 + \frac{d \log Q}{d\tau} - \sum \alpha \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \sum \frac{\alpha}{y_1 - \eta_1}\left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{d\eta_1}{d\tau} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}\right).$$

Da nun y_1 in dieser Gleichung nur insofern vorkommt, als es explicite hingeschrieben ist, so folgt

$$(12) \qquad \frac{dy_1}{dt} - \frac{d\eta_1}{d\tau} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = 0.$$

Zur weiteren Verwendung dieser Relation, welche offenbar in Bezug auf η_1 eine partielle Differentialgleichung darstellt, denken wir uns jetzt Zähler und Nenner des betrachteten Integrals φ, statt in Linearfactoren, so weit als möglich in die einfachsten Factoren zerlegt, welche noch die Form $\mathfrak{G}(y)$ resp. $\mathfrak{R}(x, s)$ besitzen. Die von einander verschiedenen Theiler, welche die Variablen y wirklich enthalten, mögen mit $\psi_1, \psi_2, \ldots$ bezeichnet werden, so dass wir ansetzen können

$$\varphi = T\psi_1^\lambda \psi_2^\mu, \ldots,$$

wo die $\lambda, \mu, \ldots$ ganze positive oder negative Zahlen bedeuten und T die Form $\mathfrak{R}(x, s)$ besitzt. Die Wurzeln η in (11) werden dann erhalten, wenn man diejenigen ψ, welche y_1 enthalten, gleich Null setzt und nach y_1 auflöst. Es sei $\psi_1(y_1)$ ein solcher Theiler, welcher die in (12) benutzte Wurzel η_1 liefert. Dann erhält man aus der Identität

$$(13) \qquad \psi_1(\eta_1) = 0$$

die Gleichungen

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_\alpha}, \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial y_\beta} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y_\beta}. \qquad \binom{\alpha = 1, 2, \ldots, m}{\beta = 2, 3, \ldots, m}$$

Beachtet man nun noch die Differentialgleichungen (3), so geht (12) successive über in

$$A_1 - \sum_\beta y_\beta \frac{\partial \eta_1}{\partial x_\beta} - \sum_\beta A_\beta \frac{\partial \eta_1}{\partial y_\beta} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = 0,$$

$$(\beta = 2, 3, \ldots, m)$$

$$(14) \qquad A_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1} + \sum_\beta y_\beta \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_\beta} + \sum_\beta A_\beta \frac{\partial \psi_1}{\partial y_\beta} + \eta_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = 0.$$

Die linke Seite der letzteren Gleichung ist offenbar nichts anderes, als der vollständig entwickelte Ausdruck für

$$\frac{d\psi_1(y_1)}{dt},$$

vorausgesetzt, dass für y_1 überall die aus (13) sich ergebende Wurzel η_1 geschrieben wird. Hiernach ist also $\psi_1(y_1)$ eine Integralgleichung, denn die Ableitung von ψ_1 nach t verschwindet nach (14) wenn nicht identisch, so doch sicher in Folge der Gleichung

$$\psi_1(y_1) = 0.$$

Derselbe Schluss gilt offenbar für die übrigen Theiler ψ. Angenommen nun man könnte beweisen, dass jeder der Theiler $\psi_1, \psi_2, \ldots$ durch Multiplication mit einem Factor von der Form $\mathfrak{R}(x, s)$ in ein Integral $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ verwandelt werden kann, so würde daraus folgen, dass jedes homogenes Integral φ sich auf die Form

$$\varphi = U\varphi_1^\lambda \varphi_2^\mu \ldots$$

bringen lässt, wo die homogenen Integrale $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die Form $\mathfrak{G}(y)$ resp. $\mathfrak{R}(x, s)$ besitzen, und der Factor U, welcher höchstens die x, s enthalten kann, sich auf eine Constante reducirt, weil er der Bedingung

$$\frac{dU}{dt} = 0$$

genügen muss. Ferner würde damit die Aufgabe, alle algebraischen Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen zu finden, auf die andere zurückgeführt sein, alle homogenen Integrale der Form $\mathfrak{G}(y)$ resp. $\mathfrak{R}(x, s)$ zu ermitteln. Wir werden nun zeigen, dass eine solche Reduction der homogenen Integralgleichungen $\psi_1, \psi_2, \ldots$, auf die uns die Untersuchung geführt hat, unter den hier gemachten Voraussetzungen in der That immer möglich ist.

6. Es sei ψ eine homogene Integralgleichung der Form $\mathfrak{G}(y)$ resp. $\mathfrak{R}(x, s)$, welche sich nicht in Theiler von ähnlicher Gestalt, die die y wirklich enthalten, zerlegen lässt. Der vollständig entwickelte Ausdruck für die Ableitung von ψ nach t besitzt eine ähnliche Gestalt wie ψ, nur dass

der Grad in Bezug auf die y um eine Einheit höher ist als in ψ. Diese Ableitung muss verschwinden, wenn ψ verschwindet, muss also wegen der vorausgesetzten Irreductibilität von ψ durch ψ selber theilbar sein, so dass wir ansetzen können

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi \cdot \omega,$$

wo ω in Bezug auf die y ganz linear und ebenso wie ψ in den Dimensionen homogen ist. Schreiben wir

$$\omega = \omega_0 + \Sigma y_a \omega_a,$$

so sind die $\omega_0, \omega_1, \ldots$ homogene rationale Functionen von den x, s. Substituirt man ferner für die Variabeln x, t, s, y wie früher

$$xk^2, \; tk^{1-2N}, \; sk^2, \; yk^{1+2N},$$

so ergibt sich, dass die Dimension von ω ungerade ist. Ferner sind die Dimensionen der $\omega_0, \omega_1, \ldots$ gerade, die der y ungerade, es muss also in ω das Glied ω_0 fehlen, d. h. ω ist in Bezug auf die y homogen linear. Dieser Umstand ist für die folgende Beweisführung von wesentlicher Bedeutung und bildet den Grund, weshalb wir in den Differentialgleichungen (3) die A als homogene Functionen gerader Ordnung in Bezug auf die x, s vorausgesetzt haben. Es wäre möglich, dass diese Einschränkung bei einem andern Beweisgange sich als unnöthig herausstellt. Ich gehe auf diese Frage nicht näher ein, weil sie für unser eigentliches Ziel, nämlich die Aufsuchung der algebraischen Integrale des Eingangs aufgestellten Vielkörper-Problems, unerheblich ist.

Es werde ψ als Polynom der y geschrieben; sein Grad in Bezug auf diese Variabeln sei p, und es werde angesetzt

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \cdots,$$

wo die $\psi_0, \psi_1, \ldots$ die Terme vom Grade $p, p-1, \ldots$ zusammenfassen. Mit Rücksicht auf das Vorhergehende ist dann

$$(15) \qquad \sum y_a \frac{\partial \psi_0}{\partial x_a} = \psi_0 \omega, \qquad \omega = \sum y_a \frac{\partial \log \psi_0}{\partial x_a},$$

so dass es für die Untersuchung von ω lediglich auf das Anfangsglied ψ_0 ankommt. Die Coefficienten ω_a in ω hängen auf einfache Weise mit gewissen Coefficienten in ψ_0 zusammen. Man ordne ψ_0 nach einem der darin vorkommenden y — sagen wir y_1 — und setze an

$$\psi_0 = V_0 y_1^r + V_1 y_1^{r-1} + \ldots + V_r,$$

wo die V ganze Functionen der übrigen y sind, dann folgt aus (15)

$$(16) \qquad \frac{\partial V_0}{\partial x_1} = V_0 \omega_1 .$$

Sind $a, a', \ldots$ die Coefficienten des Polynoms V_0, so ist, da die Relation (16) für beliebige y bestehen muss,

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} = a\omega_1, \qquad \frac{\partial a'}{\partial x_1} = a'\omega_1, \quad \text{etc.};$$

wir können also allgemein ansetzen

$$\omega_a = \frac{\partial \log a_a}{\partial x_a},$$

wo die a_a gewisse Coefficienten in ψ_0 bedeuten.

Als Vorbereitung für das Folgende betrachten wir zunächst den Fall, wo die Coefficienten in ψ_0 sämmtlich von der Irrationalität s frei sind. Es sei χ eine Function der x, y, ganz homogen nach den y, rational homogen nach den x, welche der Bedingung

$$(17) \qquad \begin{gathered} \sum y_a \frac{\partial \chi}{\partial x_a} = \chi \cdot \tau, \\ \tau = \sum y_a \frac{\partial \log b_a}{\partial x_a}, \end{gathered}$$

genügen, wo die b_a gewisse Coefficienten des nach den y geordneten Ausdruckes χ bedeuten. Man denke sich sämmtliche Coefficienten in χ auf den kleinsten gemeinsamen Nenner M gebracht und den etwa vorhandenen gemeinsamen grössten Theiler L aller Coefficientenzähler aufgesucht, dann ist

$$\chi' = \frac{M}{L}\chi$$

ein Ausdruck von der Form $\mathfrak{G}(x, y)$, welcher keinen von den y unabhängigen Theiler der Form $\mathfrak{G}(x)$ besitzt. Ferner wird

$$(18) \qquad \begin{gathered} \sum y_a \frac{\partial \chi'}{\partial x_a} = \chi' \cdot \tau', \\ \tau' = \sum y_a \frac{\partial \log b'_a}{\partial x_a}, \end{gathered}$$

wo die b'_a gewisse Coefficienten in χ' bedeuten. Es sei nun Q ein irreductibler Theiler von b'_a, welcher die Variable x_a wirklich enthält, dann tritt in τ' ein Glied der Form

$$\frac{y_a}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x_a}$$

auf, welches sich, so lange specielle Werthsysteme der y ausgeschlossen bleiben, nicht gegen andere Glieder in τ' fortheben kann. Der Ausdruck τ' wird also sicher unendlich für alle endlichen Werthsysteme der x, für welche Q verschwindet. Es müsste also, da für endliche x die linke Seite von (18) sicher endlich bleibt, wider die Voraussetzung, χ' durch Q theilbar sein. Der Coefficient b'_a ist daher von x_a unabhängig, d. h. τ' ist gleich Null und

$$\sum y_a \frac{\partial \chi'}{\partial x_a} = 0,$$

woraus folgt, dass sich χ' als eine ganze rationale Verbindung der Ausdrücke

$$x_2 y_1 - x_1 y_2, \quad \ldots, \quad x_m y_1 - x_1 y_m,$$

ohne x_1 darstellen lässt.

7. Zu der Relation

$$(15) \qquad \sum y_a \frac{\partial \log \psi_0}{\partial x_a} = \omega = \sum y_a \frac{\partial \log a_a}{\partial x_a}$$

zurückkehrend, wollen wir den Satz beweisen, dass der Ausdruck

$$\Sigma \omega_a dx_a$$

ein totales Differential ist, dass also die sogenannten Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \omega_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial^2 \log}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{a_\alpha}{a_\beta}\right) = 0$$

sämmtlich erfüllt sind. Zu dem Ende wollen wir in ψ_0 die Grössen $y_3, \ldots, y_m$ gleich Null setzen, jedoch, um Unbestimmtheiten zu vermeiden, folgendermassen vorgehen. Wenn ψ_0 durch eine Potenz von y_m theilbar ist, so unterdrücken wir diesen Theiler, welcher für die Gleichung (15) bedeutungslos ist, und bezeichnen ψ_0 mit $\psi_{0,m}$. Darauf setzen wir y_m gleich Null und bezeichnen den Ausdruck, in welchem $\psi_{0,m}$ hierdurch übergeht mit $\psi_{0,m-1}$. Derselbe genügt der Gleichung

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \log}{\partial x_\alpha} \psi_{0,m-1} = \sum y_\alpha \frac{\partial \log a_\alpha}{\partial x_\alpha}. \qquad (\alpha=1,2,\ldots,m-1)$$

Hierauf unterdrücken wir in $\psi_{0,m-1}$ die etwa als Theiler auftretende Potenz von y_{m-1} und setzen y_{m-1} gleich Null, wodurch wir zu dem Ausdrucke $\psi_{0,m-2}$ gelangen, u. s. w. Gelangt man auf diese Weise, bevor auch y_3 gleich Null gesetzt wird, für $\varphi_{0,k}$ zu einem Monom von der Form

$$Cy_1^\alpha y_2^\beta \ldots y_k^\lambda,$$

so kann offenbar in ω für die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ der eine Coefficient C gesetzt werden, und es sind die zu den aus $x_1, \ldots, x_k$ gebildeten Variablenpaaren gehörigen Integrabilitätsbedingungen von selbst erfüllt. Wir haben deshalb nur noch den ungünstigsten Fall zu verfolgen, dass man nämlich, nachdem auch y_3 beseitigt ist, mit Unterdrückung der einflusslosen Potenztheiler zu einem ψ_{02} von der Form

$$\psi_{02} = c_0 y_1^q + c_1 y_1^{q-1} y_2 + \ldots + c_q y_2^q$$

gelangt, in welchem q mindestens gleich Eins und die Endcoefficienten c_0 und c_q von Null verschieden sind. Dieses ψ_{02} genügt der Bedingung

$$\sum_\alpha y_\alpha \frac{\partial \log \psi_{02}}{\partial x_\alpha} = \sum_\alpha y_\alpha \omega_\alpha, \qquad (\alpha=1,2)$$

wo in

$$\omega_\alpha = \frac{\partial \log a_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

für die Coefficienten a_1, a_2 offenbar c_0 und c_q zu nehmen sind. Die gefundenen Relationen formen wir um in

$$(19)\qquad \begin{gathered} \psi' = \psi_{02} : c_0 = y_1^q + \frac{c_1}{c_0} y_1^{q-1} y_2 + \ldots + \frac{c_q}{c_0} y_2^q, \\ \sum_1^2 y_a \frac{\partial \log \psi'}{\partial x_a} = y_2 \frac{\partial \log}{\partial x_2}\left(\frac{c_q}{c_0}\right). \end{gathered}$$

Die Coefficienten von ψ' können nun die Irrationalität s enthalten. Ist dies der Fall, so gilt die Gleichung (19) für alle Wurzelwerthe $s_1, s_2, \ldots, s_n$, welche s annehmen kann. Summiren wir die den einzelnen Wurzeln entsprechenden Gleichungen (19) und setzen

$$\psi'(s_1) \cdot \psi'(s_2) \ldots \psi'(s_n) = \Psi,$$

$$\frac{c_q(s_1)}{c_0(s_1)} \cdot \frac{c_q(s_2)}{c_0(s_2)} \ldots \frac{c_q(s_n)}{c_0(s_n)} = C,$$

so sind Ψ und C homogen rational nach den x; ferner ist

$$\sum_1^2 y_a \frac{\partial \log \Psi}{\partial x_a} = y_a \frac{\partial \log C}{\partial x_2}.$$

Der Ausdruck Ψ ist also eine Function von derselben Beschaffenheit, wie die vorhin mit χ bezeichnete. Bedeutet H den kleinsten gemeinsamen Nenner der Coefficienten in Ψ, so ist $H\Psi$ eine Function der Form $\mathfrak{G}(x, y)$, welche keinen von den y unabhängigen Theiler der Form $\mathfrak{G}(x)$ besitzt und der Bedingung

$$y_1 \frac{\partial(H\Psi)}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial(H\Psi)}{\partial x_2} = 0$$

genügt. Es ist also, abgesehen von einem constanten Coefficienten

$$H\Psi = (y_1 x_2 - y_2 x_1)^{nq},$$

$$\Psi = \left(y_1 - y_2 \frac{x_1}{x_2}\right)^{nq}.$$

Hieraus folgt sofort

$$\psi' = \left(y_1 - y_2 \frac{x_1}{x_2}\right)^q,$$

$$\frac{c_q}{c_0} = \frac{a_2}{a_1} = \pm \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^q,$$

$$\frac{\partial^2 \log}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right) = 0.$$

Damit sind offenbar die Integrabilitätsbedingungen allgemein bewiesen, und wir haben ferner für das ursprüngliche ψ_0 die Relation

$$\sum_1^m y_\alpha \frac{\partial \log}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\psi_0}{a_1}\right) = -\sum_2^m y_\alpha \frac{q_\alpha}{x_\alpha},$$

wo die q_α ganze positive Zahlen, die Null eingeschlossen bedeuten. Ferner erkennt man hieraus, dass

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi}{a_1} x_2^{q_2} \ldots x_m^{q_m}\right) = 0$$

ist, dass also die Integralgleichung ψ durch den Multiplicator

$$(x_2^{q_2} \ldots x_m^{q_m}) : a_1$$

in ein Integral verwandelt wird. W. z. b. w.

Es sei jetzt φ das zu ψ gehörige Integral. Wir spalten dasselbe ähnlich wie ψ, setzen also an

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots,$$

wo φ_0 sich von ψ_0 durch den integrirenden Multiplicator unterscheidet und der Bedingung

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\alpha} = 0$$

genügt. Wir wollen nun zeigen, dass φ_0 sich als eine ganze rationale Function der $m - 1$ Verbindungen

$$x_2 y_1 - x_1 y_2, \qquad x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad \ldots, \quad x_m y_1 - x_1 y_m$$

ohne x_1 darstellen lässt. Zur Vereinfachung des Beweises schicken wir folgende Bemerkung vorauf.

8. Angenommen man hätte in dem ursprünglichen System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = y_\alpha, \qquad \frac{dy_\alpha}{dt} = A_\alpha(x_1, x_2, \ldots)$$

statt der Variabeln x, y andere Variable ξ, η durch die lineare Substitution

$$x_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta}\xi_\beta, \qquad y_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta}\eta_\beta$$

eingeführt, in der die c feste Zahlen mit nicht verschwindender Determinante bedeuten, so würde dadurch an den über die Differentialgleichungen und die Irrationalität s gemachten Voraussetzungen nichts geändert worden sein; es würde also auch die ganze bisherige Untersuchung ohne Weiteres für das transformirte System gültig bleiben. Insbesondere würde der Satz, dass die hier untersuchten Integralgleichungen durch einen Multiplicator von der Form $\mathfrak{R}(x, s)$ in Integrale übergehen, wenn er vor der Transformation gilt, auch nach derselben gelten und umgekehrt. Diese Bemerkung benutzen wir in folgender Weise. Die Discriminante Δ der Gleichung für s ist eine homogene ganze rationale Function der x vom Grade

$$n(n-1) = \mu.$$

Die Discriminante Δ' der transformirten Gleichung für s geht aus Δ hervor, wenn man statt der x die ξ einführt. Bei passender Wahl der Substitutionscoefficienten c lässt sich nun stets erreichen, dass in Δ' die Glieder mit

$$\xi_1^\mu, \xi_2^\mu, \ldots, \xi_m^\mu$$

wirklich vorkommen. Es ist deshalb keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, dass bereits in der ursprünglichen Discriminante Δ die Glieder mit

$$x_1^\mu, x_2^\mu, \ldots, x_m^\mu$$

wirklich vorkommen, da diese Eigenschaft, wenn sie ursprünglich nicht vorhanden ist, durch eine vor Beginn der ganzen Untersuchung vorgenommene Transformation stets herbeigeführt werden kann.

Wir denken uns nun in der Gleichung für s den Variablen $x_2, \ldots, x_m$ irgend welche endliche Werthe, dem x_1 dagegen einen ausserordentlich grossen Werth beigelegt, dann lässt sich jede Wurzel s nach fallenden Potenzen von x_1 in eine Reihe entwickeln, welche unter den gemachten Voraussetzungen die Form

$$s = \sigma x_1 + \sigma_0 + \frac{\sigma_1}{x_1} + \frac{\sigma_2}{x_1^2} + \ldots$$

besitzt. Hierin ist σ die Wurzel einer Gleichung

$$\sigma^n + \Sigma_1 \sigma^{n-1} + \ldots + \Sigma_n = 0,$$

welche keine mehrfachen Wurzeln besitzt und deren Coefficienten nur von den in der ursprünglichen Gleichung für s auftretenden Constanten, aber nicht von den x abhängen. Die übrigen Coefficienten $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ besitzen die Gestalt $\mathfrak{R}(\sigma)$ resp. $\mathfrak{G}(x_2, \ldots, x_m)$.

Führt man jetzt statt der Variablen x neue Variable p durch die lineare Substitution

$$p_1 = x_1, \qquad p_2 = x_2 - x_1 \frac{y_2}{y_1}, \quad \ldots, \quad p_m = x_m - x_1 \frac{y_m}{y_1}$$

ein, so erhält man das Glied mit p_1^n in der Discriminante, wenn man an Stelle der $x_1, \ldots, x_m$ resp.

$$p_1, \quad p_1 \frac{y_2}{y_1}, \quad \ldots, \quad p_1 \frac{y_m}{y_1}$$

schreibt. Der Coefficient von p_1^n in der Discriminante wird also, so lange specielle Werthsysteme der y ausgeschlossen werden, von Null verschieden sein. Infolge dessen lässt sich für grosse Werthe von p_1 und endliche Werthe der $p_2, \ldots, p_m$ die Irrationalität s nach fallenden Potenzen von p_1 in die Reihe

$$s = \rho p_1 + \rho_0 + \frac{\rho_1}{p_1} + \frac{\rho_2}{p_1^2} + \ldots$$

entwickeln, wo ρ eine von den p unabhängige Irrationalität, $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots$ dagegen ganze rationale Functionen der $\rho, p_2, \ldots, p_m$ bedeuten.

Dies vorausgeschickt betrachten wir wieder den Anfangsterm φ_0 in dem Integral φ. Derselbe stellt sich, wenn er die Irrationalität s wirklich enthält, zunächst dar in der Form

$$\mathfrak{R}(p_1, p_2, \ldots, p_m, s),$$

muss aber in Wirklichkeit von p_1 frei sein. Entwickelt man nun s und darauf φ_0 nach fallenden Potenzen von p_1, so muss diese Reihe sich auf den einen von p_1 freien Term reduciren, welcher nach den vorausgehenden Bemerkungen die Variablen $p_2, \ldots, p_m$ nur in rationaler Weise enthält, d. h. φ_0 enthält auch die x nur in rationaler Weise und ist in Wirklichkeit frei von s. Hieraus folgt weiter, wenn man die in § 6 über die Ausdrücke χ und χ' gemachten Bemerkungen beachtet, dass φ_0 eine ganze Function der x ist.

9. Fassen wir die Resultate, zu denen wir bisher gelangt sind, zusammen, so können wir folgende Sätze aussprechen.

Gegeben ist das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_a}{dt} = y_a, \qquad \frac{dy_a}{dt} = A_a, \qquad (a=1,2,\ldots,m)$$

in welchem die A als homogene rationale Functionen von der geraden Ordnung $2N$ aus den x und einer gewissen Irrationalität s zusammengesetzt sind. Die Grösse s ist Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$s^n + S_1 s^{n-1} + \ldots + S_n = 0,$$

deren linke Seite eine ganze homogene Function der s, x von der n-ten Ordnung bildet. Wenn das vorgelegte System von Differentialgleichungen algebraische, von t freie Integrale besitzt, so lassen sich dieselben allemal darstellen als algebraische Functionen eines oder mehrerer Integrale φ, welche folgende Eigenschaften besitzen:

1) Jedes φ ist eine ganze rationale Function der y, eine rationale Function der x und s.

2) φ ist in den Dimensionen homogen, d. h. wenn man für die x, s, y resp. setzt

$$xk^2, \quad sk^2, \quad yk^{1+2N}, \quad (k = \text{Constante}),$$

so nimmt φ wieder die ursprüngliche Gestalt an, jedoch versehen mit einer gewissen Potenz von k als Factor.

3) Bedeutet φ_0 das Aggregat der Glieder in φ, welche in Bezug auf die y von der höchsten Ordnung sind, so sind, wenn φ_0 nach den y geordnet wird, die Coefficienten ganze rationale Functionen der x ohne gemeinsamen Theiler.

4) Der Ausdruck φ_0 genügt der Bedingung

$$\sum y_a \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_a} = 0,$$

enthält also die x nur in den Verbindungen

$$y_1 x_a - y_a x_1. \qquad (a=2,3,\ldots,n)$$

Nachdem wir bis zu diesem Punkte gelangt sind, brechen wir die allgemeine Untersuchung ab und wenden uns wieder zu dem Vielkörper-Problem zurück, welches ja den Ausgangspunkt bildete, und welches, wie bereits bemerkt, einen speciellen Fall der hier betrachteten Differentialgleichungen repräsentirt.

10. Es seien

$$m_a, \quad x_a, \quad y_a, \quad z_a \qquad (a=1,2,\ldots,n)$$

die Massen und die Coordinaten der einzelnen materiellen Punkte in dem betrachteten Vielkörper-Problem,

$$X_a, \quad Y_a, \quad Z_a$$

die Geschwindigkeitscomponenten, $r_{a\beta}$ die Distanz der beiden Massen m_a, m_β, dann haben wir

$$\frac{dx_a}{dt} = X_a, \qquad \frac{dX_a}{dt} = A_a = \sum_\beta m_\beta \frac{x_\beta - x_a}{r_{a\beta}^3},$$

$$\frac{dy_a}{dt} = Y_a, \qquad \frac{dY_a}{dt} = B_a = \sum_\beta m_\beta \frac{y_\beta - y_a}{r_{a\beta}^3},$$

$$\frac{dz_a}{dt} = Z_a, \qquad \frac{dZ_a}{dt} = C_a = \sum_\beta m_\beta \frac{z_\beta - z_a}{r_{a\beta}^3},$$

wo bei den Summationen, ebenso wie weiterhin, zu beachten ist, dass Glieder mit r_{aa} nicht vorkommen dürfen. Es sei φ ein homogenes Integral von der Form

$$\mathfrak{G}(X, Y, Z) \quad \text{resp.} \quad \mathfrak{K}(x, y, z),$$

welches in Bezug auf die X, Y, Z vom Grade p ist; ferner setze man

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots,$$

wo die $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ die Aggregate der Glieder bedeuten, welche in den X, Y, Z von den Ordnungen $p, p-1, \dots$ sind; endlich bezeichne man die Zeit t, je nachdem sie in den Coordinaten oder in den Geschwindigkeiten vorkommt, mit u resp. v, führe also die Operationssymbole

$$\frac{\partial}{\partial u} = \sum_a \left(X_a \frac{\partial}{\partial x_a} + Y_a \frac{\partial}{\partial y_a} + Z_a \frac{\partial}{\partial z_a} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \sum_a \left(A_a \frac{\partial}{\partial X_a} + B_a \frac{\partial}{\partial Y_a} + C_a \frac{\partial}{\partial Z_a} \right)$$

ein, dann muss sein

$$(22) \qquad \frac{\partial \varphi_0}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_0}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = 0.$$

Diese beiden Bedingungen werden sich als für unseren Zweck ausreichend erweisen. Die erste Bedingung besagt, dass φ_0 die x, y, z nur ganz rational in den Verbindungen

$$f_a = x_a X_1 - x_1 X_a, \qquad g_a = y_a X_1 - x_1 Y_a, \qquad h_a = z_a X_1 - x_1 Z_a$$

enthält, d. h. wenn man statt der x, y, z in φ_0 die Ausdrücke

$$x_a = \frac{f_a}{X_1} + x_1 \frac{X_a}{X_1}, \qquad y_a = \frac{g_a}{X_1} + x_1 \frac{Y_a}{X_1}, \qquad z_a = \frac{h_a}{X_1} + x_1 \frac{Z_a}{X_1}$$

einsetzt, so verwandelt sich φ_0 in eine Function der Grössen

$$f_2, \dots, f_n; \; g_1, \dots, g_n; \; h_1, \dots, h_n,$$

welche von x_1 frei ist, und abgesehen davon, dass eine Potenz von X_1

als Nenner vorkommen kann, die X, Y, Z nur ganz rational enthält. Im Folgenden werden wir voraussetzen, dass φ_0 bereits durch die f, g, h ausgedrückt sei.

Bilden wir jetzt die Ableitung von φ_0 nach v, so enthalten die einzelnen Glieder im Nenner die dritte Potenz eines $r_{\alpha\beta}$, sind aber im Übrigen rational aus den verschiedenen Variabeln zusammengesetzt. Bilden wir ferner die verschiedenen Irrationalitäten, welche einschliesslich der $r_{\alpha\beta}$ selber dadurch entstehen, dass man je zwei, je drei u. s. w. verschiedene $r_{\alpha\beta}$ mit einander multiplicirt, und bezeichnet man diese Irrationalitäten in irgend einer Reihenfolge mit $\rho_1, \rho_2, \ldots$, so lässt sich φ_2 stets auf die Gestalt

$$\varphi_2 = \varphi_{20} + \sum \frac{\varphi_{2\alpha}}{\rho_\alpha}$$

bringen, wo die $\varphi_{20}, \varphi_{21}, \ldots$ rational aus den x, y, z, X, Y, Z zusammengesetzt sind. Mit Rücksicht auf (22) folgt daraus, dass

$$\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial u} = 0$$

ist, und dass ferner der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi_{2\alpha}}{\rho}\right)$$

allemal verschwindet, wenn die Irrationalität ρ sich nicht auf ein einziges $r_{\alpha\beta}$ reducirt. Führt man ferner in φ_2 statt der x, y, z die f, g, h ein, wobei möglicherweise x_1 sich nicht aus φ_2 fortheben wird, so geht die partielle Ableitung von φ_2 nach u über in

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} X_1.$$

Ersetzt man ebenso in der Ableitung von φ_0 nach v die ursprünglichen Variablen durch die f, g, h, X, Y, Z und x_1, und integrirt nach x_1, indem alle übrigen Grössen als constant angesehen werden, so darf die Integration keine logarithmischen, sondern nur algebraische Glieder liefern. Dieser Umstand wird uns gestatten, die Verbindungen der f, g, h, aus welchen sich φ_0 zusammensetzt, vollständig zu bestimmen.

11. Zur Abkürzung der Ausdrucksweise wollen wir festsetzen, dass die Indices $\alpha, \beta, \ldots$ die Werthe $1, 2, \ldots, n$, dagegen die Indices $\lambda, \mu, \ldots$ nur die Werthe $2, 3, \ldots, n$ annehmen sollen. Wir suchen nun diejenigen Glieder in der Ableitung von φ_0 nach v auf, welche die dritte Potenz von $r_{1\lambda}$ resp. $r_{\lambda\mu}$ im Nenner enthalten. Die Ableitung von φ_0 besitzt zunächst die Gestalt

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial g_1}(y_1 A_1 - x_1 B_1) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial h_1}(z_1 A_1 - x_1 C_1)$$

$$+ \sum_\lambda \left\{ \frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda}(x_\lambda A_1 - x_1 A_\lambda) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial g_\lambda}(y_\lambda A_1 - x_1 B_\lambda) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial h_\lambda}(z_\lambda A_1 - x_1 C_\lambda) \right\}$$

$$+ \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_1} A_1 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Y_1} B_1 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Z_1} C_1 + \sum_\lambda \left\{ \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\lambda} A_\lambda + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Y_\lambda} B_\lambda + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Z_\lambda} C_\lambda \right\}.$$

Die Glieder, welche $r_{1\lambda}^3$ im Nenner enthalten, werden, mit Fortlassung des Nenners, und wenn wir der Kürze halber das Zeichen S einführen, um eine Summation über die drei Coordinatenaxen anzudeuten,

$$m_\lambda \left\{ \frac{\partial\varphi_0}{\partial g_1}(y_1 x_\lambda - x_1 y_\lambda) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial h_1}(z_1 x_\lambda - x_1 z_\lambda) \right\} + m_\lambda (x_\lambda - x_1) \sum_\mu \left[\mathsf{S} \left(x_\mu \frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\mu} \right) \right]$$

$$+ m_1 x_1 \mathsf{S}(x_\lambda - x_1) \frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda} + \mathsf{S}(x_\lambda - x_1) \left(m_\lambda \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_1} - m_1 \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\lambda} \right).$$

Ähnlich werden die zu $r_{\lambda\mu}$ gehörigen Terme

$$- x_1 \mathsf{S}(x_\mu - x_\lambda) \left(m_\mu \frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda} - m_\lambda \frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\mu} \right)$$

$$+ \mathsf{S}(x_\mu - x_\lambda) \left(m_\mu \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\lambda} - m_\lambda \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\mu} \right).$$

Führt man hierin auch für die ausserhalb φ_0 vorkommenden x, y, z die Grössen x_1, f, g, h ein, so müssen die Terme, welche das Quadrat von x_1 enthalten, verschwinden, weil sonst die oben erwähnte Inte-

gration nach x_1 auf logarithmische Glieder führen würde. Es muss also sein

$$
\begin{gathered}
0 = m_\lambda \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial g_1} (Y_1 X_\lambda - X_1 Y_\lambda) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial h_1} (Z_1 X_\lambda - X_1 Z_\lambda) \right\} \\
+ m_\lambda (X_\lambda - X_1) \sum_\mu \left[\mathsf{S} \left(X_\mu \frac{\partial \varphi_0}{\partial f_\mu} \right) \right] + m_1 X_1 \mathsf{S} \left[(X_\lambda - X_1) \frac{\partial \varphi_0}{\partial f_\lambda} \right], \\
0 = \mathsf{S} \left[(X_\mu - X_\lambda) \left(m_\mu \frac{\partial \varphi_0}{\partial f_\lambda} - m_\lambda \frac{\partial \varphi_0}{\partial f_\mu} \right) \right].
\end{gathered}
$$

Die vorstehenden Bedingungen, in welchen die Indices λ, μ alle zulässigen Werthe anzunehmen haben, können wir jetzt als lineare partielle Differentialgleichungen mit den unabhängigen Variablen f, g, h und mit der abhängigen Variablen φ_0 ansehen. Die Coefficienten sind von den f, g, h unabhängig und deshalb bei der Aufsuchung der allgemeinen Lösung als Constanten anzusehen. Um die allgemeine Lösung aufzustellen, genügt im vorliegenden Falle die Kenntniss einer gewissen Anzahl von Particularlösungen, welche die f, g, h homogen linear enthalten. Fünf solcher Lösungen werden durch die bekannten Integrale des Vielkörper-Problems geliefert; es wird sich zeigen, dass damit die gemeinsamen Lösungen des oben angesetzten Systems erschöpft sind.

Es werde gesetzt

$$
\begin{aligned}
\Sigma m_a x_a &= L, \qquad & \Sigma m_a y_a &= M, \qquad & \Sigma m_a z_a &= N, \\
\Sigma m_a X_a &= L', \qquad & \Sigma m_a Y_a &= M', \qquad & \Sigma m_a Z_a &= N';
\end{aligned}
$$

dann erhalten wir, wenn die Buchstaben a, b, c ganz willkürliche Grössen bedeuten, zunächst drei Particularlösungen A', B', C' durch die eine zusammenfassende Gleichung

$$
aA' + bB' + cC' = \begin{vmatrix} a & L & L' \\ b & M & M' \\ c & N & N' \end{vmatrix}.
$$

Diese drei Lösungen sind jedoch nicht unabhängig von einander, weil zwischen ihnen die Relation

$$
L'A' + M'B' + N'C' = 0
$$

besteht. Drei weitere Lösungen A, B, C erhalten wir in ähnlicher Weise durch die zusammenfassende Gleichung

$$a'A + b'B + c'C = \sum_a m_a \begin{vmatrix} a' & x_a & X_a \\ b' & y_a & Y_a \\ c' & z_a & Z_a \end{vmatrix},$$

wo die a', b', c' ebenfalls willkürliche Zahlen bedeuten. Dass in der That die A, A', ... Lösungen sind, lässt sich auch ohne Rechnung durch folgende Überlegung nachweisen. Die A, A', ... sind nämlich nichts anderes als die Flächenintegrale und drei aus den Schwerpunktsätzen zusammengesetzte Integrale, und zwar homogene Integrale von der hier untersuchten Beschaffenheit, bei denen überdies das φ sich auf den Anfangsterm φ_0 reducirt. Es müssen also die hier für φ_0 aufgestellten Bedingungen von selbst erfüllt sein.

Drückt man jetzt die A, A', ... durch die f, g, h aus, so erhält man zunächst

$$X_1(aA' + bB' + cC') = \begin{vmatrix} a, & 0 & + \sum_\lambda m_\lambda f_\lambda, & L' \\ b, & m_1 g_1 & + \sum_\lambda m_\lambda g_\lambda, & M' \\ c, & m_1 h_1 & + \sum_\lambda m_\lambda h_\lambda, & N' \end{vmatrix}$$

$$X_1(a'A + b'B + c'C) = m_1 \begin{vmatrix} a' & 0 & X_1 \\ b' & g_1 & Y_1 \\ c' & h_1 & Z_1 \end{vmatrix} + \sum_\lambda m_\lambda \begin{vmatrix} a' & f_\lambda & X_\lambda \\ b' & g_\lambda & Y_\lambda \\ c' & h_\lambda & Z_\lambda \end{vmatrix}.$$

Wir untersuchen nun, ob aus diesen Gleichungen sich die Grössen

$$g_1, \quad h_1, \quad f_2, \quad g_2, \quad h_2$$

durch die A, A', ... und die übrigen f, g, h ausdrücken lassen. Nun sind in den Ausdrücken für

$$X_1 B', \quad X_1 C', \quad X_1 A, \quad X_1 B, \quad X_1 C$$

die Coefficienten der fünf Grössen

$$m_1 g_1, \quad m_1 h_1, \quad m_2 f_2, \quad m_2 g_2, \quad m_2 h_2$$

durch nachstehende Zeilen gegeben

$$\begin{array}{rrrrr}
0, & +L', & -N', & 0, & +L', \\
-L', & 0, & +M', & -L', & 0, \\
+Z_1, & -Y_1, & 0, & +Z_2, & -Y_2, \\
0, & +X_1, & -Z_2, & 0, & +X_2, \\
-X_1, & 0, & +Y_2, & -X_2, & 0,
\end{array}$$

und es kommt jetzt darauf an, zu zeigen, dass die aus diesen Zeilen gebildete Determinante nicht identisch verschwindet. Berechnet man dieselbe, so erhält man

$$L'(X_2 - X_1)\begin{vmatrix} X_2 & L' & X_1 \\ Y_2 & M' & Y_1 \\ Z_2 & N' & Z_1 \end{vmatrix};$$

die Grössen $g_1, \ldots, h_2$ lassen sich also in der That durch die $A, \ldots$ und die übrigen f, g, h ausdrücken. Infolge dessen dürfen wir bei der Aufsuchung etwaiger weiterer Particularlösungen voraussetzen, dass dieselben von den $g_1, \ldots, h_2$ unabhängig sind.

12. Die noch aufzusuchenden Particularlösungen bezeichnen wir mit χ und setzen fest, dass die Indices $\sigma, \tau, \ldots$ nur die Werthe $3, 4, \ldots, n$ annehmen sollen. Die gesuchten Lösungen müssen den Differentialgleichungen genügen, welche aus denen für φ_0 dadurch entstehen, dass man für φ_0 die Grösse χ schreibt, ferner die Ableitungen von χ nach den $g_1, \ldots, h_2$ gleich Null setzt und die Fälle $\lambda, \mu = 2$ von den Fällen $\lambda, \mu = \sigma$ trennt. Auf diese Weise erhält man zunächst das System

$$(23) \qquad 0 = \sum_\sigma \left[S\left(X_\sigma \frac{\partial \chi}{\partial f_\sigma} \right) \right],$$

$$(24) \qquad 0 = m_\tau (X_\tau - X_1) \sum_\sigma \left[S\left(X_\sigma \frac{\partial \chi}{\partial f_\sigma} \right) \right] + m_1 X_1 S\left((X_\tau - X_1) \frac{\partial \chi}{\partial f_\tau} \right),$$

$$(25) \qquad 0 = S\left((X_\tau - X_2) \frac{\partial \chi}{\partial f_\tau} \right),$$

$$(26) \qquad 0 = S\left[(X_\sigma - X_\tau)\left(m_\sigma \frac{\partial \chi}{\partial f_\tau} - m_\tau \frac{\partial \chi}{\partial f_\sigma} \right) \right].$$

Aus (23) und (24) folgt

$$(27) \qquad 0 = \mathbf{S}\left((X_\tau - X_1)\frac{\partial\chi}{\partial f_\tau}\right)$$

und hieraus in Verbindung mit (25) die zusammenfassende Gleichung

$$(28) \qquad a\frac{\partial\chi}{\partial f_\tau} + b\frac{\partial\chi}{\partial g_\tau} + c\frac{\partial\chi}{\partial h_\tau} = k_\tau \begin{vmatrix} a, & X_1 - X_\tau, & X_2 - X_\tau \\ b, & Y_1 - Y_\tau, & Y_2 - Y_\tau \\ c, & Z_1 - Z_\tau, & Z_2 - Z_\tau \end{vmatrix},$$

in welcher k_τ einen vorläufig unbestimmten Proportionalitätsfactor bedeutet. Bezeichnen wir den Werth, welchen die Determinante in (28) für

$$a = X_\sigma - X_\tau, \qquad b = Y_\sigma - Y_\tau, \qquad c = Z_\sigma - Z_\tau$$

annimmt, mit D, so erhält man mit einer kleinen Umformung

$$D = |X_\sigma - X_\tau, X_1, X_2| + |X_\sigma, X_\tau, X_1 - X_2|,$$

wo von den Determinanten nur die erste Zeile angesetzt ist. Durch Vertauschung der Indices σ und τ ändert also D nur sein Vorzeichen. Infolge dessen erhalten wir aus (28) die beiden Gleichungen

$$\mathbf{S}\left((X_\sigma - X_\tau)\frac{\partial\chi}{\partial f_\tau}\right) = k_\tau . D,$$

$$\mathbf{S}\left((X_\sigma - X_\tau)\frac{\partial\chi}{\partial f_\sigma}\right) = k_\sigma . D,$$

also mit Berücksichtigung von (26)

$$(m_\sigma k_\tau - m_\tau k_\sigma) D = 0,$$

d. h. es ist

$$k_\sigma = l m_\sigma,$$

wo l einen von dem Index σ unabhängigen Factor bedeutet. Hiermit liefert die Gleichung (28) weiter

$$\mathbf{S}\left(X_\tau \frac{\partial\chi}{\partial f_\tau}\right) = l m_\tau |X_\tau, X_1, X_2|,$$

woraus, wenn man nach τ summirt, mit Rücksicht auf (23)

$$0 = l\left| \Sigma m_\tau X_\tau \,,\, X_1 \,,\, X_2 \right|$$

folgt. Es verschwinden also l, die k und infolge dessen auch die sämmtlichen Ableitungen von χ, d. h. es existiren ausser den bereits angegebenen fünf Particularlösungen keine weiteren, und es enthält φ_0 die Variablen x, y, z nur in den Verbindungen

$$A\,,\, B\,,\, C\,, \qquad A'\,,\, B'\,,\, C'.$$

Eliminirt man also z. B. y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 mittelst der Ausdrücke $A, A', \ldots$ aus φ_0, so fallen alle übrigen x, y, z von selbst heraus. Bei dieser Elimination nimmt φ_0 die Form $\mathfrak{G}(A, A', \ldots)$ an, dagegen kann φ_0 aufhören eine ganze Function der X, Y, Z zu sein. Wir wollen nun zeigen, dass sich φ_0 immer auf die Form

$$\mathfrak{G}(A\,,\, B\,,\, C\,,\, A'\,,\, B'\,,\, C'\,,\, X\,,\, Y\,,\, Z)$$

bringen lässt.

13. Da bei der Elimination von $y_1, \ldots, z_2$ aus φ_0 die übrigen x, y, z von selbst fortfallen, so kann man die Elimination in der Weise bewirken, dass man sowohl in φ_0 als auch in B', C', A, B, C die schliesslich fortfallenden Variablen von vornherein gleich Null setzt, die $y_1, \ldots, z_2$ durch die $B', \ldots$ ausdrückt und die so gewonnenen Ausdrücke in das vereinfachte φ_0 substituirt. Nun sind die Grössen

$$m_1 y_1, \quad m_1 z_1, \quad m_2 x_2, \quad m_2 y_2, \quad m_2 z_2$$

in B', C', A, B, C mit Coefficienten verbunden, die durch nachstehende Zeilen gegeben sind

$$\begin{array}{ccccc}
0\,, & +L'\,, & -N'\,, & 0\,, & +L'\,, \\
-L'\,, & 0\,, & +M'\,, & -L'\,, & 0\,, \\
+Z_1\,, & -Y_1\,, & 0\,, & +Z_2\,, & -Y_2\,, \\
0\,, & +X_1\,, & -Z_2\,, & 0\,, & +X_2\,, \\
-X_1\,, & 0\,, & +Y_2\,, & -X_2\,, & 0\,,
\end{array}$$

welche, wie wir bereits früher gesehen haben, zu der Determinante

$$E = L'(X_2 - X_1) \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & L' \\ Y_1 & Y_2 & M' \\ Z_1 & Z_2 & N' \end{vmatrix}$$

führen. Der umgeformte durch die B', C', A, B, C dargestellte Ausdruck von φ_0 könnte also eine Potenz von E im Nenner haben, oder die Gestalt

$$\mathfrak{G}(B', C', A, B, C, X, Y, Z) : E^q$$

besitzen. Diese Form ist nun von der Art und Weise, wie die Elimination im Einzelnen ausgeführt wird, unabhängig. Hätte man die Elimination mittelst der Variablen

$$y_1, \quad z_1, \quad x_3, \quad y_3, \quad z_3$$

bewirkt, so würde man im Nenner von φ_0 statt des vorstehenden E ein anderes.

$$E' = L'(X_3 - X_1) \,|\, X_1, X_3, L' \,|$$

erhalten haben. Nun haben E und E' nur den Theiler L' gemeinsam, woraus wir schliessen, dass die übrigen Theiler von E oder E' in dem Ausdrucke von φ_0 sich gegen entsprechende Theiler des Zählers fortheben, so dass nur eine Potenz von L' im Nenner von φ_0 verbleiben kann.

Hätte man statt der Variablen y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 die Variablen x_1, z_1, x_2, y_2, z_2 und statt B', C' die Ausdrücke C', A' bei der Elimination benutzt, so würde man für φ_0 einen Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{G}(C', A', A, B, C, X, Y, Z) : (M')^r$$

statt des früheren

$$\mathfrak{G}(B', C', A, B, C, X, Y, Z) : (L')^q$$

erhalten haben. Auf analoge Art könnte man noch zu einer dritten Darstellung

$$\varphi_0 = \mathfrak{G}(A', B', A, B, C, X, Y, Z) : (N')^s$$

gelangen. Um nun zu zeigen, dass diese Nenner immer durch passende

Umformung von φ_0 beseitigt werden können, haben wir nur den Fall in's Auge zu fassen, wo keine der drei Zahlen q, r, s gleich Null ist.

Zunächst schicken wir die Bemerkung voraus, dass abgesehen von der Relation

$$A'L' + B'M' + C'N' = 0 \tag{29}$$

die $A, A', \dots$ von einander unabhängig sind, d. h. es existirt zwischen den $A, A', \dots$ keine weitere Relation

$$0 = PA + QB + RC + P'A' + Q'B' + R'C',$$

in welcher die Coefficienten $P, P', \dots$ von den x, y, z unabhängig sind. Infolge dessen darf man in φ_0 die Variablen

$$A, \dots, A', \dots, X_1, \dots, Y_1, \dots, Z_1, \dots$$

als Grössen ansehen, welche, abgesehen von der einen Einschränkung (29), völlig willkürlich gewählt werden können. Es sei nun auf irgend eine Art für φ_0 die Darstellung

$$\varphi_0 = H(A', B', C', A, B, C, L', M', N', X_2, Y_2, Z_2, \dots, X_n, Y_n, Z_n):(L')^m$$

gefunden worden, wo in φ_0 die X_1, Y_1, Z_1 durch die L', M', N' und die übrigen X, Y, Z ausgedrückt zu denken sind, dann kann, so lange die x, y, z, X, Y, Z, endliche Werthe besitzen, φ_0 nicht unendlich werden. Ordnen wir nun φ_0 nach fallenden Potenzen von L', setzen also an

$$\varphi_0 = \frac{H_0}{L'^m} + \frac{H_1}{L'^{m-1}} + \dots,$$

wo die $H_0, H_1, \dots$ ganze Functionen der vorkommenden Grössen bedeuten, so muss, sobald L' verschwindet, sobald also

$$B'M' + C'N' = 0$$

ist, der Ausdruck H_0 verschwinden, wie auch die Werthe der übrigen darin vorkommenden Grössen beschaffen sein mögen. Es muss also H_0 durch

$$B'M' + C'N'$$

theilbar sein, d. h. man hat identisch

$$H_0 = (B'M' + C'N')H_{01},$$

wo H_{01} wiederum eine ganze Function der darin vorkommenden Grössen ist. Infolge dessen wird

$$\varphi_0 = \frac{H_1 - A'H_{01}}{L'^{m-1}} + \frac{H_2}{L'^{m-2}} + \dots .$$

Wendet man auf diese Darstellung dieselbe Schlussweise an, u. s. w., so gelangt man schliesslich dahin, den Nenner von φ_0 ganz zu beseitigen, d. h. φ_0 ist immer als eine ganze Function der Grössen

$$A, B, C, A', B', C', X_1, Y_1, Z_1, \dots, X_n, Y_n, Z_n$$

darstellbar.

14. Um nun die Verbindungen der X, Y, Z zu ermitteln, welche in φ_0 vorkommen, bilden wir in

$$0 = \frac{\partial\varphi_0}{\partial v} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}$$

zunächst das erste Glied rechts. Dasselbe hat die Gestalt

$$\Sigma\, \Phi_{\alpha\beta} : r^3_{\alpha\beta},$$

wo

$$\Phi_{\alpha\beta} = \mathrm{S}\left[(x_\beta - x_\alpha)\left(m_\beta \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\alpha} - m_\alpha \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\beta}\right)\right],$$

und die Ableitungen von φ_0 sich nur auf die explicite vorkommenden X, Y, Z beziehen, weil die A, B, C, A', B', C' den Bedingungen

$$\frac{\partial A}{\partial v} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial C'}{\partial v} = 0$$

genügen. Führt man in dem Quotienten

$$\Phi_{\alpha\beta} : r^3_{\alpha\beta}$$

statt der x, y, z die f, g, h und x_1 als Variable ein, so muss die Integration desselben nach x_1 den mit dem Factor $-X_1$ versehenen Term in φ_2 liefern, welcher $r_{\alpha\beta}$ im Nenner hat, und der im Übrigen eine ganze Function der X, Y, Z ist. Nun ist

$$\int dx(Px + Q)(ax^2 + 2bx + c)^{-\frac{3}{2}} = (Vx + W)(ax^2 + 2bx + c)^{-\frac{1}{2}},$$

wenn zwischen den von x unabhängigen Grössen P, Q, a, b, c, V, W die Relationen

$$D = b^2 - ac,$$

$$DV = bP - Qa,$$

$$DW = cP - Qb,$$

$$D(Vx + W) = P(bx + c) - Q(ax + b)$$

stattfinden. Mit Rücksicht hierauf setzen wir an

$$x_\alpha - x_\beta = x_{\alpha\beta}, \ldots\ldots$$

$$f_\alpha - f_\beta = f_{\alpha\beta}, \ldots\ldots$$

$$X_\alpha - X_\beta = X_{\alpha\beta}, \ldots\ldots$$

$$m_\alpha \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\beta} - m_\beta \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\alpha} = A_{\alpha\beta}, \ldots\ldots$$

$$r_{\alpha\beta}^2 = ax_1^2 + 2bx_1 + c,$$

$$aX_1^2 = \mathrm{S}X_{\alpha\beta}^2, \qquad bX_1^2 = \mathrm{S}X_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}, \qquad cX_1^2 = \mathrm{S}f_{\alpha\beta}^2,$$

$$\Phi_{\alpha\beta} = Px_1 + Q,$$

$$PX_1 = \mathrm{S}X_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}, \qquad QX_1 = \mathrm{S}f_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta},$$

$$(ax_1 + b)X_1 = \mathrm{S}X_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta}, \qquad (bx_1 + c)X_1 = \mathrm{S}f_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta},$$

$$(b^2 - ac)X_1^2 = (\mathrm{S}X_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta})^2 - (\mathrm{S}X_{\alpha\beta}^2)\,.\,(\mathrm{S}x_{\alpha\beta}^2) = E,$$

$$Er_{\alpha\beta}\int dx_1 \frac{\Phi_{\alpha\beta}}{r_{\alpha\beta}^3} = X_1^2 \begin{vmatrix} P & ax_1 + b \\ Q & bx_1 + c \end{vmatrix} = FX_1,$$

$$FX_1 = \begin{vmatrix} \mathrm{S}X_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} & \mathrm{S}X_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta} \\ \mathrm{S}f_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} & \mathrm{S}f_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta} \end{vmatrix},$$

$$F = \begin{vmatrix} \mathrm{S}X_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} & \mathrm{S}X_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta} \\ \mathrm{S}x_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} & \mathrm{S}x_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta} \end{vmatrix}.$$

Der Ausdruck

$$-\frac{F}{Er_{\alpha\beta}}$$

ist, wie bereits erwähnt, derjenige Term in φ_2, welcher $r_{\alpha\beta}$ als Nenner enthält; es muss also der Quotient $F:E$ eine ganze Function der X, Y, Z sein. Da nun F und E ganze Functionen der $x, X, \ldots$ sind, und da E als Function der $x, X, \ldots$ betrachtet irreductibel ist, so muss der Quotient $F:E$ auch eine ganze Function der x, y, z sein.

Um die Vorstellung zu fixiren, nehmen wir für den Augenblick an, dass die Indices α, β in F und E auf die Werthe $3, 4, \ldots$ beschränkt seien. Weiter denken wir uns in F und E die x, y, z zunächst durch die f, g, h und x_1, und dann die Grössen g_1, h_1, f_2, g_2, h_2 durch die A, B, C, B', C' und die übrigen f, g, h ausgedrückt. Durch diese linearen Transformationen wird an der Theilbarkeit von F durch E nichts geändert. Der Ausdruck für E enthält dann nur die Variablen $f_\alpha, g_\alpha, h_\alpha, f_\beta, g_\beta, h_\beta$, während F sich zunächst als eine ganze homogene Function zweiten Grades derselben f, g, h und von x_1 darstellt, deren Coefficienten die x, y, z nur in den Verbindungen $A, A', \ldots$ enthalten. Setzen wir demgemäss an

$$F = F_0 x_1^2 + F_1 x_1 + F_2,$$

so müssen F_0, F_1, F_2 einzeln durch E theilbar sein. Nun sind die F_1 und F_2, wenn sie vorkommen, in Bezug auf die $f_\alpha, \ldots, h_\beta$ von der ersten, resp. nullten Ordnung, woraus wir schliessen, dass sie in Wirklichkeit identisch verschwinden, dass also F sich auf den Term F_2 reducirt, und dass infolge dessen

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

ist. Führt man nun die Differentiation nach u aus, so erhält man

$$(\mathrm{S}x_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}) \, . \, (\mathrm{S}X_{\alpha\beta}^2) = (\mathrm{S}X_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta})(\mathrm{S}X_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta}),$$

und hieraus

$$(\mathrm{S}f_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}) \, . \, (\mathrm{S}X_{\alpha\beta}^2) = (\mathrm{S}X_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta})(\mathrm{S}X_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}).$$

Die vorstehende partielle Differentialgleichung für φ_0 kann nun, da die

$A_{\alpha\beta}, \ldots$ die $f_\alpha, \ldots, h_\beta$ nicht enthalten, nicht anders bestehen, als wenn die mit den f, g, h multiplicirten Glieder links und rechts einzeln einander gleich sind, d. h. es ist

$$\frac{A_{\alpha\beta}}{X_{\alpha\beta}} = \frac{B_{\alpha\beta}}{Y_{\alpha\beta}} = \frac{C_{\alpha\beta}}{Z_{\alpha\beta}} = \frac{\mathrm{S} X_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}}{\mathrm{S} X_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}}.$$

Zu diesem System von Differentialgleichungen, welche aus Gründen der Symmetrie auch noch gelten, wenn die Indices α, β die Werthe 1 oder 2 annehmen, gehören zunächst die vier Particularlösungen

$$L' = \Sigma m_\alpha X_\alpha, \qquad M' = \Sigma m_\alpha Y_\alpha, \qquad N' = \Sigma m_\alpha Z_\alpha,$$
$$T = \frac{1}{2} \Sigma m_\alpha (X_\alpha^2 + Y_\alpha^2 + Z_\alpha^2). \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Es fragt sich nun, ob noch andere gemeinsame Particularlösungen existiren können. Die Integration der Gleichung

$$\frac{A_{\alpha\beta}}{X_{\alpha\beta}} = \frac{B_{\alpha\beta}}{Y_{\alpha\beta}}$$

ist durch die drei Particularlösungen L', M', T vollständig erschöpft, d. h. die weiteren noch aufzusuchenden Particularlösungen dürfen als unabhängig von $X_\alpha, X_\beta, Y_\alpha, Y_\beta$ vorausgesetzt werden. Dies führt zunächst zu der Gleichung

$$C_{\alpha\beta} = 0,$$

welcher die Lösung N' genügt. Infolge dessen können die noch etwa fehlenden Lösungen als unabhängig auch von Z_α, Z_β vorausgesetzt werden. Es muss also, wenn noch weitere Lösungen, die von den gefundenen unabhängig sind, existiren, durch einen von $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ unabhängigen Ausdruck φ_0 das System

$$A_{\alpha\gamma} : X_{\alpha\gamma} = B_{\alpha\gamma} : Y_{\alpha\gamma} = C_{\alpha\gamma} : Z_{\alpha\gamma}$$

oder

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial X_\gamma} : X_{\alpha\gamma} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial Y_\gamma} : Y_{\alpha\gamma} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial Z_\gamma} : Z_{\alpha\gamma}$$

befriedigt werden können, was offenbar nicht möglich ist, wenn φ_0 die

X_γ, Y_γ, Z_γ wirklich enthält. Wir schliessen hieraus, dass der Ausdruck φ_0 die Variablen X, Y, Z nur in vier von den x, y, z unabhängigen Verbindungen, nämlich L', M', N', T enthält. Eliminirt man also aus

$$\varphi_0 = \mathfrak{G}(A, B, C, A', B', C', X_1, Y_1, Z_1, \ldots, X_n, Y_n, Z_n)$$

vier der $X, Y, \ldots$, z. B. X_1, Y_1, Z_1, X_2 mittelst der Ausdrücke L', M', N', T, so müssen die übrigen X, Y, Z von selbst herausfallen. Man erkennt leicht, dass dann φ_0 die Gestalt

$$\varphi_0 = \mathfrak{H}(A, B, C, A', B', C', L', M', N', T)$$

annimmt, wo $\mathfrak{H}$ eine ganze Function der darin vorkommenden Grössen bedeutet. Hiermit sind wir im Wesentlichen an das Ziel gelangt. Ist nämlich

$$U = \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

die Kräftefunction, so sind die Ausdrücke

$$A, B, C, A', B', C', L', M', N', T - U$$

homogene Integrale von der hier untersuchten Art. Der Ausdruck

$$J = \mathfrak{H}(A, B, \ldots, M', N', T - U)$$

ist ein ebensolches Integral, welches entwickelt und nach den X, Y, Z geordnet, mit dem hier untersuchten Integral φ in den Gliedern höchster Ordnung, nämlich in dem Anfangsterm φ_0 übereinstimmt. Die Differenz

$$\varphi' = \varphi - J$$

ist wiederum ein Integral von derselben Art wie φ, nur dass die Ordnung in Bezug auf die X, Y, Z in φ' um wenigstens eine Einheit niedriger ist, als in φ. Es lässt sich also von dem vorgelegten Integral φ stets ein aus den bekannten Integralen zusammengesetztes Integral in der Weise abspalten, dass das übrig bleibende Integral nach den X, Y, Z von niedrigerer Ordnung ist als φ. Wiederholt man diese Abspaltung, so gelangt man schliesslich zu einem Integral, welches die X, Y, Z nicht enthält, welches sich deshalb auf eine Constante reducirt.

Hiermit haben wir den Satz gewonnen:

Bei dem Vielkörper-Problem ist der Kreis der algebraisch aus den Coordinaten und Geschwindigkeiten zusammengesetzten und von t freien Integrale vollständig mit den bekannten Integralen, nämlich den Schwerpunktsätzen, den Flächensätzen und dem Satze von der lebendigen Kraft abgeschlossen.

15. Aus dem gefundenen Ergebniss lassen sich sofort einige weitere Folgerungen ziehen. Wir führen ein

$$m_a X_a = \xi_a, \qquad m_a Y_a = \eta_a, \qquad m_a Z_a = \zeta_a$$

und schreiben demgemäss die lebendige Kraft in der Form

$$T = \sum \frac{1}{2m_a}(\xi_a^2 + \eta_a^2 + \zeta_a^2);$$

ferner setzen wir, wenn U wieder die Kräftefunction bedeutet,

$$T - U = H,$$

dann haben die Bewegungsgleichungen die Gestalt

$$\frac{dx_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_a}, \qquad \frac{d\xi_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_a}, \quad \text{etc.}$$

Diese Gleichungen transformiren wir, indem wir statt der $x, \xi, \ldots$ neue Variable

$$p_1, \ldots, p_{3n}, \qquad q_1, \ldots, q_{3n}$$

durch die Gleichungen

$$\xi_a = \frac{\partial V}{\partial x_a}, \qquad \eta_a = \frac{\partial V}{\partial y_a}, \qquad \zeta_a = \frac{\partial V}{\partial z_a},$$

$$q_a = \frac{\partial V}{\partial p_a}$$

einführen, wo V irgend einen aus den Grössen x, y, z, p zusammengesetzten Ausdruck bedeutet. Die transformirten Gleichungen werden dann bekanntlich

$$\frac{\partial q_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad \frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_a},$$

wo H durch die q, p ausgedrückt zu denken ist. Wir wollen eine derartige Transformation für das Dreikörper-Problem wirklich durchführen; für das Vielkörper-Problem gestaltet sich die Rechnung nicht wesentlich anders.

Die den ξ, η, ζ correspondirenden Variablen sollen mit $p, p_1, \dots, p_8$, die den x, y, z entsprechenden mit $q, q_1, \dots, q_8$ bezeichnet werden. Ferner soll die transformirende Function V in Bezug auf die p homogen linear sein, woraus sofort folgt, dass man ansetzen kann

$$V = pq + p_1 q_1 + \dots + p_8 q_8,$$

wo für die q bestimmte Functionen der x, y, z gesetzt zu denken sind. Der Kürze halber möge das Zeichen S eine Summation über die drei Coordinatenaxen, das Zeichen Σ eine cyclische Summation über die Indices 1, 2, 3 bedeuten. Dies vorausgeschickt setzen wir zunächst an

$$q_1^2 = \mathrm{S}(x_2 - x_3)^2, \qquad q_2^2 = \mathrm{S}(x_3 - x_1)^2, \qquad q_3^2 = \mathrm{S}(x_1 - x_2)^2,$$

d. h. die q_1, q_2, q_3 sind die Distanzen der drei Körper von einander. Weiter sollen sein

$$q_6 = \Sigma m_1 x_1, \qquad q_7 = \Sigma m_1 y_1, \qquad q_8 = \Sigma m_1 z_1.$$

Endlich bilden wir mit den neun willkürlich gewählten Constanten

$$a_1, \quad b_1, \quad c_1, \quad a_2, \quad b_2, \quad c_2, \quad a_3, \quad b_3, \quad c_3,$$

zwischen denen die Relationen

$$\Sigma a_1 = \Sigma b_1 = \Sigma c_1 = 0,$$

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1,$$

stattfinden sollen, die Ausdrücke

$$\begin{aligned} q_5 &= \Sigma c_1 z_1, \\ q_4 &= \Sigma b_1 (x_1 + i y_1), \\ q &= [\Sigma a_1 (x_1 + i y_1)] : q_4, \end{aligned}$$

dann haben wir die Transformationsgleichungen

$$\xi_1 = \frac{p_2}{q_2}(x_1 - x_3) + \frac{p_3}{q_3}(x_1 - x_2) + p\frac{a_1 - b_1 q}{q_4} + p_4 b_1 + p_6 m_1,$$

$$\eta_1 = \frac{p_2}{q_2}(y_1 - y_3) + \frac{p_3}{q_3}(y_1 - y_2) - p\frac{a_1 - b_1 q}{iq_4} + p_4 i b_1 + p_7 m_1,$$

$$\zeta_1 = \frac{p_2}{q_2}(z_1 - z_3) + \frac{p_3}{q_3}(z_1 - z_2) \qquad + p_5 c_1 \qquad + p_8 m_1,$$

. . . .

Die p ergeben sich hieraus als lineare Functionen der ξ, η, ζ, mit Coefficienten, welche algebraisch von den x, y, z abhängen. Aus diesen Gleichungen folgern wir zunächst

$$\Sigma m_1 X_1 = \Sigma \xi_1 = p_6 \Sigma m_1,$$

$$\Sigma m_1 Y_1 = \Sigma \eta_1 = p_7 \Sigma m_1,$$

$$\Sigma m_1 Z_1 = \Sigma \zeta_1 = p_8 \Sigma m_1,$$

d. h. die p, q mit den Indices $6, 7, 8$ sind, von constanten Factoren abgesehen, gleich den Geschwindigkeiten und den Coordinaten des Schwerpunktes. Weiter bilden wir die complexe Verbindung der beiden ersten Flächensätze

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \xi_1 \\ i & y_1 & \eta_1 \\ 0 & z_1 & \zeta_1 \end{vmatrix} = p_5 \Sigma c_1 (y_1 - i x_1) + q_7 p_8 - q_8 p_7 + i(q_8 p_6 - q_6 p_8)$$

und den dritten Flächensatz

$$\sum \begin{vmatrix} x_1 & \xi_1 \\ y_1 & \eta_1 \end{vmatrix} = i p_4 q_4 + p_7 q_6 - p_6 q_7 .$$

Der Ausdruck für H endlich setzt sich zusammen aus den drei Gliedern

$$H' = \sum \left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2 q_1^2 \frac{m_2 + m_3}{2m_2 m_3} + \sum \frac{p_2}{q_2}\frac{p_3}{q_3}\frac{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}{2m_1}$$

$$+ \sum \frac{1}{m_1}\{p(a_1 - b_1 q) + p_4 q_4 b_1\}\left\{\frac{p_3}{q_3}(a_3 - b_3 q) - \frac{p_2}{q_2}(a_2 - b_2 q)\right\} - U,$$

$$H'' = p_5 \sum \frac{p_1}{q_1}(z_2 - z_3)\left(\frac{c_2}{m_2} - \frac{c_3}{m_3}\right) + p_5^2 \sum \frac{c_1^2}{2m_1},$$

$$H''' = \frac{1}{2}(p_6^2 + p_7^2 + p_8^2)\sum m_1.$$

In den transformirten Differentialgleichungen

$$\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad \frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_a}, \qquad (a=0,1,\ldots,8)$$

spaltet sich jetzt zunächst das System

$$\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H'''}{\partial p_a}, \qquad \frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial H'''}{\partial q_a}, \qquad (a=6,7,8)$$

ab, dessen Integration die Schwerpunktsätze liefert. Nehmen wir den Schwerpunkt als Coordinatenanfang, so haben wir die p, q mit den Indices $6, 7, 8$ einfach gleich Null zu setzen, und erhalten das System zwölfter Ordnung

$$\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_a}(H' + H''), \qquad \frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial}{\partial p_a}(H' + H''). \qquad (a=0,1,\ldots,5)$$

Wählt man ferner die invariable Ebene als xy-Ebene, so ist p_5 gleich Null zu setzen. Infolge dessen reducirt sich das System zwölfter Ordnung auf ein System zehnter Ordnung mit den Variablen $p, \ldots, p_4, q, \ldots, q_4$ und auf eine Quadratur zur Bestimmung von q_5. Das letztgenannte System hat die Form

$$\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_a}, \qquad \frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_a}, \qquad (a=0,1,\ldots,4)$$

und giebt, da H' die Variablen p_4 und q_4 nur zu dem Producte p_4q_4 verbunden enthält, in Folge der Gleichungen

$$\frac{dq_4}{dt} = \frac{\partial H}{\partial(p_4q_4)} q_4, \qquad \frac{dp_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial(p_4q_4)} p_4$$

die Relation

$$\frac{d(p_4q_4)}{dt} = 0,$$

welche sich vorhersehen liess, da ip_4q_4 unter den gemachten Voraussetzungen das dritte Flächenintegral ist. Von dem System zehnter Ordnung spaltet sich also das System achter Ordnung

$$\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_a}, \qquad \frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_a}, \qquad (a=0,1,2,3)$$

ab, wo in H' an Stelle von p_4q_4 eine Constante zu schreiben ist, die wir mit k bezeichnen wollen. Die beiden übrig bleibenden Gleichungen liefern dann den Ausdruck für

$$\log \frac{q_4}{p_4}$$

durch eine Quadratur.

16. Um das System achter Ordnung noch weiter zu reduciren, schreiben wir

$$H' = H_1 p + H_2,$$

wo H_1 und H_2 offenbar von p frei sind. Ferner setzen wir an

$$L = p + \frac{H_2 - H'}{H_1} = p + K = 0,$$

und können dann die Gleichungen zunächst in der Form

$$\frac{dq_a}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial p_a} : \frac{\partial L}{\partial H'}, \qquad \frac{dp_a}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_a} : \frac{\partial L}{\partial H'}$$

schreiben, wo nach Ausführung der partiellen Differentiationen für H' wieder der ursprüngliche Ausdruck gesetzt zu denken ist. Wegen der Relation

$$\frac{dq}{dt} = -1 : \frac{\partial L}{\partial H'}$$

folgt aber für $\alpha = 1, 2, 3$

$$\frac{dq_\alpha}{dq} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dq} = -\frac{\partial K}{\partial q_\alpha}.$$

Für das vorstehende System sechster Ordnung ist der in K auftretende Ausdruck H' ein Integral, wir dürfen also für H' eine Constante $-h$ schreiben und haben damit das Problem auf die Integration eines Systems sechster Ordnung und die Quadratur

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{\partial K}{\partial q}$$

zurückgeführt.

Eine weitere Reduction als auf dieses System sechster Ordnung, welches schon mehrfach, wenn auch in abweichender Gestalt, abgeleitet worden ist, lässt sich, wie aus den Untersuchungen von Herrn Lie über Gruppen (Mathem. Annalen, Bd. 8) hervorgeht, an der Hand der bisher bekannten Integrale nicht erreichen. Der vollständige Ausdruck für K hat die Gestalt

$$K = \frac{H_2 + h}{H_1},$$

$$H_1 = \sum A_1 \frac{p_1}{q_1},$$

$$A_1 = (a_1 - b_1 q)\left\{\frac{a_2 - b_2 q}{m_2} - \frac{a_3 - b_3 q}{m_3}\right\}, \quad \text{etc.},$$

$$H_2 = \sum \left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2 q_1^2 \frac{m_2 + m_3}{2m_2 m_3} + \sum \frac{p_2}{q_2}\frac{p_3}{q_3}\frac{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}{2m_1} + \sum B_1 \frac{p_1}{q_1} - U,$$

$$B_1 = k(a_1 - b_1 q)\left\{\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right\}, \quad \text{etc.},$$

$$U = \sum \frac{m_2 m_3}{q_1}.$$

Es lässt sich jetzt unschwer zeigen, dass unser System sechster Ordnung keine algebraischen Integrale besitzt. Angenommen es existirte ein algebraisch aus den p, q zusammengesetztes Integral, dann ergiebt sich zunächst, weil K eine rationale Function der p, q ist, die in § 2 be-

nutzte Schlussweise, dass dieses Integral sich als eine algebraische Verbindung von Integralen darstellen lässt, welche die p, q nur rational enthalten. Für die rationalen Integrale ferner zeigt die in § 3 benutzte Methode der unbestimmten Coefficienten, dass in diesen Integralen die in K auftretenden Constanten, nämlich die m, a, b, c, k, h nur in algebraischen Verbindungen vorkommen können. Setzt man nun in einem solchen rationalen Integral für die p, q ihre Ausdrücke durch die ursprünglichen Variablen $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ und ferner für die Constanten k und h, welche ja algebraische Integrale bedeuten, ebenfalls ihre Ausdrücke durch die ursprünglichen Variablen, so gelangt man zu einem Integrale des Dreikörper-Problems, welches die Coordinaten und die Geschwindigkeiten nur algebraisch enthält. Ein derartiges Integral reducirt sich aber allemal, wenn man den Schwerpunkt als Coordinatenanfang und die invariable Ebene als xy-Ebene wählt, auf eine algebraische Function von h und k allein, womit offenbar die Nichtexistenz algebraischer Integrale für das System sechster Ordnung bewiesen ist.

Bei den bisher mittelst der Hamilton-Jacobi'schen Methoden erledigten Problemen der analytischen Mechanik beruht die Lösung im Allgemeinen darauf, dass man, nöthigenfalls durch eine passende Transformation, eine sogenannte Trennung der Variablen herbeiführt. Dieses Princip lässt sich etwas allgemeiner, als es bei Jacobi geschieht, folgendermassen formuliren. Gegeben ist das kanonische System

$$\frac{dq_\alpha}{dq} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dq} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

$$H = f(q, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n);$$

die Variablen lassen sich trennen, wenn zwischen den Variablen $q, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$, einer neuen Variablen p und gewissen Parametern $c_1, c_2, \ldots$ Gleichungen von der Form

$$H_1(p, q, c_1, c_2, \ldots) = 0, \qquad H_2(p_1, q_1, c_1, c_2, \ldots) = 0, \quad \text{etc.}$$

aufgestellt werden können, welche folgenden Bedingungen genügen: 1° die Anzahl der Gleichungen und der Parameter c ist gleich der Anzahl der Variablenpaare $p, q; p_1, q_1; \ldots;$ 2° jede Gleichung enthält nur ein Variablenpaar; 3° eliminirt man mittelst der angegebenen Gleichungen aus dem Ausdrucke

$$p + H$$

je eine Componente eines Paares, so fallen die anderen Componenten von selbst heraus, d. h. der genannte Ausdruck verwandelt sich in eine von den p, q freie Function der Parameter c. Aus diesen Eigenschaften folgt dann weiter, dass, wenn man die Gleichungen $H_1, H_2, \ldots$ nach den c auflöst, die für die c sich ergebenden Ausdrücke Integrale des vorgelegten Problems sind.

Aus diesen Bemerkungen lässt sich das Ergebniss ableiten, dass es nicht möglich ist, bei unserem System sechster Ordnung eine Trennung der Variablen durch rein algebraische Berührungstransformationen, d. h. Transformationen, bei welchen die kanonische Form der Differentialgleichungen erhalten bleibt, herbeizuführen. Bei einer algebraischen Transformation nämlich verwandelt sich K in eine algebraische Function der neuen Variablen. Wenn nun in diesem Falle eine Trennung nach den neuen Variablen möglich ist, so lassen sich die Parameter c stets so wählen, dass die Zusatzgleichungen

$$H_1 = 0, \qquad H_2 = 0, \qquad \ldots$$

die Variablen und die Parameter nur algebraisch enthalten. Man würde hiermit auf algebraische Integrale des Systems sechster Ordnung geführt. Darnach sind also die Transformationen, welche die Trennung der Variablen gestatten, nothwendiger Weise transcendent, ebenso wie die noch fehlenden Integrale.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist nun allerdings noch nicht die Möglichkeit ausgeschlossen, dass man nicht auf algebraischem Wege wenigstens zu einem neuen Integrale gelangen könnte. Diese Frage ist im Wesentlichen gleichbedeutend mit der andern: existiren Integrale, welche durch Quadraturen über algebraische Ausdrücke der p, q entstehen? Die Erledigung dieser Frage, zu welcher man nach Erschöpfung des Gebietes der algebraischen Integrale auch noch durch Überlegungen ganz anderer Art hingedrängt wird, würde auf dem hier eingeschlagenen Wege als der nächste nothwendige Schritt erscheinen, bevor man den Versuch macht, in den Differentialgleichungen selbst Fingerzeige bezüglich der für das Problem angemessenen transcendenten Transformationen aufzusuchen.

II.

17. In der vorangehenden Abtheilung habe ich gezeigt, dass bei dem Vielkörper-Problem die Gesammtheit der von der Zeit t freien, algebraischen Integrale erhalten wird, wenn man aus den neun bekannten Integralen dieser Art alle möglichen algebraischen Verbindungen bildet. Als Ergänzung hierzu wollen wir nun noch den Fall behandeln, dass ein Integral ausser den Coordinaten und Geschwindigkeiten auch noch die Variable t algebraisch enthält, wie dies ja bei den Schwerpunkts-Integralen eintreten kann. Zu dem Ende denken wir uns das System

$$\frac{dx_a}{dt} = f_a(x_1\,, \ldots, x_n\,, s), \qquad (a=1, 2, \ldots, n)$$

von Differentialgleichungen vorgelegt, in welchem die f rationale Functionen der x und einer einzigen, algebraisch von den x abhängenden Irrationalität s bedeuten, während t weder in den f, noch in s explicite vorkommt. Dieses System ist offenbar noch allgemeiner, als das in § 2 zu Grunde gelegte. Ist nun φ ein algebraisch von den Variablen x, t abhängendes Integral, so zeigt man zunächst durch die früher benutzten Überlegungen, dass sich φ algebraisch aus Integralen von der Form $\mathfrak{R}(x, s, t)$ zusammensetzen lässt. Wir nehmen deshalb an, dass φ von vornherein die Gestalt $\mathfrak{R}(x, s, t)$ besitze, denken uns dann φ als Quotienten zweier Polynome von der Form $\mathfrak{G}(x, s, t)$ geschrieben, und in Zähler und Nenner die Linearfactoren von der Form

$$t - t_1\,, \qquad t - t_2\,, \quad \ldots$$

aufgesucht, in denen die $t_1, t_2, \ldots$ algebraische und von t freie Functionen der x sind. Bildet man jetzt die vollständige logarithmische Ableitung von φ nach t und beachtet, dass in den Differentialgleichungen

t nicht explicite vorkommt, so erkennt man, dass die angegebenen Linearfactoren sämmtlich Integrale sind, und dass ferner der nach Unterdrückung dieser Factoren in φ übrigbleibende Bestandtheil von der Form $\mathfrak{R}(x, s)$ ebenfalls Integral ist. Die verschiedenen in t linearen Integrale unterscheiden sich von einander um algebraische und von t freie Integrale. Hiernach ist zur Aufstellung aller Integrale der betrachteten Art nur erforderlich zu kennen 1° alle algebraischen und von t freien Integrale, 2° ein einziges von t abhängiges Integral der Form $t - t_1$. Beim Vielkörper-Problem ist deshalb das Gebiet aller algebraischen Integrale durch die bekannten zehn völlig erschöpft.

18. Am Schlusse der ersten Abtheilung waren Betrachtungen über die Frage angestellt worden, wie weit es möglich sei, durch algebraische Transformationen der Lösung des Vielkörper-Problems näher zu kommen. In dem Nachstehenden soll dieser Gegenstand weiter verfolgt werden, wobei wir uns einstweilen auf das Dreikörper-Problem beschränken. Um später den Gedankengang nicht zu unterbrechen, sollen zunächst gewisse Nebenuntersuchungen vorweg erledigt werden.

In § 15 waren die Bewegungsgleichungen durch Benutzung der Schwerpunkts- und Flächensätze auf ein System achter Ordnung

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_\alpha}, \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

reducirt worden, in welchem die Variablen nur noch von der Configuration des Körpersystems abhängen. Die Gleichungen enthalten ausser den vier Paaren abhängiger Variablen $p, q, \ldots$ an Constanten die drei Massen m_α, die Grösse k und die sechs Grössen a_α, b_α. Die Grösse ik ist der constante Werth des dritten Flächenintegrals, wenn die invariable Ebene als Fundamentalebene gewählt wird; die Constanten a_α, b_α konnten innerhalb der Einschränkungen

$$(31) \qquad a_2 b_3 - a_3 b_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$$

willkürlich gewählt werden. Bildet man mittelst der transformirenden Function

$$V = rq + \frac{1}{2} \sum r_\alpha q_\alpha^2, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

die Substitutionsgleichungen

$$p = \frac{\partial V}{\partial q}, \qquad s = \frac{\partial V}{\partial r},$$

$$p_a = \frac{\partial V}{\partial q_a}, \qquad s_a = \frac{\partial V}{\partial r_a}, \qquad (a=1,2,3)$$

aus denen

$$r = p, \qquad s = q,$$

$$r_a = \frac{p_a}{q_a}, \qquad s_a = \frac{1}{2} q_a^2$$

folgt, so werden die Bewegungsgleichungen

$$\frac{ds_a}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial r_a}, \qquad \frac{dr_a}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial s_a}. \qquad (a=0,1,2,3)$$

Im Folgenden werden wir, je nach Umständen, das System der p, q oder r, s benutzen, jedoch für das eine Paar r, s die ursprüngliche Bezeichnung p, q beibehalten. Ferner soll wie früher das Zeichen Σ ohne Summationsbuchstaben eine cyclische Summation über die Indices $1, 2, 3$ bedeuten. Dies festgesetzt stellen wir zuerst die weiterhin benutzten Abkürzungen und Relationen zusammen. Es sei

$$C = \sum \frac{s_1}{m_1}, \qquad C' = \sum r_1 s_1,$$

$$D = \sum r_2 r_3, \qquad D' = \sum \frac{r_2 + r_3}{m_1},$$

$$L_2 = C'D' - CD,$$

$$H_1 = \sum A_1 r_1 = M_0 + M_1 q + M_2 q^2,$$

$$A_1 = (a_1 - b_1 q)\left(\frac{a_2 - b_2 q}{m_2} - \frac{a_3 - b_3 q}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$M_0 = \sum_a M_{0a} r_a, \qquad M_1 = \sum_a M_{1a} r_a, \qquad M_2 = \sum_a M_{2a} r_a,$$

$$M_{01} = \quad a_1\left(\frac{a_2}{m_2} - \frac{a_3}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$M_{11} = -a_1\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right) - b_1\left(\frac{a_2}{m_2} - \frac{a_3}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$M_{21} = \quad b_1\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$m_0 = m_1 + m_2 + m_3, \qquad m_4 = m_1 m_2 m_3, \qquad m = \frac{m_0}{m_4},$$

$$\mu_0 = \sum \frac{b_1^2}{m_1}, \qquad \mu_1 = \sum \frac{a_1 b_1}{m_1}, \qquad \mu_2 = \sum \frac{a_1^2}{m_1},$$

$$\mu_0 \mu_2 - \mu_1 \mu_1 = m.$$

$$L_1 = \sum r_1 a_1 \left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right) = \sum_\alpha L_{1\alpha} r_\alpha,$$

$$L_{11} = a_1\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$\sum_\alpha \frac{L_{1\alpha}}{m_\alpha} = m.$$

Für die M, L bestehen, wenn f_1, f_2, f_3 drei willkürliche Zahlen bedeuten, die zusammenfassende Determinanten-Relationen

$$|f_\alpha, M_{1\alpha}, M_{2\alpha}| = \mu_0 \sum \frac{f_1}{m_1}, \qquad |f_\alpha, M_{2\alpha}, M_{0\alpha}| = \mu_1 \sum \frac{f_1}{m_1},$$

$$|f_\alpha, M_{0\alpha}, M_{1\alpha}| = \mu_2 \sum \frac{f_1}{m_1}, \qquad |f_\alpha, L_{1\alpha}, M_{0\alpha}| = -m\sum f_1 a_2 a_3,$$

$$|f_\alpha, L_{1\alpha}, M_{1\alpha}| = m\sum f_1 (a_2 b_3 + a_3 b_2) + \mu_1 \sum \frac{f_1}{m_1},$$

$$|f_\alpha, L_{1\alpha}, M_{2\alpha}| = -m\sum f_1 b_2 b_3 - \mu_0 \sum \frac{f_1}{m_1}.$$

Ferner ist noch

$$0 = \sum_a \frac{A_a}{m_a} = \sum_a \frac{M_{0a}}{m_a} = \sum_a \frac{M_{1a}}{m_a} = \sum_a \frac{M_{2a}}{m_a},$$

$$0 = \sum_a \mu_a M_{a,1} = \sum_a \mu_a M_a,$$

$$4M_{01}M_{21} - M_{11}M_{11} = -\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)^2, \quad \text{etc.}$$

$$4(M_{02}M_{23} + M_{03}M_{22}) - 2M_{12}M_{13} = -2\left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1}\right)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + 4m, \text{ etc.}$$

$$4M_0M_2 - M_1M_1 = 4mD - D'D'.$$

Die letzte Relation lehrt, dass der Ausdruck H_1, als Function von q, r_1, r_2, r_3 betrachtet, irreductibel ist. Setzen wir endlich noch an

$$\sum B_1 r_1 = k\sum r_1(a_1 - b_1 q)\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right)$$

$$= kL_1 - kqM_2,$$

$$U = \sum \frac{m_2 m_3}{q_1},$$

$$H_2 = L_2 + kL_1 - kqM_2 - U,$$

so ist der zur Bildung der Differentialgleichungen erforderliche Ausdruck H' gegeben durch

$$H' = pH_1 + H_2.$$

Die mit H' gebildeten Bewegungsgleichungen wollen wir kurz als das System achter Ordnung bezeichnen. Der Ausdruck H' ist die Differenz »lebendige Kraft minus Kräftefunction«. Bezeichnet man den constanten Werth dieser Differenz wie früher mit $-h$ und setzt

$$K = (H_2 + h) : H_1,$$

so erhält man das von p und t freie »System sechster Ordnung«

$$\frac{dq_a}{dq} = \frac{\partial K}{\partial p_a}, \qquad \frac{dp_a}{dq} = -\frac{\partial K}{\partial q_a}. \qquad (a = 1, 2, 3)$$

Fügt man hierzu die Gleichung

$$\frac{dt}{dq} = 1 : H_1,$$

so erhält man das »System siebenter Ordnung«, welches sich aus dem 8. Ordnung dadurch ergiebt, dass man mittelst des Integrals der lebendigen Kraft die Variable p fortschafft und q an Stelle von t als unabhängige Variable einführt. Umgekehrt kann man von dem System 7. Ordnung zu dem 8. Ordnung dadurch gelangen, dass man an Stelle der Constante h die Variable p durch die Gleichung

$$pH_1 + H_2 + h = 0$$

einführt.

19. Die in H' und K auftretenden Constanten a, b konnten innerhalb der oben erwähnten Einschränkungen völlig beliebig gewählt werden, und man hätte z. B. ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen das specielle Werthsystem

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1, & a_2 = 0, & a_3 = -1 \\ b_1 = 0, & b_2 = 1, & b_3 = -1 \end{array}$$

zu Grunde legen können. Der Symmetrie halber wollen wir jedoch die a, b unbestimmt lassen, und zeigen, wie sich die für zwei verschiedene Werthsysteme der a, b geltenden Differentialgleichungen in einander überführen lassen. Es seien a, b, c, d vier willkürliche, nur der Einschränkung

$$ad - bc = 1$$

unterworfene Constanten. Man setze an

$$a_\alpha = aa'_\alpha + bb'_\alpha, \qquad b_\alpha = ca'_\alpha + db'_\alpha,$$

dann ist

$$a'_2 b'_3 - a'_3 b'_2 = 1, \quad \text{etc.},$$

d. h. die a', b' genügen denselben Bedingungen wie die ursprünglichen a, b. Ferner sei

$$q = \frac{aq' + b}{cq' + d},$$

wo q' eine neue anstatt q in das System 7. Ordnung einzuführende unabhängige Variable bedeutet; dann ist

$$a_a - b_a q = (a'_a - b'_a q') : (cq' + d),$$

$$(cq' + d)^2 H_1 = \Sigma r_1 (a'_1 - b'_1 q')\left(\frac{a'_2 - b'_2 q'}{m_2} - \frac{a'_3 - b'_3 q'}{m_3}\right) = H'_1,$$

$$\Sigma B_1 r_1 - kc(cq' + d)H_1 = k\Sigma r_1 (a'_1 - b'_1 q')\left(\frac{b'_2}{m_2} - \frac{b'_3}{m_3}\right).$$

Schreibt man also in K anstatt q und anstatt der a, b resp. q' und a', b', so erhält man für den so entstehenden Ausdruck K' die Relationen

$$K' = \frac{K}{(cq' + d)^2} - \frac{kc}{cq' + d},$$

$$K = K'(cq' + d)^2 + kc(cq' + d).$$

Beachtet man nun noch die Gleichung

$$dq = dq' : (cq' + d)^2,$$

so erkennt man leicht, dass das System 7. Ordnung nach Einführung von q' die Form

$$\frac{dq_a}{dq'} = \frac{\partial K'}{\partial p_a}, \qquad \frac{dp_a}{dq'} = -\frac{\partial K'}{\partial q_a}, \qquad \frac{dt}{dq'} = 1 : H'_1$$

annimmt.

Von den acht Variablen p, q besitzen drei, nämlich q_1, q_2, q_3, eine einfache geometrische Bedeutung, indem sie die gegenseitigen Distanzen der drei Körper darstellen. Wir wollen nun auch für die übrigen Variablen den Zusammenhang mit den ursprünglichen Bestimmungsstücken, nämlich den Coordinaten und Geschwindigkeiten aufsuchen. Es seien X, Y, Z und X', Y', Z' die auf den Schwerpunkt und auf ein beliebig gerichtetes Axensystem bezogenen Coordinaten und Geschwindigkeiten, ferner x, y, z und x', y', z' die analogen Grössen, wenn die invariable

Ebene als xy-Ebene gewählt wird. Bedeuten k_1, k_2, k_3 die constanten Werthe der drei Flächensätze für das erste Axensystem, so ist

$$k_1 = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} Y_\alpha & Y'_\alpha \\ Z_\alpha & Z'_\alpha \end{vmatrix}, \qquad k_2 = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} Z_\alpha & Z'_\alpha \\ X_\alpha & X'_\alpha \end{vmatrix}, \qquad k_3 = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} X_\alpha & X'_\alpha \\ Y_\alpha & Y'_\alpha \end{vmatrix},$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2 = 0.$$

Die x, y, z hängen mit den X, Y, Z durch eine orthogonale Substitution der Form

$$x = a\,X + b\,Y + c\,Z,$$

$$y = a'X + b'Y + c'Z,$$

$$z = a''X + b''Y + c''Z,$$

zusammen, für welche die Relation

$$1 : a'' : b'' : c'' = ik : k_1 : k_2 : k_3$$

gilt. Nun war

$$q = \sum_\alpha a_\alpha(x_\alpha + iy_\alpha) : \sum_\alpha b_\alpha(x_\alpha + iy_\alpha);$$

andererseits ist

$$x + iy = X(a + ia') + Y(b + ib') + Z(c + ic'),$$

$$k^2(a - ia')(x + iy) = X(k^2 + k_1^2) + Y(k_1k_2 + kk_3) + Z(k_1k_3 - kk_2),$$

folglich

$$q = q_{01} : q_{02},$$

wenn

$$q_{01} = \sum_\alpha a_\alpha\{X_\alpha(k^2 + k_1^2) + Y_\alpha(k_1k_2 + kk_3) + Z_\alpha(k_1k_3 - kk_2)\},$$

$$q_{02} = \sum_\alpha b_\alpha\{X_\alpha(k^2 + k_1^2) + Y_\alpha(k_1k_2 + kk_3) + Z_\alpha(k_1k_3 - kk_2)\}$$

gesetzt wird. Hiermit ist offenbar der gesuchte Zusammenhang für q gegeben.

Um den analogen Zusammenhang für die p nachzuweisen, benutzen wir die Differentialgleichungen

$$\frac{dq}{dt} = H_1 = \Sigma A_1 r_1 ,$$

$$\frac{ds_1}{dt} = C'\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) + D's_1 - C(r_2 + r_3) + A_1 p + B_1 ,$$

. . . .

deren Auflösung nach den r und nach p die gesuchten Beziehungen liefert. Zur Abkürzung setzen wir

$$s'_\alpha = \Sigma s_1 - 2s_\alpha, \qquad s'_2 + s'_3 = 2s_1, \quad \text{etc.},$$

$$A'_\alpha = \Sigma A_1 - 2A_\alpha, \qquad A'_2 + A'_3 = 2A_1, \quad \text{etc.},$$

$$B'_\alpha = \Sigma B_1 - 2B_\alpha, \qquad B'_2 + B'_3 = 2B_1, \quad \text{etc.},$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \Sigma s_1 s'_1 \\ &= 2\Sigma s_2 s_3 - \Sigma s_1^2 \\ &= \Sigma s'_2 s'_2 . \end{aligned}$$

Δ ist offenbar das 4-fache Quadrat des von den drei Körpern gebildeten Dreiecks. Weiter sei

$$\begin{aligned} T_1 &= \Sigma A_1 s'_1 - \Sigma A'_1 s_1 , \\ T_2 &= \Sigma B_1 s'_1 = \Sigma B'_1 s_1 , \\ V_1 &= \Sigma A_1 A'_1 , \\ V_2 &= \Sigma A_1 B'_1 = \Sigma A'_1 B_1 , \\ W_1 &= \Sigma A_1 s'_1 . \Sigma A'_1 s_1 - \Delta \Sigma A_1 A'_1 \\ &= T_1^2 - \Delta V_1 , \\ W_2 &= \Sigma A_1 s'_1 . \Sigma B_1 s'_1 - \Delta \Sigma A_1 B'_1 \\ &= T_1 T_2 - \Delta V_2 , \end{aligned}$$

dann wird

$$\frac{d\Delta}{dt} = 2\sum s_1' \frac{ds_1}{dt}$$

$$= 2\Delta D' + pT_1 + 2T_2,$$

$$\frac{dC}{dt} = m(2C' + k),$$

$$\frac{ds_1'}{dt} = \frac{2C'}{m_1} + D's_1' - 2Cr_1 + A_1'p + B_1',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum A_1 \frac{ds_1'}{dt} = D'T_1 - 2C\frac{dq}{dt} + pV_1 + V_2,$$

$$T_1\frac{d\Delta}{dt} - 2\Delta\sum A_1\frac{ds_1'}{dt} = 4C\Delta\frac{dq}{dt} + 2pW_1 + 2W_2,$$

$$\frac{2\Delta}{mm_1}\frac{dC}{dt} + s_1'\frac{d\Delta}{dt} - 2\Delta\frac{ds_1'}{dt}$$

$$= \frac{2\Delta k}{m_1} + 4C\Delta r_1 + 2p(s_1'T_1 - \Delta A_1') + 2(s_1'T_2 - \Delta B_1').$$

Hiernach sind p und p_a linear durch die Ableitungen der q, q_a ausgedrückt; die Coefficienten in diesen linearen Ausdrücken besitzen den gemeinsamen Nenner

$$C\Delta W_1.$$

Es mag hier noch bemerkt werden, dass die Grössen

$$q, q_a, p, p_a, k, k_a, h,$$

wenn sie durch die ursprünglichen Variablen X, X', ... ausgedrückt werden, homogen im Sinne des § 4 sind. Infolge dessen bleiben die drei reducirten Systeme von Differentialgleichungen, nämlich das System 6., 7., 8. Ordnung, ungeändert, wenn jede darin vorkommende Grösse mit der ihrer Dimension entsprechenden Potenz eines constanten Proportionalitäts-Factors multiplicirt wird.

20. Als nächste Aufgabe behandeln wir die Aufsuchung der zu dem System 7. Ordnung gehörigen Integralgleichungen von der Form

$$\mathfrak{G}(t, q, q_a, p_a).$$

Dass wenigstens eine solche Integralgleichung, nämlich die Bedingung für die Bewegung der drei Körper in einer Ebene, vorhanden ist, lässt sich von vornherein unschwer durch geometrische Überlegungen zeigen; es kommt jedoch wesentlich darauf an nachzuweisen, dass nur diese eine existirt. Es sei φ eine irreductible ganze Function der acht Variablen t, q, q_α, p_α; schreibt man

$$q_4 = q_1 q_2 q_3, \qquad K = \frac{q_4 H_2 + q_4 h}{q_4 H_1},$$

so sind in K Zähler und Nenner von der Form $\mathfrak{G}(p, q)$ und man erkennt, dass der Ausdruck

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{\partial\varphi}{\partial q} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial K}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial K}{\partial q_\alpha}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{1}{H_1}$$

durch Multiplication mit $(q_4 H_1)^2$ ebenfalls die Gestalt $\mathfrak{G}(p, q)$ annimmt. Wenn also φ eine Integralgleichung ist, so muss

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log\varphi}{dq} = \omega, \qquad \omega = \mathfrak{G}(t, p, q)$$

sein. Wenn t in φ wirklich vorkommt, so können wir schreiben

$$\varphi = P_0 t^\nu + P_1 t^{\nu-1} + \ldots + P_\nu,$$

wo ν mindestens gleich Eins ist. Bildet man, indem für den Augenblick t als unabhängige Variable genommen wird, die vollständige Ableitung von φ nach t, so ist diese nach t höchstens vom Grade ν, d. h. die logarithmische Ableitung frei von t. Hieraus ergeben sich, wenn

$$\frac{d \log\varphi}{dt} = \omega'$$

gesetzt wird, die Bedingungen

$$\frac{dP_0}{dt} = \omega' P_0, \qquad \nu P_0 + \frac{dP_1}{dt} = \omega' P_1,$$

also

$$\nu + \frac{d}{dt}\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = 0,$$

d. h. es wäre

$$\nu t + \frac{P_1}{P_0}$$

ein Integral des Systems 7. Ordnung. Da ein Integral dieser Form für die relativen Bewegungen der drei Körper, wie wir wissen, nicht existirt, so schliessen wir, dass t in φ nicht vorkommt.

Durch die bereits mehrfach benutzte Betrachtungsweise zeigt man ferner, dass die Coefficienten in φ sich allemal darstellen lassen müssen als algebraische Functionen der in den Differentialgleichungen auftretenden Constanten m, a, b, h, k und eventuell gewisser, ausserdem noch auftretender constanter Parameter. Mit Rücksicht hierauf denken wir uns die Coefficienten in φ dargestellt als rationale Functionen jener Constanten und einer algebraisch von denselben abhängenden Irrationalität Γ, welche als Wurzel einer gewissen irreductiblen Gleichung definirt ist. Die Bedingung

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log \varphi}{dq} = \omega$$

gilt dann für alle Wurzelwerthe Γ. Bilden wir jetzt die Summe über die den einzelnen Γ entsprechenden Bedingungen, so erhalten wir

$$(32) \qquad (q_4 H_1)^2 \frac{d \log \Phi}{dq} = \Omega,$$

wo Φ das Product der einzelnen φ und Ω die Summe der einzelnen ω bedeutet. Die Φ und Ω sind dann von der Irrationalität Γ frei und wir können uns auf die Aufsuchung der Integralgleichungen von der Form Φ beschränken, da man von Φ rückwärts durch Zerlegung in Factoren zu den φ gelangt. Die Hinzufügung oder Unterdrückung constanter Factoren ist auf das Bestehen der Bedingung (32) offenbar ohne Einfluss; wir dürfen deshalb φ als eine ganze Function nicht bloss der Variablen p, q, sondern auch der Constanten m, a, b, h, k und der etwa auftretenden constanten Parameter $c_1, c_2, \ldots$ voraussetzen und ferner annehmen, dass Φ keine von den Variablen p, q freien Theiler der Form

$$\mathfrak{G}(m, a, b, h, k, c_1, c_2, \ldots)$$

besitze. Der Ausdruck Ω ist dann sicher von der Form

$$\mathfrak{G}(p, q, h, k, c_1, c_2, \ldots).$$

Wir wollen nun zunächst zeigen, dass Φ parameterfrei ist. Wenn

nämlich Φ einen Parameter — sagen wir c — enthält, so denken wir uns Φ nach c geordnet und

$$\Phi = \Phi_0 c^\nu + \Phi_1 c^{\nu-1} + \ldots + \Phi_\nu$$

geschrieben. Da Ω in c vom Grade Null ist, so erhalten wir

$$\Omega(q_4 H_1)^{-2} = \frac{d \log \Phi_0}{dq} = \frac{d \log \Phi_1}{dq} = \ldots,$$

d. h. der Quotient zweier Φ_a ist ein rational aus den p, q gebildetes Integral des Systems 7. Ordnung, reducirt sich also, da solche Integrale nicht existiren, auf eine Constante. Infolge dessen könnte ein Parameter c in Φ nur in einem von den Variablen p, q freien Theiler enthalten sein. Da solche Theiler von vornherein unterdrückt werden sollten, so ist Φ parameterfrei und deswegen auch homogen in den Dimensionen.

Der Ausdruck Φ kann den Theiler $q_4 H_1$ enthalten. Führen wir, wenn u, v zwei Functionen der Variablen p, q bedeuten, das bekannte Operationssymbol

$$(u, v) = \sum \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right)$$

ein, so wird

$$\frac{d \log (q_4 H_1)}{dq} = \frac{\partial \log (q_4 H_1)}{\partial q} + \left(\log q_4 H_1, \frac{q_4 H_2 + q_4 h}{q_4 H_1} \right),$$

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log (q_4 H_1)}{dq} = q_4 H_1 \frac{\partial (q_4 H_1)}{\partial q} + (q_4 H_1, q_4 H_2 + q_4 h).$$

Hiernach können wir uns in Φ den etwa vorkommenden Theiler $q_4 H_1$ unterdrückt denken, ohne dass dadurch an der Bedingung (32) etwas Wesentliches geändert wird. Dies festgesetzt führen wir jetzt in Φ und Ω anstatt h die Variable p durch die Gleichung

$$h = -pH_1 - H_2$$

ein. Beide Ausdrücke bleiben dabei in Bezug auf q, p, p_a ganz rational, können dagegen in Bezug auf die q_a Nenner enthalten, welche jedoch nur Potenzen der q_a als Theiler besitzen. Gehen wir, entsprechend der gemachten Substitution, von dem System 7. Ordnung auf das 8. Ord-

nung über und führen t als unabhängige Variable ein, so können wir schreiben

$$\frac{d \log \Phi}{dt} = \Omega : (q_4^2 H_1) = \Omega',$$

wo Ω', da Φ nicht den Theiler $q_4 H_1$ besitzt, im Nenner sicher nur Potenzen der q_α als Theiler enthält. Führen wir weiter für die p ihre in § 19 gegebenen linearen Ausdrücke durch die

$$\frac{dq}{dt}, \frac{ds_\alpha}{dt}$$

ein, so werden Φ und Ω' ganze Functionen dieser Ableitungen und enthalten in den Nennern als Theiler nur Potenzen von q_α, C, Δ und W_2. Führt man endlich statt der $q, \ldots$ ihre Ausdrücke durch die rechtwinkligen, auf den Schwerpunkt und ein willkürlich gerichtetes Axensystem bezogenen Coordinaten und Geschwindigkeiten $X, X', \ldots$ ein, und denkt sich auch die in q vorkommenden Grössen k_1, k_2, k_3, sowie die durch die Gleichung

$$\Sigma k_1^2 + k^2 = 0$$

bestimmte Quadratwurzel k durch die $X, X', \ldots$ ausgedrückt, so wird Φ eine Integralgleichung der ursprünglichen Bewegungsgleichungen, welche die Form

$$\mathfrak{R}(X, \ldots, X', \ldots, q_\alpha, k)$$

besitzt, im Nenner jedoch die Geschwindigkeiten nur in den vier Verbindungen k_α, k enthält. Das Gleiche gilt von der Form des Ausdruckes Ω'.

Es werde jetzt mit Φ_1 das Product derjenigen Theiler im Zähler von Φ bezeichnet, welche sich, als Functionen der $X', \ldots$ betrachtet, nicht durch die k_α, k allein ausdrücken lassen, und es sei

$$\Phi = \Phi_1 \Phi_2, \qquad \frac{d \log \Phi_1}{dt} = \Omega_1, \qquad \frac{d \log \Phi_2}{dt} = \Omega_2,$$

dann ist Ω_2 genau von derselben Form wie Ω' und dasselbe gilt wegen

$$\Omega_1 = \Omega' - \Omega_2$$

auch von Ω_1. Weiter erkennt man, dass wegen der über Φ_1 gemachten Festsetzungen Ω_1 in Wirklichkeit im Nenner nur Potenzen der q_α als

Theiler enthalten kann; Φ_1 ist also, wenn es sich nicht etwa auf eine Constante reducirt, eine Integralgleichung für die Bewegung relativ um den Schwerpunkt. Schreibt man mit Rücksicht auf die Irrationalität k

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + k\Phi_{12},$$

$$\Omega_1 = \Omega_{11} + k\Omega_{12},$$

$$\Phi_{11} \quad \text{und} \quad \Phi_{12} = \mathfrak{P}(X, X', \ldots, q_a),$$

$$q_4^2\Omega_{11} \quad \text{und} \quad q_4^3\Omega_{12} = \mathfrak{P}(X, X', \ldots, q_a),$$

so ist, da die Bedingung

$$\frac{d \log}{dt}(\Phi_{11} + k\Phi_{12}) = \Omega_{11} + k\Omega_{12}$$

für beide Vorzeichen von k gilt,

$$\frac{d \log}{dt}(\Phi_{11}^2 - k^2\Phi_{12}^2) = 2\Omega_{11}.$$

Das Product

(33) $$(\Phi_{11} + k\Phi_{12})(\Phi_{11} - k\Phi_{12})$$

ist also eine homogene Integralgleichung von der früher behandelten Art und ist deshalb, da es sich hier nur um die relative Bewegung handelt, in der Form

$$\mathfrak{P}(X, Y, Z, q_a)\mathfrak{P}(k_1, k_2, k_3, h)$$

darstellbar. Eliminirt man also in dem Producte (33) mittelst der Gleichungen

$$0 = \Sigma m_1 X_1' = \Sigma m_1 Y_1' = \Sigma m_1 Z_1'$$

und der Ausdrücke für die k_a, k sieben von den neun Grössen X', Y', Z', so müssen die beiden anderen von selbst mit herausfallen; dies ist aber nicht anders möglich, als wenn jeder der beiden Factoren jenes Productes einzeln durch die angegebene Elimination von sämmtlichen X', Y', Z' gleichzeitig befreit wird. Hiernach kann also die gesuchte Integralgleichung Φ, wenn man wieder auf die Variabeln des Systems 7. Ordnung zurückgeht, nur die vier Variabeln q enthalten oder muss m. a. W. frei von den p_a sein.

21. Unsere Aufgabe ist jetzt darauf zurückgeführt, eine von den p_a freie Lösung Φ der Form $\mathfrak{G}(q, q_a)$ zu der Bedingung

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log \Phi}{dq} = \Omega, \qquad \Omega = \mathfrak{G}(q, q_a, p_a)$$

zu suchen. Zunächst ist

$$\Omega = (q_4 H_1)^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + (q_4 H_1)^2 \left(\log \Phi, \frac{H_2 + h}{H_1}\right)$$

$$= (q_4 H_1)^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + q_4^2 H_1 (\log \Phi, H_2 + h) - q_4^2 (H_2 + h)(\log \Phi, H_1).$$

Diese Gleichung zeigt, dass Ω in den p_a höchstens vom zweiten und in den q_a höchstens vom vierten Grade ist. Wir spalten Ω nach der Ordnung der einzelnen Glieder in Bezug auf die p_a in die drei Bestandtheile

$$\Omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2,$$

wo der Index die Ordnung nach den p angiebt, und führen statt der p_a die r_a durch die Relationen

$$p_a = r_a q_a$$

ein. Hiermit werden ω_1 und ω_2 nach den q_a höchstens vom 5^{ten}, resp. 6^{ten} Grade. Weiter wird, wenn man entwickelt,

$$\omega_0 = q_4^2 (U - h)(\log \Phi, H_1),$$

$$\omega_1 = k q_4^2 H_1 (\log \Phi, L_1 - q M_2) - k q_4^2 (L_1 - q M_2)(\log \Phi, H_1),$$

$$\omega_2 = (q_4 H_1)^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + q_4^2 H_1 (\log \Phi, L_2) - q_4^2 L_2 (\log \Phi, H_1),$$

wobei zu beachten ist, dass das Symbol (u, v) auch in der Form

$$\sum \left(\frac{\partial u}{\partial s_1} \frac{\partial v}{\partial r_1} - \frac{\partial v}{\partial s_1} \frac{\partial u}{\partial r_1} \right)$$

geschrieben werden kann. Bei der Integration der drei Bedingungen für Φ wollen wir der besseren Übersicht halber folgende Abkürzungen und Relationen benutzen:

$$E = \Sigma a_2 a_3 s_1, \qquad F = -\Sigma(a_2 b_3 + a_3 b_2) s_1, \qquad G = \Sigma b_2 b_3 s_1,$$

$$C + \mu_0 E + \mu_1 F + \mu_2 G = 0,$$

$$\begin{array}{llll}
(C, M_0) = 0, & (E, M_0) = \quad 0, & (F, M_0) = \quad \mu_2, & (G, M_0) = -\mu_1, \\
(C, M_1) = 0, & (E, M_1) = -\mu_2, & (F, M_1) = \quad 0, & (G, M_1) = \quad \mu_0, \\
(C, M_2) = 0, & (E, M_2) = \quad \mu_1, & (F, M_2) = -\mu_0, & (G, M_2) = \quad 0, \\
(C, H_1) = 0, & (E, H_1) = -\mu_2 q + \mu_1 q^2, & (F, H_1) = \quad \mu_2 - \mu_0 q^2, & (G, H_1) = -\mu_1 + \mu_0 q, \\
(C, L_1) = m, & (E, L_1) = \quad 0, & (F, L_1) = \quad \mu_1, & (G, L_1) = -\mu_0,
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(C, L_2) &= 2mC'', \\
(E, L_2) &= -\mu_2 C'' + ED' + C\Sigma a_1 a_1 r_1, \\
(F, L_2) &= \quad 2\mu_1 C'' + FD' - 2C\Sigma a_1 b_1 r_1, \\
(G, L_2) &= -\mu_0 C'' + GD' + C\Sigma b_1 b_1 r_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= E + Fq + Gq^2 \\
&= \Sigma s_1 (a_2 - b_2 q)(a_3 - b_3 q),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Q, M_0) &= \quad \mu_2 q - \mu_1 q^2, \\
(Q, M_1) &= -\mu_2 \quad + \mu_0 q^2, \\
(Q, M_2) &= \quad \mu_1 \quad - \mu_0 q, \\
(Q, H_1) &= \quad 0, \\
(Q, L_1) &= \quad \mu_1 q - \mu_0 q^2.
\end{aligned}$$

$$(Q, L_1 - qM_2) = 0,$$

$$\begin{aligned}
(Q, L_2) &= QD' + \Sigma(a_1 - b_1 q)^2 \left(Cr_1 - \frac{C'}{m_1}\right) \\
&= QD' + Q\frac{\partial H_1}{\partial q} - H_1 \frac{\partial Q}{\partial q}.
\end{aligned}$$

Die erste von den drei Bedingungen für Φ nimmt mit der Abkürzung

$$q_4 (U - h) = V, \qquad V = \quad (q_a)$$

die Gestalt

$$\omega_0 = q_4 V(\log \Phi, H_1) = V \sum A_1 q_2 q_3 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q_1}$$

an. Da Φ möglicherweise durch V theilbar ist, so setzen wir an

$$\Phi = \Psi \,.\, V^\rho, \qquad \Psi = \mathfrak{G}(q\,,\,q_a),$$

mit dem Zusatze, dass Ψ nicht durch V theilbar sein soll. Wir erhalten dann

$$q_4(\log\Psi,\,H_1) = \frac{\omega_0 - \rho q_4(V\,,\,H_1)}{V}\,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann, entwickelt, im Nenner nicht den Theiler V enthalten, folglich ist der Zähler der rechten Seite durch V theilbar, also die rechte Seite in den q_α höchstens vom ersten Grade, so dass wir ansetzen dürfen

$$q_4(\log\Psi,\,H_1) = \omega_{00} + \sum_a \omega_{0a} q_a,$$

wo die Coefficienten rechts nur noch von q abhängen. Führt man in diese partielle Differentialgleichung an Stelle der q_α die Variablen q_1, C und Q ein, so wird

$$A_1 q_2 q_3 \frac{\partial \log\Psi}{\partial q_1} = \omega_{00} + \sum_a \omega_{0a} q_a,$$

$$A_1 \log\Psi = \omega_{00}\int\frac{dq_1}{q_2 q_3} + \sum_a \omega_{0a}\int\frac{q_a dq_1}{q_2 q_3},$$

wo bei den Quadraturen q_2 und q_3 durch q_1, C, Q ausgedrückt zu denken sind. Die erste Quadratur führt auf elliptische Integrale, welche in $\log\Psi$ nicht vorkommen dürfen, d. h. es ist ω_{00} gleich Null. Die drei anderen Quadraturen führen auf Logarithmen und lassen sich, wie leicht verificirt werden kann, in der Form

$$A_1\sigma_1\log\left(\frac{q_2}{\sqrt{A_2}} + \frac{q_3}{\sqrt{A_3}}\right), \qquad A_1\sigma_2\log\left(\frac{q_3}{\sqrt{A_3}} + \frac{q_1}{\sqrt{A_1}}\right),$$

$$A_1\sigma_3\log\left(\frac{q_1}{\sqrt{A_1}} + \frac{q_2}{\sqrt{A_2}}\right)$$

schreiben, wo die σ wegen der Beschaffenheit von Ψ nothwendiger Weise ganze Zahlen sind. Setzt man nun

$$\log\Psi = \sum\sigma_1\log\left(\frac{q_2}{\sqrt{A_2}} + \frac{q_3}{\sqrt{A_3}}\right) + f(q\,,\,C\,,\,Q),$$

so ergiebt die Substitution in die Differentialgleichung die Relationen

$$\omega_{0a} = \sqrt{A_1 A_2 A_3} \cdot \frac{\sigma_a}{\sqrt{A_a}},$$

d. h. entgegen den für ω bestehenden Voraussetzungen irrationale Ausdrücke. Die σ und ω_{0a} müssen deshalb verschwinden und es ist Ψ als Function der drei Grössen q, C, Q allein darstellbar. Setzt man nun in dem ursprünglichen Ausdrucke für Ψ an Stelle von q_2 und q_3 ihre Ausdrücke durch q_1, C, Q, so muss q_1 von selbst herausfallen; entwickelt man andererseits q_2, q_3 und dann Ψ nach fallenden Potenzen von q_1, so erkennt man, dass Ψ die Gestalt $\mathfrak{S}(C, Q)$ besitzt, also in der ursprünglichen Gestalt nur die Quadrate der q_a enthielt. Mit Rücksicht hierauf kann man zunächst schreiben

$$\Psi = \mathfrak{S}(q, E, F, G).$$

Eliminirt man hieraus abwechselnd eines der drei Paare FG, GE, EF mittelst der drei Gleichungen

$$\begin{aligned} E\mu_0 + F\mu_1 + G\mu_2 &= -C, \\ E \;\; + Fq \;\; + Gq^2 &= \;\;\; Q, \end{aligned}$$

so muss die dritte Grösse E oder F oder G jedesmal von selbst mit herausfallen. Als Nenner können bei den drei so entstehenden Formen für Ψ nur Potenzen von

$$\mu_1 q^2 - \mu_2 q, \qquad \mu_2 - \mu_0 q^2, \qquad \mu_0 q - \mu_1$$

auftreten. Diese Nenner müssen jedoch, da sie keine gemeinsamen Theiler besitzen, sich in Wirklichkeit jedesmal fortheben, d. h. es ist

$$\Psi = \mathfrak{S}(q, C, Q), \qquad \Phi = \Psi \cdot V^\rho.$$

22. Mit dem gefundenen Ausdrucke für Ψ gehen wir jetzt in die zweite der aufgestellten Bedingungen ein und erhalten zunächst

$$\omega_1 = \frac{k\rho q_1^2}{V}\{H_1(V, L_1 - qM_2) - (L_1 - qM_2)(V, H_1)\}$$
$$+ k_1^2\{H_1(\log\Psi, L_1 - qM_2) - (L_1 - qM_2)(\log\Psi, H_1)\}.$$

Die erste, V enthaltende Klammer $\{\}$ ist nicht durch V theilbar, wie man

schon durch Betrachtung der Glieder erkennt, welche die in V vorkommende Grösse h enthalten. Da andererseits die übrigen Glieder der Differentialgleichung V nicht im Nenner enthalten können, so muss die genannte Klammergrösse in Wirklichkeit fehlen, d. h. ρ gleich Null sein, also

$$\Psi = \Phi.$$

Hiermit geht die Differentialgleichung über in

$$\begin{aligned}\frac{\omega_1}{kq_4^2 H_1} &= \frac{\partial \log \Phi}{\partial C}(C, L_1 - qM_2) + \frac{\partial \log \Phi}{\partial Q}(Q, L_1 - qM_2)\\ &= m\frac{\partial \log \Phi}{\partial C}.\end{aligned}$$

Die linke Seite muss von q_1 unabhängig werden, sobald man für q_2 und q_3 ihre Ausdrücke durch q_1, C, Q einführt. Entwickelt man nun wie vorhin wieder nach fallenden Potenzen von q_1, so kann, da ω_1 nach den q_a höchstens vom fünften Grade ist, überhaupt kein von q_1 freies Glied auftreten, d. h. es wird

$$0 = \frac{\partial \log \Phi}{\partial C}, \qquad \Phi = \mathfrak{G}(q, Q).$$

Hiermit gehen wir jetzt in die dritte Differentialgleichung ein, wobei zu beachten ist, dass in Φ q theils explicite, theils implicite, nämlich in Q, vorkommt, und schreiben demgemäss

$$\begin{aligned}\omega_2 &= (q_4 H_1)^2\left\{\frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial Q}\frac{\partial F}{\partial q}\right\} + q_4^2 H_1 \frac{\partial \log \Phi}{\partial Q}(Q, L_2)\\ &= (q_4 H_1)^2\frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + q_4^2 H_1 \frac{\partial \log \Phi}{\partial Q}\left\{D' + \frac{\partial H_1}{\partial q}\right\}Q.\end{aligned}$$

Der Quotient $\omega_2 : q_4^2$ muss, wenn wieder die q_1, C, Q eingeführt werden, von q_1 frei werden. Entwickelt man nach fallenden Potenzen von q_1, so wird, wie man erkennt, das von q_1 freie Glied auch frei von C und Q, d. h. der Quotient ist nur von q und den r_a abhängig. Andererseits ist ω_2 durch H_1 theilbar, wir dürfen also schreiben

$$\omega_2 = q_4^2 H_1 \sum_a \omega_{2a} r_a, \qquad \omega_{2a} = \mathfrak{G}(q),$$

$$\sum_a \omega_{2a} r_a = H_1\frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial \log Q}\left(D' + \frac{\partial H_1}{\partial q}\right).$$

Diese Gleichung zerfällt sofort in die drei andern

$$\omega_{21} = A_1 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial \log Q}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{dA_1}{dq}\right),$$

. . . .

aus denen wir

$$\omega_{22}A_3 - \omega_{23}A_2 = \frac{\partial \log \Phi}{\partial \log Q}\begin{vmatrix} \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1} + \frac{dA_2}{dq}, & A_2 \\ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{dA_3}{dq}, & A_3 \end{vmatrix}$$

. . . .

bilden. Hiernach besteht Φ aus einer Potenz von Q, multiplicirt mit einer Function von q allein. Setzen wir demgemäss

$$\Phi = WQ^{\rho}, \qquad W = \mathfrak{G}(q),$$

so wird

$$\omega_{21} = A_1 \frac{\partial \log W}{\partial q} + \rho\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{dA_1}{dq}\right).$$

. . . .

Denkt man sich W nach q in Linearfactoren zerlegt, so muss jeder derselben, da die A_α und $\omega_{2\alpha}$ die Form $\mathfrak{G}(q)$ besitzen, Theiler von A_1, A_2, A_3 sein. Da nun die A_α keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so reducirt sich W auf eine Constante und es wird

$$\Phi = Q^{\rho}.$$

Fassen wir die bisherige Untersuchung zusammen und beachten, dass Q irreductibel ist, so gelangen wir zu dem Resultat, dass die Bedingung

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log \varphi}{dq} = \omega, \qquad \omega = \mathfrak{G}(q, q_\alpha, p_\alpha),$$

nur die beiden irreductiblen Lösungen

$$\varphi = q_4 H_1, \qquad \varphi = Q$$

zulässt. Von diesen liefert nur Q eine wirkliche Integralgleichung, entsprechend der Relation

$$\frac{dQ}{dt} = Q\left(D' + \frac{\partial H_1}{\partial q}\right).$$

während $q_4 H_1$ nur als Integralgleichung erscheint, wenn q als unabhängige Variable gewählt wird, wie aus der Relation

$$\frac{d(q_4 H_1)}{dt} = H_1 \frac{\partial(q_4 H_1)}{\partial q} + \frac{1}{q_4}(q_4 H_1, q_4 H_2 + q_4 h)$$

hervorgeht, deren rechte Seite, wie man sich leicht überzeugt, nicht durch H_1 theilbar ist.

Die geometrische Bedeutung des Verschwindens von Q lässt sich leicht angeben. Aus der Form des Ausdruckes für q durch die auf die invariable Ebene bezogenen Coordinaten x, y folgt nämlich, dass q sich algebraisch durch die Seiten des Dreiecks ausdrücken lässt, welches die Projectionen der drei Körper auf die invariable Ebene mit einander bilden. Bewegen sich nun die drei Körper in einer Ebene, d. h. also in der invariablen Ebene des Systems, so fallen die drei Seiten des genannten Dreiecks mit den q_a zusammen, und man erhält durch Rationalmachen der so zwischen den q, q_a entstehenden Gleichung genau die Bedingung $Q = 0$. Dieselbe besagt also, dass die drei Körper sich in einer Ebene bewegen.

23. Am Schlusse der ersten Abtheilung war als nächster Schritt in dem hier bei der Untersuchung über die Integrale des Vielkörper-Problems befolgten Gedankengange die Beantwortung der Frage bezeichnet worden, ob Integrale existiren, welche durch Quadratur über algebraische Ausdrücke gebildet sind. Wir fragen also jetzt, indem wir wieder das System 7. Ordnung zu Grunde legen, ob ein Integral der Form

$$\varphi = \int \left[\mathfrak{J}(t)dt + \mathfrak{J}(q)dq + \sum_a \mathfrak{J}(q_a)dq_a + \sum_a \mathfrak{J}(p_a)dp_a \right]$$

existirt, in welchem der Ausdruck unter dem Integralzeichen ein totales Differential und die $\mathfrak{J}(t), \mathfrak{J}(q), \ldots$ algebraische Functionen der acht Variablen $t, q, \ldots$ sind. Ausdrücke dieser Art können wir füglich als Abel'sche Quadraturen und, wenn sie ein Integral unserer Differentialgleichungen liefern, als Abel'sche Integrale des vorgelegten Problems bezeichnen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Quadratur ein Integral liefert, ist mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\frac{1}{H_1} = \frac{\partial K}{\partial h}$$

durch das identische Verschwinden des Ausdruckes

$$\mathfrak{F}(q) + \mathfrak{F}(t)\frac{\partial K}{\partial h} + \sum_a \left(\mathfrak{F}(q_a)\frac{\partial K}{\partial p_a} - \mathfrak{F}(p_a)\frac{\partial K}{\partial q_a}\right)$$

gegeben.

Die $\mathfrak{F}(t), \ldots$ denken wir uns dargestellt als rationale Functionen der Variablen und einer einzigen, durch eine irreductible Gleichung definirten Irrationalität γ. Weiter denken wir uns in den $\mathfrak{F}(t), \ldots$ die Irrationalität aus den Nennern fortgeschafft und die Zähler nach γ auf den niedrigsten Grad gebracht. Dann beweist man durch die wiederholt angewandte Betrachtungsweise, dass in den $\mathfrak{F}(t), \ldots$ und in der Gleichung für γ die Constanten der Differentialgleichungen, nämlich m, a, b, h, k, sowie die etwa auftretenden constanten Parameter nur algebraisch auftreten, dass ferner φ als parameterfrei und infolge dessen auch als homogen in den Dimensionen vorausgesetzt werden darf. Dies festgestellt, gehen wir jetzt dazu über, das Verhalten von φ an den Stellen zu untersuchen, wo φ, als Function einer der Variablen betrachtet, einen Pol (Unendlichkeitspunkt) oder einen Verzweigungspunkt oder beides zugleich besitzt.

Es seien $\sigma, \sigma_1, \ldots$ die acht Variablen, in willkürlicher Reihenfolge geordnet. Man entwickle $\mathfrak{F}(\sigma)$ nach steigenden Potenzen von $\sigma - \tau$, wo τ einen constanten Werth oder auch eine algebraische Function der $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ bedeutet, dann enthält die Entwickelung, von besonderen Werthen der Grösse τ abgesehen, im Allgemeinen nur ganze positive Potenzen. Wir wollen jedoch die möglichen Grenzfälle sogleich mit berücksichtigen und denken uns die Reihe für $\mathfrak{F}(\sigma)$ als nicht nur ganze positive, sondern auch gebrochene und eine endliche Anzahl von negativen Potenzen enthaltend. Die Coefficienten sind algebraische Functionen der $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ und, so lange specielle Werthsysteme der $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ ausgeschlossen bleiben, so beschaffen, dass die Reihe, ohne Zerstörung der Convergenz, nach den $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ differentiirt werden kann. Die für $\mathfrak{F}(\sigma)$ gewonnene Reihe integriren wir gliederweise nach σ in der Art, dass man, abgesehen von dem etwa vorkommenden logarithmischen Gliede, wiederum eine nach $\sigma - \tau$ fortschreitende Reihe, jedoch ohne constantes Glied, erhält. Diese neue Reihe, einschliesslich des logarithmischen Gliedes, heisse $\varphi(\sigma)$,

dann darf sich $\varphi(\sigma)$ von φ nur um einen von σ unabhängigen Ausdruck unterscheiden. Bildet man

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_1}[\varphi - \varphi(\sigma)] = \vartheta(\sigma_1) - \frac{\partial\varphi(\sigma)}{\partial\sigma_1}$$

und denkt sich $\vartheta(\sigma_1)$ ebenfalls nach $\sigma - \tau$ entwickelt, so erkennt man, dass der Coefficient des logarithmischen Gliedes von σ_1 und ebenso von $\sigma_2, \ldots$ unabhängig, also constant sein muss, und dass die rechte Seite sich auf eine algebraische Function von $\sigma_1, \ldots$ reducirt. Schreiben wir also

$$\varphi = \varphi(\sigma) + \varphi'(\sigma),$$

so ist φ' durch eine ABEL'sche Quadratur gegeben.

Die vorstehend gewonnene Reihenentwickelung für φ werde jetzt folgendermassen gespalten. Man vereinige zunächst zu einem Ausdrucke $\varphi(\sigma)_0$ alle ganzen Potenzen nebst dem logarithmischen Gliede und dem Term φ'. Aus dem nur gebrochene Potenzen enthaltenden Reste greifen wir das niedrigste Glied heraus und vereinigen damit zu einem Ausdrucke $\varphi(\sigma)_1$ alle Glieder, deren Exponent sich von dem des niedrigsten Gliedes um ganze Zahlen unterscheidet. Aus dem dann noch verbleibenden Reste spalten wir in gleicher Weise ein $\varphi(\sigma)_2, \varphi(\sigma)_3, \ldots$ ab, bis alle Glieder erschöpft sind, was nach einer endlichen Zahl von Spaltungen der Fall ist. Wir haben dann

$$\varphi = \varphi(\sigma)_0 + \varphi(\sigma)_1 + \ldots.$$

Diesen Ausdruck differentiiren wir vollständig nach q, wobei wir uns den Ausdruck für K ebenfalls nach Potenzen von $\sigma - \tau$ entwickelt denken. Letztere Entwickelung enthält nur ganze Potenzen, und negative nur dann, wenn für $\sigma = \tau$ der Ausdruck $q_4 H_1$ verschwindet. Die vollständig entwickelte Ableitung erscheint zunächst ebenfalls als Potenzreihe und man erkennt sofort, dass die aus den Ausdruck $\varphi(\sigma)_0, \varphi(\sigma)_1, \ldots$ entspringenden Reihen einzeln für sich verschwinden müssen, dass also die $\varphi(\sigma)_0, \ldots$ einzeln für sich Integrale sind, und zwar ABEL'sche Integrale, da sie sich linear mit constanten Coefficienten aus den verschiedenen Zweigen zusammensetzen lassen, welche die Function φ an der Stelle $\sigma = \tau$ besitzt. Weiter erkennt man, wenn die verlangte Differentiation und Entwickelung an den Anfangsgliedern der einzelnen $\varphi(\sigma)$ ausgeführt wird, dass in $\vartheta(\sigma)$ negative oder gebrochene Potenzen höchstens dann auftreten können, wenn

entweder K negative Potenzen enthält, also für $\sigma = \tau$ der Ausdruck $q_4 H_1$ verschwindet, oder wenn die Entwickelung von

$$\frac{d}{dq}(\sigma - \tau)$$

kein von $\sigma - \tau$ freies Glied enthält, wenn also diese Ableitung für $\sigma = \tau$ verschwindet, d. h. $\sigma - \tau$ eine Integralgleichung ist. Hiernach erhalten wir also für den Ausdruck $\mathfrak{F}(\sigma)$, wenn derselbe als Function von σ betrachtet wird, alle im Endlichen liegenden Pole und Verzweigungspunkte durch die beiden Bedingungen

$$q_4 H_1 = 0, \qquad Q = 0.$$

Geht man, um das Verhalten von φ für sehr grosse Werthe von σ zu ermitteln, von der Entwickelung des Ausdruckes $\mathfrak{F}(\sigma)$ nach fallenden Potenzen von σ aus, so kann man genau so wie vorhin ein $\varphi(\sigma)$ bilden, dies durch Hinzufügen einer Abel'schen Quadratur $\varphi'(\sigma)$ zu φ ergänzen und dann in die Bestandtheile $\varphi(\sigma)_0, \varphi(\sigma)_1, \ldots$ spalten, welche einzeln wiederum Integrale sind. Differentiirt man dann vollständig nach q, so ergibt sich, dass positive oder gebrochene Potenzen oder ein logarithmisches Glied in φ sicher nicht auftreten, wenn die Ausdrücke

$$\frac{\partial K}{\partial h}, \qquad \frac{\partial K}{\partial q_\alpha}, \qquad \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}$$

nach σ entwickelt, die Form

$$\frac{P_0}{\sigma^2} + \frac{P_1}{\sigma^3} + \frac{P_2}{\sigma^4} + \cdots$$

besitzen. Diese besondere Form findet statt, wenn σ die Variable q vertritt.

24. Nachdem wir die vorstehenden Sätze gewonnen haben, nehmen wir die $\mathfrak{F}(\sigma)$ einzeln vor. Es wird sich dabei zeigen, dass dieselben sämmtlich rationale Functionen der Variablen sein müssen. Wir beginnen mit $\mathfrak{F}(t)$. Da die Variable t in den beiden Bedingungen

$$q_4 H_1 = 0, \qquad Q = 0$$

nicht auftritt, so folgt, dass $\mathfrak{F}(t)$ für endliche Werthe von t weder verzweigt ist noch unendlich wird, also die Form $\mathfrak{G}(t)$ besitzt. Hieraus folgt für φ die Form

$$\varphi = P_0 t^n + P_1 t^{n-1} + \ldots + P_n,$$

und ferner

$$\frac{dP_0}{dq} = 0, \qquad nP_0\frac{dt}{dq} + \frac{dP_1}{dq} = 0, \quad \text{etc.}$$

woraus wir ähnlich wie in § 20 schliessen, dass n gleich Null ist, d. h. φ die Variable t überhaupt nicht enthält. Wählen wir ferner für σ die Variable p_1, so folgt, da Q die p_α nicht enthält, dass $\mathfrak{F}(p_1)$ im Endlichen nur einen Verzweigungspunkt resp. Pol besitzen kann, nämlich

$$p_1 = p_{10} = -(A_2q_3q_1p_2 + A_3q_1q_2p_3) : A_1q_2q_3.$$

Hiernach ist $\mathfrak{F}(p_1)$ ein Aggregat aus einer endlichen Zahl von Potenzen der Differenz $p_1 - p_{10}$; die $\varphi(p_1)_1, \varphi(p_1)_2, \ldots$ würden dann, wenn sie vorkämen, auf algebraische Integrale führen, müssen also in Wirklichkeit fehlen, d. h. φ muss sich auf $\varphi(\sigma)_0$ reduciren. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{F}(p_1)$ eine rationale Function von p_1 ist, deren Nenner nur die Theiler $p_1 - p_{10}$ besitzt. Das Integral φ besitzt also die Form

$$\mathfrak{R}(p_1) + P\log(p_1 - p_{10}), \qquad P = \text{Constante}.$$

Hiermit ergibt sich, dass sämmtliche $\mathfrak{F}(\sigma)$ rationale Functionen von p_1 und ebenso von p_2 und p_3 sind, deren Nenner nur Theiler von der Form q_4H_1 besitzen. Für φ ergibt sich daraus die Form

$$\varphi = P\log(q_4H_1) + P_1 + P_2,$$

wo P eine Constante, P_1 eine von den p_α freie Abel'sche Quadratur und P_2 einen von den p_α rational, von den q, q_α algebraisch abhängenden Ausdruck bedeutet. Aus der vorstehenden Form ergibt sich, dass $\mathfrak{F}(q)$ als Function von q betrachtet, als Verzweigungspunkte, nur die beiden aus

$$Q = G(q - g_1)(q - g_2)$$

sich ergebenden Stellen g_1, g_2 besitzt, während die beiden aus

$$q_4H_1 = q_4M_2(q - g_3)(q - g_4)$$

folgenden Stellen g_3, g_4 nur als Pole auftreten können; die Stelle $q = \infty$ ist, wie oben bemerkt wurde, weder Verzweigungspunkt noch Pol. Setzt man

$$\frac{q - g_1}{q - g_2} = u, \qquad \mathfrak{F}(q)dq = \mathfrak{F}(u)du,$$

so sind die Verzweigungspunkte von $\mathfrak{F}(u)$ durch $u = 0$, $u = \infty$, und die ausserdem noch vorhandenen Pole u_3, u_4 durch

$$u_3 = \frac{g_3 - g_1}{g_3 - g_2}, \qquad u_4 = \frac{g_4 - g_1}{g_4 - g_2}$$

bestimmt. Multiplicirt man nun $\mathfrak{F}(u)$ mit solchen ganzen Potenzen von $u - u_3$ resp. $u - u_4$, dass das Product an den Stellen u_3, u_4 nicht mehr unendlich wird, so ist dieses Product als ein endliches Aggregat von Gliedern der Form cu^{ν} darstellbar, wo die ν rationale Zahlen bedeuten. Setzt man daher

$$u = v^{\lambda}, \qquad \mathfrak{F}(u)du = \mathfrak{F}(v)dv,$$

wo λ eine passend gewählte ganze Zahl ist, so besitzt $\mathfrak{F}(v)$ die Gestalt $\mathfrak{R}(v)$ und enthält im Nenner als Theiler nur v und die aus

$$v^{\lambda} - u_3, \qquad v^{\lambda} - u_4$$

entspringenden linearen Theiler, welche mit

$$v - u_{31}, \qquad v - u_{32}, \ldots, \qquad v - u_{41}, \qquad v - u_{42}, \ldots$$

bezeichnet werden sollen. Die Integration nach v liefert φ in der Form

$$\varphi = c \log v + \sum_s c_{3s} \log(v - u_{3s}) + \sum_s c_{4s} \log(v - u_{4s}) + U_1 + U_2.$$

Hierin sind die c Constanten, U_1 von der Form $\mathfrak{R}(v)$ und U_2 eine von v freie Abel'sche Quadratur. Vergleichen wir diese Form mit oben gegebenen, nämlich

$$\varphi = P \log(q_4 H_1) + P_1 + P_2,$$

so folgt, dass die mit den Coefficienten c_{3s}, c_{4s} versehenen Logarithmen nur aus der Zerlegung des Terms

$$P \log q_4 H_1 = P \log\{q_4 M_2(q - g_3)(q - g_4)\}$$

entspringen können, dass also die c_{3s}, c_{4s} sämmtlich einander gleich sind. Hieraus folgt, dass sich φ in der Form

$$\varphi = e_1 \log(q - g_1) + e_2 \log(q - g_2) + e_3 \log q_4 H_1 + U_1' + U_2'$$

schreiben lässt, wo für die e, U' dieselben Eigenschaften gelten, wie für die c, U. Stellt man nun, von der zuletzt gefundenen Form für φ ausgehend, die Entwickelung von φ nach Potenzen von $q - g_1$ oder $q - g_2$

auf, so erkennt man, dass die $\varphi(q)_1, \varphi(q)_2, \ldots$ nur aus gewissen in U_1' vorkommenden Bestandtheilen entspringen können, also, wenn sie vorkämen, rein algebraisch sein müssten. Hiernach reducirt sich φ in beiden Fällen auf den Bestandtheil $\varphi(q)_0$, d. h. $\mathfrak{J}(q)$ und damit sind die übrigen $\mathfrak{J}$ von der Form $\mathfrak{R}(q)$.

Der Ausdruck $\mathfrak{J}(q_1)$ ist in q und den p_α rational, kann also, als Function von q_1 betrachtet, im Endlichen nur Verzweigungspunkte besitzen, welche von den Variablen q, p_α unabhängig sind. Da solche nicht existiren, so ist $\mathfrak{J}(q_1)$ von der Form $\mathfrak{R}(q_1)$. Das Gleiche gilt für alle anderen $\mathfrak{J}$ und ebenso für die Variablen q_2, q_3. Hiermit haben wir, wenn wir zusammenfassen, das Resultat gewonnen, dass in dem gesuchten Abel'schen Integral, falls dasselbe existirt, die $\mathfrak{J}(q), \ldots$ sämmtlich die Gestalt $\mathfrak{R}(q, q_\alpha, p_\alpha)$ besitzen, dass ferner die Nenner als Theiler nur die Ausdrücke $q_4 H_1$ und Q besitzen, dass also φ in der Form

$$\varphi = \mathfrak{R}(q, q_\alpha, p_\alpha) + c' \log q_4 H_1 + c'' \log Q$$

darstellbar ist. Da die Entwickelung von φ nach fallenden Potenzen von q kein logarithmisches Glied besitzt, so ist

$$c' + c'' = 0,$$

so dass wir auch schreiben können

$$\varphi = \frac{\mathfrak{G}(q, q_\alpha, p_\alpha)}{(q_4 H_1)^\lambda Q^\mu} + c \log \frac{q_4 H_1}{Q}.$$

25. Die Untersuchung hat uns jetzt zu der Frage geführt, ob das System 7. Ordnung ein Integral von der Form

$$\varphi = \mathfrak{R}(q, q_\alpha, p_\alpha) + c \log \frac{q_4 H_1}{Q}$$

besitzt, in welchem, wenn φ sich nicht auf eine Constante reduciren soll, der Factor c von Null verschieden sein muss, also gleich Eins gesetzt werden darf. Bezeichnen wir die beiden Bestandtheile von φ der Kürze halber mit φ_1 und φ_2, so darf der rationale Term φ_1 als algebraisch aus den Constanten m, a, b, k, h gebildet vorausgesetzt werden. Bringt man nämlich φ_1 zunächst auf die Form $\mathfrak{R}(m, a, b, k, h, I')$, wo I' eine von den $m, \ldots$ abhängende Irrationalität bedeutet, und stellt dann φ_1 in der Form

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \varphi_{11} I' + \varphi_{12} I'^2 + \cdots$$

unter möglichster Herabdrückung des Grades in Bezug auf I' dar, so müssen die $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots$ sich auf Constanten reduciren. Man darf deshalb die mit I' multiplicirten Terme unterdrücken oder φ_1 als rational aus den m, a, b, k, h gebildet voraussetzen. Dies festgestellt führen wir an Stelle von h die Variable p durch die Gleichung

$$o = h + pH_1 + H_2$$

ein, und erhalten dann φ_1 in der Form

$$\mathfrak{R}(p, q, p_a, q_a),$$

während φ in ein Integral des Systems 8. Ordnung übergeht.

In dem System 8. Ordnung lässt sich nun die allgemeine Lösung durch Reihen, welche nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreiten, darstellen, indem man die p, q nach dem TAYLOR'schen Satze mit Hülfe der Differentialgleichungen entwickelt. Diese Reihen convergiren innerhalb eines bestimmten Bereiches für t, sobald man festsetzt, dass für $t = o$ die Variablen endliche, und im Besondern die q_a von Null verschiedene Werthe besitzen. Substituirt man diese Reihenentwickelungen in den Zähler Z und den Nenner N von φ_1 und ebenso in $q_4 H_1$ und Q, so erhält man ähnliche Potenzreihen. Die Coefficienten sind sämmtlich nach den p, q, p_a ganz rational, nach den q_a dagegen rational, jedoch so, dass in den Nennern als Theiler nur die q_a auftreten. Der so entstehende Ausdruck

$$\frac{Z}{N} + \log \frac{q_4 H_1}{Q}$$

muss nun von t unabhängig sein, wie man auch innerhalb der angegebenen Einschränkungen die Anfangswerthe der Variablen variiren mag. Lassen wir nun diese Anfangswerthe so variiren, dass $q_4 H_1$ für $t = o$ den Werth Null annimmt, so können in den vier Reihenentwickelungen nicht sämmtliche Coefficienten verschwinden, da $q_4 H_1$, wie wir wissen, nicht Integralgleichung des Systems 8. Ordnung ist. Setzt man ausserdem fest, dass für die gewählten Anfangswerthe Q nicht verschwindet, so entspringt, wenn man φ_1 und φ_2 nach Potenzen von t entwickelt, aus φ_2 ein Glied von der Form

$$n \log t, \quad (n > o),$$

welches sich nicht fortheben kann. Die Annahme, dass ein Integral der hier betrachteten Form existire, führt also auf einen Widerspruch oder m. a. W. es existiren zu dem System 7. Ordnung keine Abel'schen Integrale, und ebenso auch nicht zu dem System 8. Ordnung.

Bei den vorstehenden Entwickelungen waren wir von einer besonderen Form der Bewegungsgleichungen für das Dreikörper-Problem ausgegangen, nämlich dem hier benutzten System 7. Ordnung. Da jedoch ein Abel'sches Integral durch eine algebraische Transformation der Variablen wiederum in ein Abel'sches Integral übergeht, so gilt das gefundene negative Resultat für alle Formen der Bewegungsgleichungen, welche aus den ursprünglichen durch rein algebraische Umformungen entstehen. Das gefundene Resultat gilt ferner auch für das Vielkörper-Problem. Reducirt man nämlich beim Vielkörper-Problem die Ordnung des Systems ähnlich wie bei dem Dreikörper-Problem durch Benutzung der bekannten Integrale, so erhält man algebraische Differentialgleichungen. Existirt zu diesen ein Abel'sches Integral, so enthält der Ausdruck, über welchen die Quadratur auszuführen ist, die Massen nur in algebraischer Weise; man müsste also unter allen Umständen durch das Verschwindenlassen einer oder mehrerer Massen zu einem Abel'schen Integral für das Dreikörper-Problem gelangen, was nicht sein darf.

Die vorstehend hergeleiteten negativen Ergebnisse enthalten, wie mir scheint, eine hinreichende Erklärung für die Thatsache, dass man bei der Aufsuchung neuer Integrale des Dreikörper-Problems seither nicht über den bereits vor einem Jahrhundert erreichten Standpunkt hinausgelangt ist.

Berichtigung.

Seite 64, Zeile 2 v. u. ist »sich« zu streichen.

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS.

Published under the Auspices of the Johns Hopkins University.

The American Journal of Mathematics, founded under the auspices of the Johns Hopkins University, in 1878, was conducted by Professor Sylvester during the period of his connection with the University. It will be hereafter under the direction of SIMON NEWCOMB (Foreign Member of the Royal Society, and Corresponding Member of the Institute of France), Professor of Astronomy and Mathematics in the Johns Hopkins University and Director of the U. S. Nautical Almanac, as *Editor*, and of THOMAS CRAIG, Ph. D., Associate Professor of Applied Mathematics, as *Associate Editor*.

Nine volumes of about 400 pages each have been issued, and the tenth is now in progress. The journal appears quarterly in the quarto form.

The subscription price is dollars 5 a volume; single numbers dollars 1.50.

Communications in regard to subscriptions should be addressed to

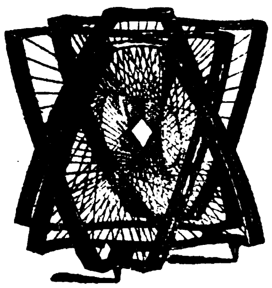
PUBLICATION AGENCY of the Johns Hopkins University, BALTIMORE, Md., U. S. A.

Or to Messrs *MAYER & MÜLLER, BERLIN, PRUSSIA.*

Verlag von Modellen für den höheren math. Unterricht.

Bei **L. Brill** in **Darmstadt** sind erschienen:

Math. Modelle



Ser. XIII. Nr. 2.

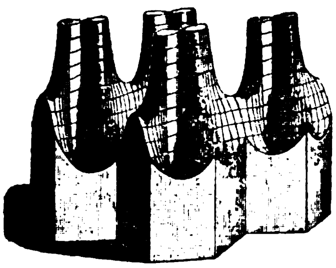
13. Serie.

10 Faden-Modelle
der Regelflächen vierter Ordnung,

dargest. durch Seidenfäd. in Messinggestellen von Prof. Dr. **Rohn** in **Dresden.**

Regelfl. mit einem Paar reeller Dp.-Geraden (Nr. 1.—8.), mit 2 conj. imag. Dp.-Ger. (4.), einer Selbstberührungs-Ger. (5.), mit einer dreif. Ger. (6. 7.), Dp.-Kegelschn. u. Dp.-Ger. (8.), Dp.-Curve 3. Ord. (9. 10.) — Dazu eine Abhandl.

Preis der Mod. 1. 4. 5. je 36 Mark, 3. 6. 7. 9. 10. je 40 Mark, 2. 8. je 44 Mark, der ganzen Serie 380 Mark.



Ser. XIV. Nr. IXa.

14. Serie.

16 Gips-Modelle
zur Funktionentheorie,

nach den im math. Inst. der techn. Hochsch. München unter Leitung von Prof. Dr. **Dyck** angefert. Originalen.

Der reelle und imaginäre Theil der Werthe einer Funktion über der Ebene des complexen Arguments als Ordinaten aufgetragen, liefert je eine Fläche. — Dieselben sind beide für folgende Funktionen construirt und die Niveau- und Fall-Linien eingetragen:

$w^2 = z^2 - 1$; $w^2 = z^4 - 1$; $w^4 = 1 - z^2$; (Verzweig.-Pkte.); $w = \frac{1}{z}$; $w = \frac{1}{2\varepsilon} \log \frac{z-\varepsilon}{z+\varepsilon}$ (Unendl.-Pkte); $6\, w = e^{\frac{1}{0z}}$ (wesentl. singul. Pkt.). Ferner für die ellipt. Funktionen: $w = \wp(u)$; $w = \wp'(u)$ für 1) $g_2 = 4$, $g_3 = 0$; 2) $g_2 = 0$, $g_3 = 4$. Nebst erläuterndem Text u. Abbildungen.

Preis der Serie 330 Mark, Einzelpreise s. Prospect.

15. Serie.

I. Projektions-Modelle der 4 ersten regelm. vier-dimens. Körper

in Draht und Seidenfäden dargestellt von Dr. **V. Schlegel** in **Hagen** i.W.

Das 5-, 8-, 16-, 25-Zell, aus dem vier-dimens. Raum in den drei-dimens. projicirt, so dass eine der Zellen in ein regelm. Polyeder übergeht, das die übr. umschliesst. Nebst einer Abhandlung.

Preis der vier Modelle 26 Mark (Nr. 1 Mk. 1.20., Nr. 2 Mk. 4.50., Nr. 3 Mk. 4., Nr. 4 Mk. 18.).

II. Fläche, auf welche das Ellipsoid durch parallele Normalen conform abgebildet wird, mit Krümmungslinien.

In Gips mod. von Dr. **Reinbeck** in **Einbeck.**

Preis 12 Mark.

Sämmtl. Prospecte auf Verl. gratis u. franco.

Von den insgesammt 208 Nummern des Modell-Verlags sind 149 Modelle aus Gips hergestellt, 19 in Seidenfäden, 40 aus Draht etc. und berühren fast alle Gebiete math. Wissens: synthet. u. analyt. Geometrie, Krümmungstheorie, math. Physik, Funkt.-Theorie etc.

Ausgegeben den 30. December 1887. — Paru le 30 décembre 1887.

Inhalt. Table des matières.

Seite. Page.

Preis des Bandes: 15 Mark. — Prix par volume: 18,75 Fr.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

11:2

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1888.
CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

ZUR THEORIE DER

MEHRWERTHIGEN, MEHRFACH LINEÄR VERKNÜPFTEN FUNCTIONEN

VON

KARL HEUN
in MÜNCHEN.

Durch die tiefsinnigen Forschungen des Herrn POINCARÉ ist die Theorie der linearen Differentialgleichungen auf ebenso sichere Grundlagen gestützt worden, wie die Theorie der elliptischen Functionen durch die Arbeiten von ABEL und JACOBI. Wie die Thetafunctionen das Umkehrungsproblem für die elliptischen Integrale lösen, so erlauben die Functionen des Herrn POINCARÉ (Acta Mathematica, Bd. 1, p. 193) das analoge Problem im Gebiete der linearen Differentialgleichungen zu behandeln. Wir beschäftigen uns jedoch im Folgenden nicht mit den eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich, sondern mit den mehrdeutigen Functionen, deren Periodicität durch lineare homogene Substitutionen bestimmt ist. Die nachstehende Untersuchung schliesst sich insbesondere an die vierte Abhandlung POINCARÉS (d. Zeitschr., Bd. 4, p. 201) an. Andererseits steht sie in enger Beziehung zu einer bekannten posthumen Abhandlung RIEMANNS (Werke, p. 357) namentlich in Betreff der methodischen Gesichtspunkte. Die Resultate, zu welchen wir gelangt sind, werden insbesondere dazu dienen können die Theorie der POINCARÉ'schen sogen. Zetafunctionen einst weiter auszubilden. (Man vergl. d. Zeitschr., Bd. 5, p. 212.)

1. Wir betrachten im Folgenden eine mehrdeutige Function einer unabhängigen Veränderlichen x, welche auf einer unendlich-blättrigen RIEMANN'schen Kugelfläche mit i endlichen Verzweigungspunkten $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i$ und dem Unendlichkeitspunkte ξ_{i+1} eine eindeutige Function des Ortes

ist, derart, dass zwischen je $p + 1$ Zweigen eine lineäre homogene Relation mit bestimmten constanten Coefficienten besteht. Eine solche Function soll, insoweit sie durch diese Festsetzungen determinirt ist, eine *p-fach lineär verknüpfte* heissen. Ist nun $\mathfrak{B}_\mathfrak{i}$ $(\mathfrak{i} = 1, 2, \ldots, \iota + 1)$ die homogene lineäre Substitution, welche das Verhalten der zum Punkte ξ_ι gehörigen, willkürlich angenommenen, Zweiggruppe $(y_{1\iota}, y_{2\iota}, \ldots, y_{p\iota})$ bei einmaliger positiver Umkreisung des Punktes $\xi_\mathfrak{i}$ ausdrückt, dann ist bekanntlich

$$\mathfrak{B}_{\iota+1} \,.\, \mathfrak{B}_\iota \ldots \mathfrak{B}_2 \,.\, \mathfrak{B}_1 = 1. \tag{1}$$

Setzt man ferner in üblicher Weise

$$\mathfrak{B}_\mathfrak{i} = B_\mathfrak{i} \,.\, \begin{vmatrix} w_\mathfrak{i}^{(1)}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & w_\mathfrak{i}^{(2)}, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & w_\mathfrak{i}^{(p)} \end{vmatrix} \,.\, B_\mathfrak{i}^{-1} \quad {\scriptstyle (\mathfrak{i}=1,2,\ldots,\iota-1,\iota+1,\ldots,\iota+1)}$$

und

$$B_\iota = B_\iota^{-1} = 1$$

dann ist das Verhalten eines bestimmten Zweiges $y_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}$ $\binom{\mathfrak{p}=1,2,\ldots,p}{\mathfrak{i}=1,2,\ldots,\iota+1}$ bestimmt durch die Gleichung:

$$y_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} = (x - \xi_\mathfrak{i})^{\frac{\log w_\mathfrak{i}^{(\mathfrak{p})}}{2\pi\sqrt{-1}}} \,.\, \Phi_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}(x - \xi_\mathfrak{i})$$

$$(x - \xi_{\iota+1}) = \frac{1}{x},$$

wo $\Phi_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}(x - \xi_\mathfrak{i})$ eine im Punkte $\xi_\mathfrak{i}$ eindeutige, stetige und nicht verschwindende Function bedeutet. Die Wurzeln $w_\mathfrak{i}^{(\mathfrak{p})}$ $(\mathfrak{p} = 1, 2, \ldots, p)$ der zum Punkte $\xi_\mathfrak{i}$ gehörigen determinirenden Gleichung wollen wir als von einander verschieden betrachten.

Nun ist aber, wenn wir den üblichen Initialzweig von $\log x$ mit $\operatorname{Log} x$ bezeichnen

$$\log w_\mathfrak{i}^{(\mathfrak{p})} = \operatorname{Log} w_\mathfrak{i}^{(\mathfrak{p})} + 2m\pi\sqrt{-1}$$

folglich

$$\frac{\log w_\mathfrak{i}^{(\mathfrak{p})}}{2\pi\sqrt{-1}} = \lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} + m$$

wenn $\lambda_{\mathfrak{p}\iota}$ durch die Gleichung:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{Log} w_\iota^{(\mathfrak{p})} = 2\pi\sqrt{-1}\,.\,\lambda_{\mathfrak{p}\iota}$$

definirt ist.

Wir bezeichnen nun alle Functionen (y), deren Periodicität in Bezug auf dieselben Verzweigungspunkte durch *dieselben* erzeugenden Substitutionen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\iota$ definirt ist als zurselben *Art* (= »espèce« in der Terminologie des Herrn POINCARÉ) gehörige.

Für zwei Systeme (y), welche von derselben Art sind, unterscheiden sich demnach die correspondirenden Verzweigungsindices (λ) um ganze Zahlen (m).

Zwischen je $p+1$ Functionen derselben Art: $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ besteht eine fundamentale Relation, deren Form sich durch Betrachtung der folgenden identisch verschwindenden Determinante ergiebt

$$\begin{vmatrix} y_{\mathfrak{p}\iota}^{(0)}, & y_{\mathfrak{p}\iota}^{(1)}, & \ldots, & y_{\mathfrak{p}\iota}^{(\tilde\omega)}, & \ldots, & y_{\mathfrak{p}\iota}^{(p)} \\ y_{1\iota}^{(0)}, & y_{1\iota}^{(1)}, & \ldots, & y_{1\iota}^{(\tilde\omega)}, & \ldots, & y_{1\iota}^{(p)} \\ y_{2\iota}^{(0)}, & y_{2\iota}^{(1)}, & \ldots, & y_{2\iota}^{(\tilde\omega)}, & \ldots, & y_{2\iota}^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{p\iota}^{(0)}, & y_{p\iota}^{(1)}, & \ldots, & y_{p\iota}^{(\tilde\omega)}, & \ldots, & y_{p\iota}^{(p)} \end{vmatrix}.$$

Nimmt man die Unterdeterminanten in Bezug auf die erste Horizontalreihe, dann erhält man eine homogene lineäre Gleichung von der Form:

$$\text{(3)} \qquad \Delta_\iota^{[0]}\,.\,y_{\mathfrak{p}\iota}^{(0)} + \Delta_\iota^{[1]}\,.\,y_{\mathfrak{p}\iota}^{(1)} + \ldots + \Delta_\iota^{[p]}\,.\,y_{\mathfrak{p}\iota}^{(p)} = 0. \qquad \left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{p}=1,2,\ldots,p \\ \iota=1,2,\ldots,\iota,\iota+1\end{smallmatrix}\right)$$

Die Entwicklung von $\Delta_\iota^{[\tilde\omega]}$ besteht aus einem Aggregat von Produkten von je p Factoren, von denen jeder in dem Bereich des Punktes ξ_ι die Form hat

$$y_{\mathfrak{p}\iota}^{(\mathfrak{p})} = (x-\xi_\iota)^{\lambda_{\mathfrak{p}\iota}^{(\mathfrak{p})}}\,.\,\Phi_{\mathfrak{p}\iota}(x-\xi_\iota). \qquad (\mathfrak{p}=0,1,2,\ldots,\tilde\omega-1,\tilde\omega+1,\ldots,p)$$

Der erste Term in der expliciten Gestalt der Determinante $\Delta_\iota^{[\tilde\omega]}$ heisst also:

$$(x-\xi_\iota)^{\lambda_{1\iota}^{(0)} + \lambda_{2\iota}^{(1)} + \cdots + \lambda_{\tilde\omega,\iota}^{(\tilde\omega-1)} + \lambda_{\tilde\omega+1,\iota}^{(\tilde\omega+1)} + \cdots + \lambda_{p\iota}^{(p)}}\,.\,\Phi_1(x-\xi_\iota).$$

Die nächstfolgenden Terme ergeben sich aus diesem ersten, indem der

Exponent von $(x-\xi_\iota)$ durch die Summe aller übrigen möglichen Permutationen zu je p der p^2 Indices $\lambda_{\mathfrak{p}\iota}^{(\mathfrak{p})}$ ersetzt und jede der so entstandenen Potenzen mit einer Φ-Function multiplicirt wird. Diese Exponentensummen können sowohl positive als negative Werthe haben. Diejenige Summe, welche von allen übrigen um eine positive ganze Zahl übertroffen wird, soll durch $E_\iota^{[\bar{\omega}]}$ bezeichnet werden. Es ist also

$$\Delta_\iota^{[\bar{\omega}]} = (x-\xi_\iota)^{E_\iota^{[\bar{\omega}]}} \cdot \Phi_\iota^{[\bar{\omega}]}(x-\xi_\iota).$$

Da nun

$$\Delta_\iota^{[\bar{\omega}]} = \text{Det. } B_{\mathfrak{i}} \cdot \Delta_{\mathfrak{i}}^{[\bar{\omega}]}$$

so ist auch

$$\Delta_\iota^{[\bar{\omega}]} = (x-\xi_{\mathfrak{i}})^{E_{\mathfrak{i}}^{[\bar{\omega}]}} \cdot \Phi_{\mathfrak{i}}^{[\bar{\omega}]}(x-\xi_{\mathfrak{i}}).$$

Folglich ist

$$\Delta_\iota^{[\bar{\omega}]} \cdot (x-\xi_1)^{-E_1^{[\bar{\omega}]}} \cdot (x-\xi_2)^{-E_2^{[\bar{\omega}]}} \ldots (x-\xi_\iota)^{-E_\iota^{[\bar{\omega}]}}$$

eine ganze rationale Function von x vom Grade

$$-[E_1^{[\bar{\omega}]} + E_2^{[\bar{\omega}]} + \ldots + E_{\iota+1}^{[\bar{\omega}]}],$$

welche wir mit $F_{\bar{\omega}}$ bezeichnen wollen. Es ist

$$[E_1^{[\bar{\omega}]} + E_2^{[\bar{\omega}]} + \ldots + E_{\iota+1}^{[\bar{\omega}]}] = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\sum_{(\mathfrak{i})}^{\iota+1} \lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}^{(\mathfrak{p})} + \Sigma D_{\mathfrak{p}}^{[\bar{\omega}]}$$

wo unter $\Sigma D_{\mathfrak{p}}^{[\bar{\omega}]}$ die Summe aller auf das System $(y^{(\mathfrak{p})})$ bezogenen Indicesdifferenzen zu verstehen ist. Die rechte Seite dieser Gleichung darf also nicht > 0 werden. Die Gleichung (3) nimmt nach dem Vorstehenden die Form an:

$$\begin{aligned} & y_{\mathfrak{p}\iota}^{(0)} \cdot (x-\xi_1)^{E_1^{[0]}} \cdot (x-\xi_2)^{E_2^{[0]}} \ldots (x-\xi_\iota)^{E_\iota^{[0]}} \cdot F_0 \\ & + y_{\mathfrak{p}\iota}^{(1)} \cdot (x-\xi_1)^{E_1^{[1]}} \cdot (x-\xi_2)^{E_2^{[1]}} \ldots (x-\xi_\iota)^{E_\iota^{[1]}} \cdot F_1 + \ldots \\ & \ldots + y_{\mathfrak{p}\iota}^{(p)} \cdot (x-\xi_1)^{E_1^{[p]}} \cdot (x-\xi_2)^{E_2^{[p]}} \ldots (x-\xi_\iota)^{E_\iota^{[p]}} \cdot F_p = 0. \end{aligned}$$

Da die Differenzen der Grössen $E_i^{[0]}, E_i^{[1]}, \ldots, E_i^{[p]}$ ganze Zahlen sind, so lässt sich die Gleichung auf die Form bringen:

$$(4) \qquad H_0(x) \,.\, y_{\nu i}^{(0)} + H_1(x) \,.\, y_{\nu i}^{(1)} + \ldots + H_p(x) \,.\, y_{\nu i}^{(p)} = 0.$$

Die Grössen $H_0(x), H_1(x), \ldots, H_p(x)$ sind ganze rationale Functionen von bekannten Graden. Die Gleichung (4) enthält den RIEMANN'schen Satz:

»Zwischen je $p+1$ Elementen eines Systems p-fach linear verknüpfter Functionen derselben Art besteht eine lineare homogene Relation, deren Coefficienten ganze rationale Coefficienten der unabhängigen Veränderlichen sind.»

Wir haben diesen bekannten Satz hier reproducirt, weil uns die angewendete Bezeichnung eine kürzere Darstellung der folgenden Untersuchungen erlaubt.

2. Da alle Derivirten einer p-fach linear verknüpften Function dieselbe Periodicität besitzen, wie die primitive Function, so sind sie auch alle mit der letzteren von derselben Art. Bei jeder Differentiation erniedern sich die Verzweigungsindices um eine Einheit. In der Gleichung (4) sind demnach eine gewisse Anzahl von Differentialgleichungen mehrerer abhängiger Veränderlichen enthalten.

Wir wollen nur den Fall untersuchen, in welchem die $p+1$ Functionen derselben Art, zwischen denen eine Gleichung (4) bestehen muss, die folgenden seien:

$$y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-\pi}y}{dx^{p-\pi}},$$

$$z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^{\pi-1}z}{dx^{\pi-1}}.$$

Alsdann heisst die RIEMANN'sche Fundamentalgleichung:

$$0 = F_0 \,.\, y + F_1 \,.\, \frac{dy}{dx} + \ldots + F_{p-\pi} \,.\, \frac{d^{p-\pi}y}{dx^{p-\pi}}$$

$$+ G_0 \,.\, z + G_1 \,.\, \frac{dz}{dx} + \ldots + G_{\pi-1} \,.\, \frac{d^{\pi-1}z}{dx^{\pi-1}}.$$

Die Grössen $E_i^{[\tilde{\omega}]}$ der vorigen Nummer wollen wir jetzt in zwei Gruppen $E_i^{[\tilde{\omega}_1]}$ und $E_i^{[\tilde{\omega}_2]}$ theilen, welche beziehungsweise den Functionen

F und G entsprechen sollen. Die Grössen $E_i^{[\tilde\omega_1]}$ und $E_i^{[\tilde\omega_2]}$ ergeben sich aus der Betrachtung der Determinante:

$$
0=\begin{vmatrix}
y_{\mathfrak{p}i}, & \frac{dy_{\mathfrak{p}i}}{dx}, & \dots, & \frac{d^{\tilde\omega_1}y_{\mathfrak{p}i}}{dx^{\tilde\omega_1}}, & \dots, & \frac{d^{p-\pi}y_{\mathfrak{p}i}}{dx^{p-\pi}}, & z_{\mathfrak{p}i}, & \frac{dz_{\mathfrak{p}i}}{dx}, & \dots, & \frac{d^{\tilde\omega_2}z_{\mathfrak{p}i}}{dx^{\tilde\omega_2}}, & \dots, & \frac{d^{\pi-1}z_{\mathfrak{p}i}}{dx^{\pi-1}} \\
y_{1i}, & \frac{dy_{1i}}{dx}, & \dots, & \frac{d^{\tilde\omega_1}y_{1i}}{dx^{\tilde\omega_1}}, & \dots, & \frac{d^{p-\pi}y_{1i}}{dx^{p-\pi}}, & z_{1i}, & \frac{dz_{1i}}{dx}, & \dots, & \frac{d^{\tilde\omega_2}z_{1i}}{dx^{\tilde\omega_2}}, & \dots, & \frac{d^{\pi-1}z_{1i}}{dx^{\pi-1}} \\
y_{2i}, & \frac{dy_{2i}}{dx}, & \dots, & \frac{d^{\tilde\omega_1}y_{2i}}{dx^{\tilde\omega_1}}, & \dots, & \frac{d^{p-\pi}y_{2i}}{dx^{p-\pi}}, & z_{2i}, & \frac{dz_{2i}}{dx}, & \dots, & \frac{d^{\tilde\omega_2}z_{2i}}{dx^{\tilde\omega_2}}, & \dots, & \frac{d^{\pi-1}z_{2i}}{dx^{\pi-1}} \\
y_{pi}, & \frac{dy_{pi}}{dx}, & \dots, & \frac{d^{\tilde\omega_1}y_{pi}}{dx^{\tilde\omega_1}}, & \dots, & \frac{d^{p-\pi}y_{pi}}{dx^{p-\pi}}, & z_{pi}, & \frac{dz_{pi}}{dx}, & \dots, & \frac{d^{\tilde\omega_2}z_{pi}}{dx^{\tilde\omega_2}}, & \dots, & \frac{d^{\pi-1}z_{pi}}{dx^{\pi-1}}
\end{vmatrix}.
$$

Bedenkt man nun dass

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{\tilde\omega_1}y_{\mathfrak{p}i}}{dx^{\tilde\omega_1}} &= (x-\xi_i)^{\lambda_{\mathfrak{p}i}-\tilde\omega_1}\,.\,\Phi^{(\tilde\omega_1)}(x-\xi_i), \\
\frac{d^{\tilde\omega_2}z_{\mathfrak{p}i}}{dx^{\tilde\omega_2}} &= (x-\xi_i)^{\lambda_{\mathfrak{p}i}+\delta_{\mathfrak{p}i}-\tilde\omega_2}\,.\,\Phi^{(\tilde\omega_2)}(x-\xi_i)
\end{aligned}
\qquad (i=1,2,\dots,\iota)
$$

dann findet man zunächst

$$
E_i^{[\tilde\omega_1]} = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\lambda_{\mathfrak{p}i} - \{0+1+2+\dots+(\tilde\omega_1-1)+(\tilde\omega_1+1)+\dots+(p-\pi)\}
$$
$$
+\mathfrak{D}_i - \frac{1}{2}\pi(\pi-1) \qquad (i=1,2,\dots,\iota)
$$

während

$$
E_{\iota+1}^{[\tilde\omega_1]} = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\lambda_{\mathfrak{p},\iota+1} + \{0+1+2+\dots+(\tilde\omega_1-1)+(\tilde\omega_1+1)+\dots+(p-\pi)\}
$$
$$
+\mathfrak{D}_{\iota+1} + \frac{1}{2}\pi(\pi-1)
$$

da $x-\xi_{\iota+1}=\frac{1}{x}$ zu nehmen ist.

Die Grössen $\mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}$ bestimmen sich folgendermassen. Man nimmt aus dem Schema:

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 0. & 1. & \dots & \tilde{\omega}_2. & \dots & \pi - 1. \\
\hline
1. & \partial_{1\mathfrak{i}} & \partial_{1\mathfrak{i}} & \dots & \partial_{1\mathfrak{i}} & \dots & \partial_{1\mathfrak{i}} \\
2. & \partial_{2\mathfrak{i}} & \partial_{2\mathfrak{i}} & \dots & \partial_{2\mathfrak{i}} & \dots & \partial_{2\mathfrak{i}} \\
. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
p. & \partial_{p\mathfrak{i}} & \partial_{p\mathfrak{i}} & \dots & \partial_{p\mathfrak{i}} & \dots & \partial_{p\mathfrak{i}}
\end{array}
$$

je π Elemente aus verschiedenen Vertikal- und Horizontalreihen, was auf $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots p$ Arten möglich ist und addirt dieselben. Aus der Reihe der so entstehenden Summen:

$$S_{\mathfrak{i}}^{(1)}\,,\ S_{\mathfrak{i}}^{(2)}\,,\ \dots,\ S_{\mathfrak{i}}^{(1.2\dots p)}$$

ist $\mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}$ diejenige, welche von allen übrigen um positive Grössen übertroffen wird. Ferner findet man für $\mathfrak{i} = 1, 2, \dots, i$ den Ausdruck:

$$E_{\mathfrak{i}}^{[\tilde{\omega}_2]} = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p} \lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} - \frac{1}{2}(p - \pi)(p - \pi + 1)$$

$$+ \mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}^{[\tilde{\omega}_2]} - \{0 + 1 + 2 + \dots + (\tilde{\omega}_2 - 1) + (\tilde{\omega}_2 + 1) + \dots + (\pi - 1)\}$$

und

$$E_{i+1}^{[\tilde{\omega}_2]} = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p} \lambda_{\mathfrak{p},\,i+1} + \frac{1}{2}(p - \pi)(p - \pi + 1)$$

$$+ \mathfrak{D}_{i+1}^{[\tilde{\omega}_2]} + \{0 + 1 + 2 + \dots + (\tilde{\omega}_2 - 1) + (\tilde{\omega}_2 + 1) + \dots + (\pi - 1)\}.$$

Um die Grössen $\mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}^{[\tilde{\omega}_2]}$ zu bestimmen lasse man in dem obigen $p \,.\, \pi$-gliedrigen Schema die mit $\tilde{\omega}_2$ bezeichnete Verticalreihe aus und bilde die Summen aus je $\pi - 1$ Elementen $(\partial_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}})$, welche verschiedenen Vertikal- und Horizontalreihen angehören. Alsdann ist diejenige Summe, welche von den übrigen (für ein festes $\mathfrak{i}$) um positive Grössen übertroffen wird, die mit $\mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}^{[\tilde{\omega}_2]}$ bezeichnete Grösse.

Unsere Differentialgleichung nimmt jetzt die Form an:

$$
\text{(I)}\quad
\left|\begin{aligned}
&(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i}\Big\{F_0[h-D-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)].\mathfrak{z}\\
&\qquad+\psi(x).F_1[h-D-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)-(i-1)]\frac{dy}{dx}\\
&\qquad+[\psi(x)]^2.F_2[h-D-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)-2(i-1)]\frac{d^2y}{dx^2}\\
&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad+[\psi(x)]^{p-\pi}.F_{p-\pi}[h-D-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)-(p-\pi)(i-1)]\frac{d^{p-\pi}y}{dx^{p-\pi}}\Big\}\\
&+(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1^{[0]}}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2^{[0]}}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i^{[0]}}.G_0[h-D^{[0]}-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)]z\\
&+(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1^{[1]}}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2^{[1]}}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i^{[1]}}.G_1[h-D^{[1]}-\{(p-\pi)(\pi-1)+1\}(i-1)]\frac{dz}{dx}\\
&+(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1^{[2]}}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2^{[2]}}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i^{[2]}}.G_2[h-D^{[2]}-\{(p-\pi)(\pi-1)+2\}(i-1)]\frac{d^2z}{dx^2}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1^{[\pi-1]}}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2^{[\pi-1]}}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i^{[\pi-1]}}.G_{\pi-1}[h-D^{[\pi-1]}-\{(p-\pi)(\pi-1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+(\pi-1)\}(i-1)]\frac{d^{\pi-1}z}{dx^{\pi-1}}=0,
\end{aligned}\right.
$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$
(5)\quad
\left|\begin{aligned}
&\psi(x)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_i)\\
&h=\frac{1}{2}p(p-1)(i-1)-\sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}\\
&D^{[\omega_2]}=\sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}^{[\omega_2]};\qquad D=\sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}.
\end{aligned}\right.
$$

Die Grade der ganzen rationalen Functionen $F_0, F_1, \ldots, F_{p-\pi}$; $G_0, G_1, \ldots, G_{\pi-1}$ sind in den beigefügten Klammern angegeben. Die Grössen

$$h - D - (p-\pi)\pi(i-1)$$

$$h - D^{(\mathfrak{p})} - \{(p-\pi)(\pi-1) + \mathfrak{p}\}(i-1) \qquad {\scriptstyle (\mathfrak{p}=0,1,2,\ldots,\pi-1)}$$

dürfen nicht negativ sein, wodurch den Indicesdifferenzen $\delta_{\mathfrak{p}i}$ gewisse Bedingungen auferlegt werden.

3. Die Formel (I) ist besonders bemerkenswerth wenn $\pi = 1$ angenommen wird, da alsdann die Derivirten von z herausfallen. Es werden ferner die Grössen $\mathfrak{D}_i^{[\delta_{\mathfrak{p}i}]}$ zu Null. $\mathfrak{D}_i$ wird in der Reihe δ_{1i}, $\delta_{2i}, \ldots, \delta_{pi}$ enthalten sein und zwar ist es diejenige Grösse, welche von den übrigen um positive Zahlen übertroffen wird. Man erhält also die einfache Gleichung:

$$\text{(II)} \qquad 0 = (x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i}\left\{F_0.y + \psi.F_1.\frac{dy}{dx} + \ldots\right.$$

$$\left. + \psi^{p-1}.F_{p-1}.\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}\right\} + G_0[h].z,$$

$$F_{\mathfrak{p}} = F_{\mathfrak{p}}[h - D - \mathfrak{p}(i-1)]$$

mit der Bedingung:

$$h - D - (p-1)(i-1) \geqq 0.$$

Setzt man endlich in der Gleichung (I) den Index π der Null gleich, dann resultirt die Differentialgleichung p^{ter} Ordnung für die Function y:

$$\text{(A)} \qquad 0 = F_0[h + p(i-1)]y + \psi.F_1[h + (p-1)(i-1)]\frac{dy}{dx} + \ldots$$

$$+ \psi^{p-1}.F_{p-1}[h + i - 1]\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \psi^p.F_p[h]\frac{d^p y}{dx^p}$$

denn es ist

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = \ldots = \mathfrak{D}_{i+1} = 0$$

also auch $D = 0$.

Für $h = 0$ erhält man die bekannte Fuchs'sche Form der Differentialgleichung:

$$\text{(A')} \qquad 0 = F_0[p(i-1)].y + \psi.F_1[(p-1)(i-1)].\frac{dy}{dx} + \dots$$
$$+ \psi^{p-1}.F_{p-1}[i-1].\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \psi^p.\frac{d^py}{dx^p}.$$

In diesem Falle ist

$$\text{(a)} \qquad \sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} = \frac{1}{2}p(p-1)(i-1).$$

Die Gleichung (A') lässt sich noch weiter vereinfachen. Es ist nemlich

$$y\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1,i}, \lambda_{1,i+1} \\ \lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2,i}, \lambda_{2,i+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{p1}, \lambda_{p2}, \dots, \lambda_{p,i}, \lambda_{p,i+1} \end{vmatrix}$$
$$= (x-\xi_1)^{\varepsilon_1}.(x-\xi_2)^{\varepsilon_2}\dots(x-\xi_i)^{\varepsilon_i}.y\begin{vmatrix} \lambda'_{11}, \lambda'_{12}, \dots, \lambda'_{1,i}, \lambda'_{1,i+1} \\ \lambda'_{21}, \lambda'_{22}, \dots, \lambda'_{2,i}, \lambda'_{2,i+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda'_{p1}, \lambda'_{p2}, \dots, \lambda'_{p,i}, \lambda'_{p,i+1} \end{vmatrix}$$

wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i$ ganz beliebige Grössen sind und zwischen den Indices $\lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}$ und $\lambda'_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}$ die Relationen bestehen:

$$\lambda'_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} = \lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} - \varepsilon_{\mathfrak{i}} \qquad {\scriptstyle(\mathfrak{i}=1,2,\dots,i)}$$
$$\lambda'_{\mathfrak{p},i+1} = \lambda_{\mathfrak{p},i+1} + \sum_{(\mathfrak{i})}^{i}\varepsilon_{\mathfrak{i}}.$$

Man kann also jede Function y auf eine andere zurückführen, für welche i Indices in i verschiedenen Verticalreihen *willkürliche* Werthe erhalten. Wir können daher insbesondere setzen:

$$\text{(6)} \qquad \lambda_{1\mathfrak{i}} + \lambda_{2\mathfrak{i}} + \dots + \lambda_{p\mathfrak{i}} = n_{\mathfrak{i}} \qquad {\scriptstyle(\mathfrak{i}=1,2,\dots,i)}.$$

wo die Grössen $n_1, n_2, \ldots, n_\iota$ beliebige ganze Zahlen sein sollen. Dann ist

$$\mathrm{Det.}\,\mathfrak{B}_i = w_i^{(1)}.w_i^{(2)} \ldots w_i^{(p)} = e^{2n_i\pi} = 1\,. \qquad (i=1,2,\ldots,\iota)$$

Wegen der Gleichung (a) ist aber

$$\lambda_{1,\iota+1} + \lambda_{2,\iota+1} + \ldots + \lambda_{p,\iota+1} = \frac{1}{2}p(p-1)(i-1) - \sum_{(i)}^{\iota} n_i\,.$$

Folglich ist auch $\mathrm{Det.}\,\mathfrak{B}_{\iota+1} = 1$.

Die zur Gleichung (A′) gehörende determinirende Gleichung heisst für den Verzweigungspunkt ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, \iota)$:

$$F_0 + F_1.\psi'.\lambda + F_2.\psi'^2.\lambda(\lambda-1) + \ldots$$
$$+ F_{p-1}.\psi'^{p-1}.\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-p+2) + \psi'^p.\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-p+1) = 0$$

wo in $F_0, F_1, \ldots, F_{p-1}$, so wie in $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ das Argument $x = \xi_i$ zu setzen ist.

F_{p-1} ist in Bezug auf ξ_i vom Grade $\iota - 1$, wir können also setzen:

$$F_{p-1} = g_0 + g_1\xi_i + \ldots + g_{\iota-1}\xi_i^{\iota-1}.$$

Da der Coefficient von λ^{p-1} in der determinirenden Gleichung gleich $-\sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\lambda_{\mathfrak{p}i}$ sein muss, so erhalten wir die folgenden linearen Gleichungen zur Bestimmung der Grössen $g_0, g_1, \ldots, g_{\iota-1}$:

$$g_0 + \xi_i.g_1 + \xi_i^2.g_2 + \ldots + \xi_i^{\iota-1}.g_{\iota-1} = \left[\frac{1}{2}p(p-1) - n_i\right]\psi'(\xi_i). \qquad (i=1,2,\ldots,\iota)$$

Das Glied $F_{p-1}[i-1]\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}$ fällt also aus der Differentialgleichung (A′) aus, wenn wir setzen:

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_\iota = \frac{1}{2}p(p-1).$$

Das System, für welches $\sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\lambda_{\mathfrak{p}i} = \frac{1}{2}p(p-1)$ ist, wollen wir im Folgenden ein »reducirtes« nennen.

4. Die Existenz der Functionen y, insofern sie der Gleichung (A′)

genügen, ist von Herrn FUCHS in aller Strenge nachgewiesen. Wenn wir also ein allgemeineres System (z), welches der Gleichung:

$$0 = G_0[k + p(i-1)]z + \psi . G_1[k + (p-1)(i-1)]\frac{dz}{dx} + \cdots$$

$$+ \psi^{p-1}. G_{p-1}[k + i - 1]\frac{d^{p-1}z}{dx^{p-1}} + \psi^p . G_p[k]\frac{d^p z}{dx^p},$$

genügt, wo

$$k = -\sum_{(\mathrm{i})}^{i+1}\sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\delta_{\mathfrak{p}\mathrm{i}},$$

durch ein Hauptsystem analytisch ausdrücken können, dann ist die Existenz von z ebenfalls ausser Zweifel. Der Zusammenhang beider Systeme ist aber gegeben durch die Gleichung:

$$z = (x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i}\left\{P_0.y + \psi.P_1.\frac{dy}{dx} + \cdots\right.$$

$$\left. + \psi^{p-1}.P_{p-1}.\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}\right\}$$

wo $P_\mathfrak{p}$ $(\mathfrak{p} = 0, 1, \ldots, p-1)$ eine ganze rationale Function vom Grade: $-D - \mathfrak{p}(i-1)$ ist. Aus der letzteren Gleichung erkennt man unmittelbar, dass die Wurzeln der Gleichung $G_p[k] = 0$ nicht Unstetigkeitspunkte der Functionen z sein können. Da die Coefficienten der Function $G_p[k]$ zur Festlegung eines Individuums dienen können, so wollen wir dieselben die »individuellen» Parameter der Function z nennen.

Bisher sind die Functionen $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}$ in der Reductionsformel nur dem *Grade* nach bekannt. Die Coefficienten in denselben bleiben also zu bestimmen. Die natürlichste Methode zur Bestimmung derselben besteht darin, die Thatsache zur analytischen Formulirung zu bringen, dass zu z dieselben »erzeugenden» Substitutionen gehören wie zu y. Allein dieser Weg hat beträchtliche Schwierigkeiten, da diese erzeugenden Substitutionen von der Wahl der Initialzweige abhängen, während die »definirenden» Elemente der mehrfach linear verknüpften Functionen die independenten Invarianten jener Substitutionen sind. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, machen wir die Annahme, die Functionen z seien, ebenso wie die Functionen y, durch ihre Differentialgleichung »determinirt».

Dass dies der Fall ist, lässt sich auch streng beweisen, indem man den Fuchs'schen Existenzbeweis, nur ganz unbedeutend modificirt, auf die Differentialgleichung der z anwendet. Wir werden im Folgenden voraussetzen, dies sei geschehen.

Man kann stets annehmen die Indices des Systems (z) seien so beschaffen, dass $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = \ldots = \mathfrak{D}_i = 0$ sei. Denn ist dies thatsächlich nicht der Fall, dann können wir (nach N° 3), ohne die Allgemeinheit zu beschränken, die Function z stets auf eine solche mit veränderten Indices zurückführen, für welche diese Bedingungen erfüllt sind. Alsdann kann man aber über die Grössen $\delta_{1,i+1}, \delta_{2,i+1}, \ldots, \delta_{p,i+1}$ nicht mehr verfügen. Jedenfalls muss $D = \mathfrak{D}_{i+1}$ negativ sein. Wir setzen daher $D = -m$. Die Reductionsgleichung nimmt dann die folgende Form an

$$(7) \qquad z = P_0[m].y + \psi.P_1[m-(i-1)].\frac{dy}{dx} + \cdots$$
$$+ \psi^{p-1}.P_{p-1}[m-(p-1)(i-1)].\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}.$$

Aus dieser Gleichung entwickele man die Grössen:

$$\psi\frac{dz}{dx}, \quad \psi^2\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \psi^p\frac{d^pz}{dx^p},$$

und eliminire mit Hülfe der Differentialgleichung, alle Derivirten von y, welche die $(p-1)^{\text{te}}$ übersteigen. Auf diese Weise erhält man Ausdrücke von der Form:

$$(8) \qquad \left|\begin{array}{l}
\psi\dfrac{dz}{dx} = a_{11}.y + a_{12}.\psi.\dfrac{dy}{dx} + \cdots + a_{1p}.\psi^{p-1}.\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}, \\[2ex]
\psi^2\dfrac{d^2z}{dx^2} = a_{21}.y + a_{22}.\psi.\dfrac{dy}{dx} + \cdots + a_{2p}.\psi^{p-1}.\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}, \\[2ex]
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\[2ex]
\psi^p\dfrac{d^pz}{dx^p} = a_{p1}.y + a_{p2}.\psi.\dfrac{dy}{dx} + \cdots + a_{pp}.\psi^{p-1}.\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}.
\end{array}\right.$$

Bezeichnet man den Grad einer ganzen Function Fx mit ΓFx, dann

lassen sich die Grade der ganzen Functionen $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{pp}$ in folgender Weise darstellen:

$$
(8')\quad \begin{cases}
\Gamma a_{11} = m + i - 1, & \Gamma a_{12} = m, \ \ldots, \ \Gamma a_{1p} = m - (p-2)(i-1) \\
\Gamma a_{21} = m + 2(i-1), & \Gamma a_{22} = m + i - 1, \ \ldots, \ \Gamma a_{2p} = m - (p-3)(i-1), \\
\Gamma a_{31} = m + 3(i-1), & \Gamma a_{32} = m + 2(i-1), \ \ldots, \ \Gamma a_{3p} = m - (p-4)(i-1) \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\Gamma a_{p1} = m + p(i-1), & \Gamma a_{p2} = m + (p-1)(i-1), \ \ldots, \ \Gamma a_{pp} = m + i - 1.
\end{cases}
$$

Man führe nun die Grössen $\psi\frac{dz}{dx}, \psi^2\frac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \psi^p\frac{d^pz}{dx^p}$ und z in die Differentialgleichung von z ein, dann erhält man:

$$
\begin{aligned}
o = (P_0G_0 + a_{11}G_1 + \ldots + a_{p1}G_p)y + (P_1G_0 + a_{12}G_1 + \ldots + a_{p2}G_p)\psi\frac{dy}{dx} + \ldots \\
+ (P_{p-1}G_0 + a_{1p}G_1 + \ldots + a_{pp}G_p)\psi^{p-1}\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck ist aber eine homogene lineäre Differentialgleichung $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für die Function y. Würde die Function y dieser Gleichung genügen, so müsste zwischen je p Zweigen so wohl als zwischen je $p+1$ Zweigen derselben eine lineäre homogene Relation mit constanten Coefficienten bestehen, was offenbar unmöglich ist. Desshalb muss diese Gleichung identisch Null sein d. h. es müssen für jeden Werth von x die Gleichungen bestehen

$$
\begin{aligned}
P_0G_0 + a_{11}G_1 + \ldots + a_{p1}G_p &= o, \\
P_1G_0 + a_{12}G_1 + \ldots + a_{p2}G_p &= o, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
P_{p-1}G_0 + a_{1p}G_1 + \ldots + a_{pp}G_p &= o.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen sind in Bezug auf x, der Reihe nach, von dem Grade:

$$
m + k + p(i-1), \ m + k + (p-1)(i-1), \ \ldots, \ m + k + (i-1).
$$

Sie liefern also im Ganzen $p(m+k+1)+\frac{1}{2}p(p+1)(i-1)$ Bedingungsgleichungen für die Coefficienten in den ganzen rationalen Functionen

$$P_0, P_1, \ldots, P_{p-1};\; G_0, G_1, \ldots, G_p;\; a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{pp}.$$

Von diesen Gleichungen sind aber nur $p(m+k+i+1)-1$ von einander unabhängig, während die übrigen

$$\frac{1}{2}p\{p(i-1)-(i+1)\}+1$$

Gleichungen identisch erfüllt sind.[1]

Als unbekannte Grössen haben wir anzusehen:

$$\textit{erstens}\ p(k+1)+\frac{1}{2}p(p+1)(i-1)$$

Coefficienten in den Functionen $G_0, G_1, \ldots, G_{p-1}$,

$$\textit{zweitens}\ p(m+1)-\frac{1}{2}p(p-1)(i-1)-1$$

Coefficienten in den Functionen $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}$. Diese Unbekannten ergeben sich selbstverständlich nicht *eindeutig* aus den als von einander unabhängig bezeichneten Gleichungen, da die letzteren in keinem Falle linear sind.

Die Grössen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ in dem Ausdruck $G_k[k]=(x-\tau_1)(x-\tau_2)\ldots(x-\tau_k)$, welche wir als »individuelle» Parameter des Systems (z) bezeichnet haben, sind bei dieser Reduction als »Data» anzusehen und sind der Natur der Aufgabe gemäss, keiner Beschränkung unterworfen.

Die Parameter der Differentialgleichung eines Hauptsystems zerfallen in zwei Gruppen: in solche, welche durch die Bedingungen der Verzweigung bestimmt sind, deren Anzahl $p(i+1)-1$ ist, und die übrigen. Jene $(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1)-1\right\}$ Parameter, welche auch nach Angabe des Indicessystems unbestimmt bleiben, wollen wir die »characteristischen» Parameter der Gleichung nennen. Das allgemeine System (z) besitzt ebensoviele characteristische Parameter, die wir aber nicht gerade als »bestimmte Coefficienten» aufzufassen brauchen.

[1] In dem besonderen Falle $p=2$, $i=2$, sind *alle* auf die obige Art erhaltenen Gleichungen von einander unabhängig. Denn es ist $\frac{1}{2}p\{p(i-1)-(i+1)\}+1=0$.

Wir können jetzt das Resultat der vorstehenden Untersuchung in dem folgenden *Satze* aussprechen:

»Ein mehrfach linear verknüpftes Functionensystem mit einer beliebigen Anzahl beliebiger »individueller Parameter» lässt sich stets auf eine endliche Anzahl von »Hauptsystemen» derselben Art mit vorgegebenen »characteristischen» Parametern reduciren. Die »characteristischen» Parameter des zu reducirenden Systems können *nicht* willkürlich angenommen werden, sondern müssen einem gewissen Systeme simultaner nicht linearer algebraischer Gleichungen genügen.»

5. Will man nicht gerade auf ein Hauptsystem mit *vorgegebenen* characteristischen Parametern reduciren, dann kann man sich einer einfacheren Methode bedienen, welche im Folgenden angedeutet werden soll. Sind nemlich $y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{pi}$ einerseits und $z_{1i}, z_{2i}, \ldots, z_{pi}$ andererseits von einander unabhängige Zweigsysteme der Functionen y und z dann ist

$$\begin{vmatrix} z_{1i}, \frac{dz_{1i}}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-1}z_{1i}}{dx^{p-1}} \\ z_{2i}, \frac{dz_{2i}}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-1}z_{2i}}{dx^{p-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{pi}, \frac{dz_{pi}}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-1}z_{pi}}{dx^{p-1}} \end{vmatrix} = G_p[k]\,. \begin{vmatrix} y_{1i}, \frac{dy_{1i}}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-1}y_{1i}}{dx^{p-1}} \\ y_{2i}, \frac{dy_{2i}}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-1}y_{2i}}{dx^{p-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{pi}, \frac{dy_{pi}}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-1}y_{pi}}{dx^{p-1}} \end{vmatrix}.$$

Infolge der Gleichungen (8) der vorigen Nummer erhält man also die einfache Bedingungsgleichung:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} P_0 & , P_1 & , \ldots, & P_{p-1} \\ a_{11} & , a_{12} & , \ldots, & a_{1p} \\ a_{21} & , a_{22} & , \ldots, & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p-1,1} & , a_{p-1,2} & , \ldots, & a_{p-1,p} \end{vmatrix} = G_p[k].$$

Diese Gleichung, welche in Bezug auf x vom Grade pm ist, muss identisch für alle x erfüllt sein. Sie liefert also $pm + 1$ simultane Gleichungen. Aus diesen bestimmen sich:

$$pm + p - \frac{1}{2}p(p-1)(i-1)$$

Coefficienten in den Functionen $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}$, und

$$(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1)-1\right\}$$

characteristische Parameter des Systems (y), da dieselben von einander unabhängig sind.

In dem Falle der *hypergeometrischen Functionen* $\binom{p=2}{i=2}$ wird die Zahl $(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1)-1\right\}$ zu Null. Die Differentialgleichung des Hauptsystems ist dann:

$$(x^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]\frac{dy}{dx} + \alpha.\beta.y = 0,$$

Die Indices sind also so gewählt, dass $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ der Differentialgleichung genügt. Nach der üblichen Bezeichnung ist

$$y = y\left\{\begin{array}{ccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{\infty} \\ 0, & 0, & \alpha \\ 1-\gamma, & \gamma-\alpha-\beta, & \beta \end{array}\right|.$$

Das zu reducirende System z sei gegeben durch die Characteristik:

$$z = z\left\{\begin{array}{ccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{\infty} \\ 0, & 0, & \alpha-n \\ 1-\gamma, & \gamma-\alpha-\beta, & \beta-n \end{array}\right|$$

so dass also $k = 2n$. Die Gleichung (9) heisst jetzt:

$$\left|\begin{array}{cc} P_0[n], & P_1[n-1] \\ x(x-1)\left(\frac{dP_0[n]}{dx} - \alpha\beta.P_1[n-1]\right), & P_0[n] + \frac{d}{dx}\{x(x-1).P_1[n-1]\} - [(\alpha+\beta+1)x-\gamma].P_1[n-1] \end{array}\right| = G[2n].$$

Wir wollen nur den speciellen Fall $k = 2$ weiter verfolgen. Alsdann sei:

$$P_0[1] = a + bx; \qquad P_1[0] = c; \qquad G[2] = p + qx + x^2.$$

Die Coefficienten a, b, c bestimmen sich also aus den Gleichungen:

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} aa + (\gamma - 1)ac &= p, \\ 2ab - (\alpha + \beta - 1)ac + \gamma bc - \alpha\beta cc &= q, \\ bb - (\alpha + \beta)bc + \alpha\beta cc &= 1. \end{aligned} \right.$$

Setzt man

$$a + \frac{1}{2}(\gamma - 1)c = x_2,$$

$$b - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)c = x_1,$$

$$-(a + b) - \frac{1}{2}(\gamma - \alpha - \beta)c = x_3,$$

dann nehmen die Gleichungen (10) die folgende symmetrische Form an:

$$\begin{aligned} x_1^2 - (\gamma - 1)^2(x_1 + x_2 + x_3)^2 &= p, \\ x_2^2 - (\alpha - \beta)^2(x_1 + x_2 + x_3)^2 &= 1, \\ x_3^2 - (\alpha + \beta - \gamma)^2(x_1 + x_2 + x_3)^2 &= p + q + 1. \end{aligned}$$

Die Quadrate der neuen Unbekannten x_1, x_2, x_3 bestimmen sich aus Gleichungen *vierten* Grades. (Man vergl. Riemann, Werke, pag. 306.) Der Fall $k = 1$ lässt sich in ganz ähnlicher Weise behandeln.

6. Wir sind jetzt im Stande die Coefficienten der Functionen $H_0x, H_1x, \ldots, H_px$ in der Riemann'schen Fundamentalrelation:

$$(11) \qquad H_0x.y^{(0)} + H_1x.y^{(1)} + \ldots + H_px.y^{(p)} = 0$$

zu bestimmen. Wir denken uns zunächst die Indices in den einzelnen Functionen $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ derartig transformirt, dass bei der nachfolgenden Reduction auf *ein* Hauptsystem (y) die Grössen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_t$ gleich Null gesetzt werden können, wie wir oben angenommen haben. Dadurch treten an die Stelle von $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ andere ebenfalls zur selben Art gehörige Functionen $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(p)}$, welche sich von

den ursprünglichen nur um rationale Factoren unterscheiden. Die Reductionsgleichungen haben also die Form:

$$
(12)\quad \left|\begin{array}{l}
y^{(0)} = R_0^{(0)}x.\mathrm{y} + R_1^{(0)}x.\dfrac{d\mathrm{y}}{dx} + \ldots + R_{p-1}^{(0)}x.\dfrac{d^{p-1}\mathrm{y}}{dx^{p-1}}, \\
y^{(1)} = R_0^{(1)}x.\mathrm{y} + R_1^{(1)}x.\dfrac{d\mathrm{y}}{dx} + \ldots + R_{p-1}^{(1)}x.\dfrac{d^{p-1}\mathrm{y}}{dx^{p-1}}, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
y^{(p)} = R_0^{(p)}x.\mathrm{y} + R_1^{(p)}x.\dfrac{d\mathrm{y}}{dx} + \ldots + R_{p-1}^{(p)}x.\dfrac{d^{p-1}\mathrm{y}}{dx^{p-1}}.
\end{array}\right.
$$

In diesen Gleichungen sind die Functionen Rx in mehrdeutiger Weise vollständig bestimmt. Sie enthalten in ihren Coefficienten implicite die willkürlich angenommenen »characteristischen» Parameter $k_1, k_2, \ldots, k_\rho$ der Function (y), wo zur Abkürzung

$$\rho = (p-1)\left[\frac{1}{2}p(i-1)-1\right]$$

gesetzt ist.

Eliminirt man nun aus den $p+1$ Gleichungen (12) die Grössen

$$\mathrm{y}, \frac{d\mathrm{y}}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-1}\mathrm{y}}{dx^{p-1}}$$

dann erhält man eine Relation von der Form der Gleichung (11).

Die »characteristischen» Parameter der Functionen $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ sind hierbei natürlich nicht willkürlich, sondern vielmehr Functionen der Parameter $k_1, k_2, \ldots, k_\rho$. Die Mannigfaltigkeit der Relationen (11), welche zu denselben erzeugenden Substitutionen gehören, ist daher von der Dimension $q.\rho$, wenn ρ die obige Bedeutung hat und q eine bestimmte endliche Zahl bezeichnet.

Die explicite Darstellung der Coefficienten in den Functionen H_0x, $H_1x, \ldots, H_px$ ist nur in den einfachsten Fällen möglich. Dieser Umstand beeinträchtigt jedoch unsere Theorie keineswegs, da die Schwierig-

keiten im Gebiete der Algebra liegen. Wir können also die Aufgabe, welche wir uns gestellt haben als »im Allgemeinen» erledigt betrachten. Dass eine eingehende Untersuchung der bei unserem Verfahren auftretenden Systeme algebraischer Gleichungen für die Theorie der Functionensysteme *derselben Art* von grosser Wichtigkeit sein würde, ist selbstverständlich.

7. Zum Schluss will ich noch den Zusammenhang darlegen, welcher zwischen den independenten Invarianten der erzeugenden Substitutionen einer mehrfach linear verknüpften Function und ihren »individuellen» Parametern besteht. Für ein »reducirtes» System [1] nimmt Herr POINCARÉ (Acta Mathematica, Bd. 4, p. 205) $(p^2 - 1)(i - 1)$ independente Invarianten an, d. h. ebensoviele als die erzeugenden Substitutionen independente Coefficienten enthalten. Die Periodicität der p-fach linear verknüpften Functionen wird nemlich bestimmt:

erstens durch $p^2 i$ Coefficienten in den Substitutionen

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{i-1}, \mathfrak{B}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{B}_{i+1}$$

zweitens durch p Coefficienten in der Substitution $\mathfrak{B}_i$.

Von den ersten $p^2 i$ Coefficienten können jedoch p beliebige gleich Eins gesetzt werden, da irgend welche p Initialzweige willkürliche Factoren erhalten können. Ferner sind die $p^2 i$ insoweit unbestimmten Coefficienten infolge der Gleichung (1) [N° 1] noch $p^2 - 1$ von einander unabhängigen Bedingungen unterworfen. Beachtet man endlich noch die Gleichungen:

$$\text{Det.}\,\mathfrak{B}_1 = \text{Det.}\,\mathfrak{B}_2 = \ldots = \text{Det.}\,\mathfrak{B}_i = 1$$

dann bleiben $(p^2 - 1)(i - 1)$ Coefficienten unbestimmt.

Denken wir uns nun eine allgemeine p-fach linear verknüpfte Function z durch ein Hauptsystem mit vorgegebenen »characteristischen» Pa-

---

[1] Man beachte, dass den Bedingungen $\text{Det.}\,\mathfrak{B}_1 = \text{Det.}\,\mathfrak{B}_2 = \ldots = \text{Det.}\,\mathfrak{B}_i$ noch *keineswegs* eine Differentialgleichung entsprechen muss, in welcher das Glied $F_{p-1}\cdot\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}$ ausfällt, obwohl diese den Substitutionen auferlegte Bedingungen die Zahl der independenten Invarianten wesentlich beeinflussen. (Man vergl. Acta Mathematica, Bd. 4, p. 202.)

rametern ausgedrückt und darauf jenes Hauptsystem in ein »reducirtes» übergeführt, dann ist die Function z wesentlich determinirt

erstens durch $(p-1)\left[\frac{1}{2}p(i-1)-1\right]$ »characteristische» Parameter,

zweitens durch $p(i+1)-(i+1)$ Parameter, welche durch die Bedingungen der Verzweigung bestimmt sind,

drittens durch i endliche Verzweigungspunkte,

viertens durch k »individuelle» Parameter.

Von den i endlichen Verzweigungspunkten kann man zweien die willkürlichen Zahlwerthe 0 und 1 beilegen, so dass nur $i-2$ allgemein bleiben.

Damit jene

$$\frac{1}{2}p(p+1)(i-1)+p+k-2$$

allgemeinen Bestimmungsstücke den $(p^2-1)(i-1)$ independenten Invarianten entsprechen, muss

$$k=\left[\frac{1}{2}p(p-1)-1\right]i-\left[\frac{1}{2}p(p+1)-3\right]$$

sein. Es ist also

für $p=2$ die Zahl $k=0$ für *jeden* Werth von i;

für $p=3$ die Zahl $k=2i-3$;

für $p=4$ die Zahl $k=5i-7$; etc.

Allgemein gilt der *Satz:*

»Sollen die Definitionen der mehrfach linear verknüpften Functionen durch die independenten Invarianten der erzeugenden Substitutionen einerseits und ihre Differentialgleichung andererseits äquivalent sein (d. h. gleichviele von einander unabhängige Bestimmungsstücke enthalten), dann muss man den betreffenden Functionen im Allgemeinen eine gewisse Anzahl »individueller» Parameter zu-

ertheilen, es sei denn dass die Differentialgleichung von der *zweiten* Ordnung wäre.»

Einen ganz analogen Satz hat Herr POINCARÉ (Acta Mathematica, Bd. 4, p. 219) aufgestellt. Nur treten dort an Stelle der »individuellen» Parameter »ausserwesentlich singuläre Punkte» (points à apparence singulière). Dieser Unterschied könnte, in gewissem Sinne, irrelevant erscheinen, da die individuellen Parameter stets als ausserwesentlich singuläre Stellen aufzufassen sind. Man beachte jedoch, dass das Umgekehrte, im Allgemeinen, keineswegs statthaft ist.

Einbeck 21. Aug. 1887.

EINE EIGENSCHAFT DER PRIMZAHL 107

VON

K. SCHWERING
in COESFELD.

In meinem Aufsatze *Über gewisse trinomische komplexe Zahlen*[1] habe ich auf die Primzahl 107 als für eine Frage der Zahlentheorie »zur Untersuchung einladend» hingewiesen. Ich bin nunmehr in der Lage, die dort (Seite 84, Fussnote) gemachten Mitteilungen zu vervollständigen und mit Hülfe des ganzen Ergebnisses die Frage:

»Ist es *immer* möglich, die von JACOBI mit $(\alpha, x)^\lambda$ bezeichneten Kreisteilungsausdrücke als Produkte konjugirter ψ-Funktionen darzustellen?»

durch ein *zweites* Beispiel in *verneinendem* Sinne zu beantworten.

Nimmt man als *primitive Wurzel* 2, so erhalten wir die folgenden 18 Zahlen:

$$1 + \alpha + \alpha^r \quad \text{für} \quad r = 4,\ 31,\ 47,\ 50;$$

ferner:

$$1 + \alpha - \alpha^r \quad \text{für} \quad r = 43,\ 50,\ 35,\ 30,\ 32,\ 17,\ 17,\ 38,\ 41,\ 7,\ 51,\ 47,\ 22;$$

endlich:

$$2 + \alpha,$$

deren Normen unter der Voraussetzung $\alpha^{53} = 1$ zu bilden sind. Zunächst tritt $r = 17$ zweimal auf; dann ist nach Formel 25 obiger Abhandlung:

$$N(1 + \alpha + \alpha^{50}) = N(1 + \alpha + \alpha^4), \qquad N(1 + \alpha - \alpha^{47}) = N(1 + \alpha - \alpha^7),$$

$$N(1 + \alpha - \alpha^{22}) = N(1 + \alpha - \alpha^{32}).$$

[1] Diese Zeitschrift, Bd. 10, S. 57 ff.

Für die übrigen erhält man:

$N(1+\alpha+\alpha^4) = 107.181579$,
$N(1+\alpha+\alpha^{31}) = 107.76003$,
$N(1+\alpha+\alpha^{47}) = 107.118297$,
$N(1+\alpha-\alpha^{43}) = 107.151051$,
$N(1+\alpha-\alpha^{60}) = 107.243589$,
$N(1+\alpha-\alpha^{35}) = 107.246769$,
$N(1+\alpha-\alpha^{30}) = 107.73459$,
$N(1+\alpha-\alpha^{32}) = 107.107.7103$,
$N(1+\alpha-\alpha^{17}) = 107.107.1061$,
$N(1+\alpha-\alpha^{38}) = 107.191119$,
$N(1+\alpha-\alpha^{41}) = 107.27773$,
$N(1+\alpha-\alpha^{7}) = 107.107.3181$,
$N(1+\alpha-\alpha^{51}) = 107.27773$.

Endlich

$$N(2+\alpha) = 3.107.28059810762433.$$

Die Gleichheit der Normen $N(1+\alpha-\alpha^{41}) = N(1+\alpha-\alpha^{51})$ ist bemerkenswert, da die Zahlen 41 und 51 *verschiedenen* Gruppen (obige Abhandl. S. 69) nämlich $\mu = 4$ und $\mu = 2$ angehören.

In der oben erwähnten Fussnote heisst es durch einen Druckfehler $1+\alpha-\alpha^4$ statt $1+\alpha+\alpha^4$, wie oben angegeben.

Ich benutze die Gelegenheit zu der ferneren Mitteilung über die Normen $N(z+\alpha-\alpha^{\mu+1})$, wo $\alpha^\lambda = 1$, λ reelle Primzahl und μ eine beliebige ganze Zahl ist. In den zahlreichen von mir berechneten Beispielen war der Koefficient jeder *geraden* Potenz von z, also der Koefficient von z^2, z^4, z^6, u. s. w. stets entweder *Null* oder eine *positive* Zahl.

Im September 1887.

ON THE DIVISION OF SPACE WITH MINIMUM PARTITIONAL AREA

BY

Sir WILLIAM THOMSON
in GLASGOW.

1. This problem is solved in foam, and the solution is interestingly seen in the multitude of film-enclosed cells obtained by blowing air through a tube into the middle of a soap-solution in a large open vessel. I have been led to it by endeavours to understand, and to illustrate, GREEN's theory of »extraneous pressure» which gives, for light traversing a crystal, FRESNEL's wave-surface, with FRESNEL's supposition (strongly supported as it is by STOKES and RAYLEIGH) of velocity of propagation dependent, not on the distortion-normal, but on the line of vibration. It has been admirably illustrated, and some elements towards its solution beautifully realized in a manner convenient for study and instruction, by PLATEAU, in the first volume of his *Statique des Liquides soumis aux seules Forces Moléculaires.*

2. The general mathematical solution, as is well known, is that every interface between cells must have constant curvature [1] throughout, and that where three or more interfaces meet in a curve or straight line their tangent-planes through any point of the line of meeting intersect at angles such that equal forces in these planes, perpendicular to their line of intersection, balance. The *minimax* problem would allow any

[1] By »curvature» of a surface I mean sum of curvatures in mutually perpendicular normal sections at any point; not GAUSS's »curvatura integra», which is the product of the curvature in the two »principal normal sections», or sections of greatest and least curvature. (See THOMSON and TAIT's *Natural Philosophy*, part i. §§ 130, 136.)

number of interfaces to meet in a line; but for a pure minimum it is obvious that not more than three can meet in a line, and that therefore, in the realization by the soap-film, the equilibrium is necessarily unstable if four or more surfaces meet in a line. This theoretical conclusion is amply confirmed by observation, as we see at every intersection of films, whether interfacial in the interior of groups of soap-bubbles, large or small, or at the outer bounding-surface of a group, never more than three films, but, wherever there is intersection, always *just three films,* meeting in a line. The theoretical conclusion as to the angles for stable equilibrium (or pure minimum solution of the mathematical problem) therefore becomes, simply, that every angle of meeting of film-surfaces is exactly 120°.

3. The rhombic dodecahedron is a polyhedron of plane sides between which every angle of meeting is 120°; and space can be filled with (or divided into) equal and similar rhombic dodecahedrons. Hence it might seem that the rhombic dodecahedron is the solution of our problem for the case of all the cells equal in volume, and every part of the boundary of the group either infinitely distant from the place considered, or so adjusted as not to interfere with the homogeneousness of the interior distribution of cells. Certainly the rhombic dodecahedron *is a solution of the minimax, or equilibrium-problem;* and certain it is that no other plane-sided polyhedron can be a solution.

4. But it has seemed to me, on purely theoretical consideration, that the tetrahedral angles of the rhombic dodecahedron,[1] giving, when

---

[1] The rhombic dodecahedron has six tetrahedral angles and eight trihedral angles. At each tetrahedral angle the plane faces cut one another successively at 120°, while each is perpendicular to the one remote from it; and the angle between successive edges is $\cos^{-1}\frac{1}{3}$, or 70° 32′. The obtuse angles (109° 28′) of the rhombs meet in the trihedral angles of the solid figure. The whole figure may be regarded as composed of six square pyramids, each with its alternate slant faces perpendicular to one another, placed on six squares forming the sides of a cube. The long diagonal of each rhombic face thus made up of two sides of pyramids conterminous in the short diagonal, is $\sqrt{2}$ times the short diagonal.

space is divided into such figures, twelve plane films meeting in a point (as twelve planes from the twelve edges of a cube meeting in the centre of the cube) are essentially unstable. That it is so is proved experimentally by PLATEAU (vol. i. § 182, fig. 71) in his well-known beautiful experiment with his cubic skeleton frame dipped in soap-solution and taken out. His fig. 71 is reproduced here in fig. 1. Instead of twelve *plane* films stretched inwards from the twelve edges and meeting in the centre of the cube, it shows twelve films, of which eight are slightly curved and four are plane,[1] stretched from the twelwe edges to a small central plane quadrilateral film with equal curved edges and four angles each of 109° 28′. Each of the plane films is an isosceles triangle with two equal curved sides meeting at a corner of the central curvilinear square in a plane perpendicular to its plane. It is in the plane through an edge and the centre of the cube. The angles of this plane curvilinear triangle are respectively 109° 28′, at the point of meeting of the two curvilinear sides: and each of the two others half of this, or 54° 44′.

5. I find that by blowing gently upon the PLATEAU cube into any one of the square apertures through which the little central quadrilateral film is seen as a line, this film is caused to contract. If I stop blowing before this line contracts to a point, the film springs back to its primitive size and shape. If I blow still very gently but for a little more time, the quadrilateral contracts to a line, and the twelve films meeting in it immediately draw out a fresh little quadrilateral film similar to the former, but in a plane perpendicular to its plane and to the direction of the blast. Thus, again and again, may the films be transformed so as to render the little central curvilinear square parallel to one or other of the three pairs of square apertures of the cubic frame. Thus we see that the twelve plane films meeting in the centre of the cube is a configuration of unstable equilibrium which may be fallen from in three different ways.

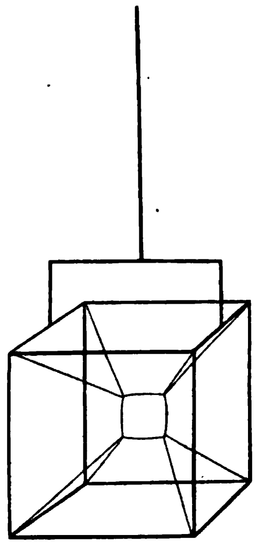
6. Suppose now space to be filled with equal and similar ideal

---

[1] I see it inadvertently stated by PLATEAU that all the twelve films are »légère ment courbées».

rhombic dodecahedrons. Draw the short diagonal of every rhombic face, and fix a real wire (infinitely thin and perfectly stiff) along each. This fills space with PLATEAU cubic frames. Fix now, ideally, a very small rigid globe at each of the points of space occupied by tetrahedral angles of the dodecahedrons, and let the faces of the dodecahedrons be realized by soap-films. They will be in *stable* equilibrium, because of the little fixed globes; and the equilibrium would be stable without the rigid diagonals which we require only to help the imagination in what follows. Let an exceedingly small force, like gravity,[1] act on all the films everywhere perpendicularly to one set of parallel faces of the cubes. If this force is small enough it will not tear away the films from the globes; it will only produce a very slight bending from the plane rhombic shape of each film. Now annul the little globes. The films will instantly jump (each set of twelve which meet in a point) into the PLATEAU configuration (fig. 1), with the little curve-edged square in the plane perpendicular to the determining force, which may now be annulled, as we no longer require it. The rigid edges of the cubes may also be now annulled, as we have done with them also; because each is (as we see by symmetry) pulled with equal forces in opposite directions, and therefore is not required for the equilibrium, and it is clear that the equilibrium is stable without them.[2]

Fig. 1.



---

[1] To do for every point of meeting of twelve films what is done by blowing in the experiment of § 5.

[2] The corresponding two-dimensional problem is much more easily imagined; and may probably be realized by aid of moderately simple appliances.

Between a level surface of soap-solution and a horizontal plate of glass fixed at a centimetre or two above it, imagine vertical film-partitions to be placed along the sides of the squares indicated in the drawing (fig. 2): these will rest in stable equilibrium if thick enough wires are fixed vertically through the corners of the squares. Now draw away these wires downwards into the liquid: the equilibrium in the square formation becomes unstable, and the films instantly run into the hexagonal formation shown in the diagram;

7. We have now space divided into equal and similar tetrakaidecahedral cells by the soap-film; each bounded by

1) Two small plane quadrilaterals parallel to one another;

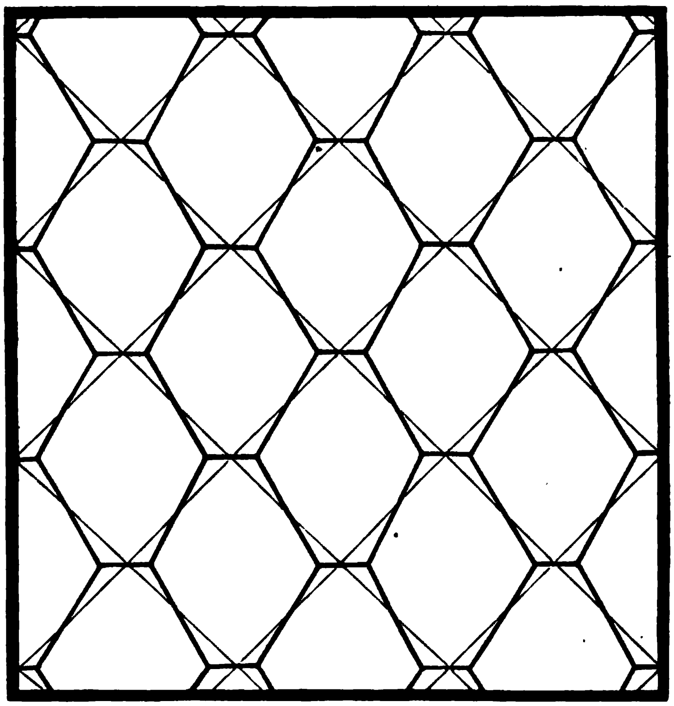
2) Four large plane quadrilaterals in planes perpendicular to the diagonals of the small ones;

3) Eight non-plane hexagons, each with two edges common with the small quadrilaterals, and four edges common with the large quadrilaterals.

---

provided the square of glass is furnished with vertical walls (for which slips of wood are convenient), as shown in plan by the black border of the diagram. These walls are necessary to maintain the inequality of pull in different directions which the inequality of the sides of the hexagons implies. By inspection of the diagram we see that the pull is

Fig. 2.



T/a per unit area on either of the pair of vertical walls which are perpendicular to the short sides of the hexagons; and on either of the other pair of walls $2 \cos 30^\circ \times T/a$; where T denotes the pull of the film per unit breadth, and a the side of a square in the original formation. Hence the ratio of the pulls per unit of area in the two principal directions is as 1 to 1·732.

The films seen in the PLATEAU cube show one complete small quadrilateral, four halves of four of the large quadrilaterals, and eight halves of eight of the hexagons, belonging to six contiguous cells; all mathematically correct in every part (supposing the film and the cube-frame to be infinitely thin). Thus we see all the elements required for an exact construction of the complete tetrakaidecahedron. By making a clay model of what we actually see, we have only to complete a symmetrical figure by symmetrically completing each half-quadrilateral and each half-hexagon, and putting the twelve properly together, with the complete small quadrilateral, and another like it as the far side of the 14-faced figure. We thus have a correct solid model.

8. Consider now a cubic portion of space containing a large number of such cells, and of course a large, but a comparatively small, number of partial cells next the boundary. Wherever the boundary is cut by film, fix stiff wire; and remove all the film from outside, leaving the cubic space divided stably into cells by films held out against their tension by the wire network thus fixed in the faces of the cube. If the cube is chosen with its six faces parallel to the three pairs of quadrilateral films, it is clear that the resultant of the whole pull of film on each face will be perpendicular to the face, and that the resultant pulls on the two pairs of faces parallel to pairs of the greater quadrilaterals are equal to one another and less than the resultant pull on the pair of faces parallel to the smaller quadrilaterals. Let now the last-mentioned pair of faces of the cube be allowed to yield to the pull inwards, while the other two pairs are dragged outwards against the pulls on them, so as to keep the enclosed volume unchanged; and let the wirework fixture on the faces be properly altered, shrunk on two pairs of faces, and extended on the other pair of faces, of the cube, which now becomes a square cage with distance between floor and ceiling less than the side of the square. Let the exact configuration of the wire everywhere be always so adjusted that the cells throughout the interior remain, in their altered configuration, equal and similar to one another. We may thus diminish, and if we please annul, the difference of pull per unit area on the three pairs of sides of the cage. The respective shrinkage-ratio and extension-ratio, to exactly equalize the pulls per unit

area on the three principal planes, (and therefore on all planes), are $2^{-\frac{1}{3}}$, $2^{\frac{1}{6}}$, $2^{\frac{1}{6}}$, as is easily seen from what follows.

9. While the equalization of pulls in the three principal directions is thus produced, work is done by the film on the moving wire-work of the cage, and the total area of film is diminished by an amount equal to W/T, if W denote the whole work done, and T the pull of the film per unit breadth. The change of shape of the cage being supposed to be performed infinitely slowly, so that the film is always in equilibrium throughout, the total area is at each instant a minimum, subject to the conditions

1) That the volume of each cell is the given amount;
2) That every part of the wire has area edged by it; and
3) That no portion of area has any free edge.

10. Consider now the figure of the cell (still of course a tetrakaidecahedron) when the pulls in the three principal directions are equalized, as described in § 8. It must be perfectly isotropic in respect to these three directions. Hence the pair of small quadrilaterals must have become enlarged to equality with the two pairs of large ones, which must have become smaller in the deformational process described in § 8. Of each hexagon three edges coincide with edges of quadrilateral faces of one cell; and each of the three others coincides with edges of three of the quadrilaterals of one of the contiguous cells. Hence the 36 edges of the isotropic tetrakaidecahedron are equal and similar plane arcs; each of course symmetrical about its middle point. Every angle of meeting of edges is essentially 109° 28′ (to make trihedral angles between tangent planes of the films meeting at 120°). Symmetry shows that the quadrilaterals are still plane figures; and therefore, as each angle of each of them is 109° 28′, the change of direction from end to end of each arc-edge is 19° 28′. Hence each would be simply a circular arc of 19° 28′, if its curvature were equal throughout; and it seems from the complete mathematical investigation of §§ 16, 17, 18 below, that it is nearly so, but not exactly so even to a first approximation.

Of the three films which meet in each edge, in three adjacent cells, one is quadrilateral and two are hexagonal.

11. By symmetry we see that there are three straight lines in each (non-plane) hexagonal film, being its three long diagonals; and that these three lines, and therefore the six angular points of the hexagon, are all in one plane. The arcs composing its edges are not in this plane, but in planes making, as we shall see (§ 12), angles of $54° 44'$ with it. For three edges of each hexagon, the planes of the arcs bisect the angle of $109° 28'$ between the planes of the six corners of contiguous hexagons; and for the other three edges are inclined on the outside of its plane of corners, at angles equal to the supplements of the angles of $125° 16'$ between its plane of corners and the planes of contiguous quadrilaterals.

12. The planes of corners of the eight hexagons constitute the faces of an octahedron which we see, by symmetry, must be a regular octahedron (eight equilateral triangles in planes inclined $109° 28'$ at every common edge). Hence these planes, and the planes of the six quadrilaterals, constitute a plane-faced tetrakaidecahedron obtained by truncating the six corners[1] of a regular octahedron each to such a depth as to reduce its eight original (equilateral triangular) faces to equilateral equiangular hexagons. An orthogonal projection of this figure is shown in fig. 3. It is to be remarked that space can be filled with such figures. For brevity we shall call it a plane-faced isotropic tetrakaidecahedron.

Fig. 3.

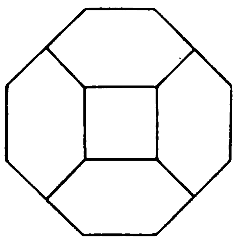
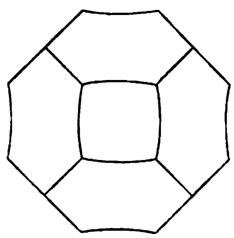


Fig. 4.



13. Given a model of the plane-faced isotropic tetrakaidecahedron, it is easy to construct approximately a model of the *minimal tetrakaidecahedron,* thus: — Place on each of the six square faces a thin plane disk having the proper curved arcs of $19° 28'$ for its edges. Draw the

[1] This figure (but with probably indefinite extents of the truncation) is given in books on mineralogy as representing a natural crystal of red oxide of copper.

three long diagonals of each hexagonal face. Fill up by little pieces of wood, properly cut, the three sectors of 60° from the centre to the overhanging edges of the adjacent quadrilaterals. Hollow out symmetrically the other three sectors, and the thing is done. The result is shown in orthogonal projection, so far as the edges are concerned, in fig. 4; and as the orthogonal projections are equal and similar on three planes at right angles to one another, this diagram suffices to allow a perspective drawing from any point of view to be made by »descriptive geometry».

14. No shading could show satisfactorily the delicate curvature of the hexagonal faces, though it may be fairly well seen on the solid model made as described in § 12. But it is shown beautifully, and illustrated in great perfection, by making a skeleton model of 36 wire arcs for the 36 edges of the complete figure, and dipping it in soap solution to fill the faces with film, which is easily done for all the faces but one. The curvature of the hexagonal film on the two sides of the plane of its six long diagonals is beautifully shown by reflected light. I have made these 36 arcs by cutting two circles, 6 inches diameter, of stiff wire, each into 18 parts of 20° (near enough to 19° 28′). It is easy to put them together in proper positions and solder the corners, by aid of simple devices for holding the ends of the three arcs together in proper positions during the soldering. The circular curvature of the arcs is not mathematically correct, but the error due to it is, no doubt, hardly perceptible to the eye.

15. But the true form of the curved edges of the quadrilateral plane films, and of the non-plane surfaces of the hexagonal films, may be shown with mathematical exactness by taking, instead of PLATEAU's skeleton cube, a skeleton square cage with four parallel edges each 4 centimetres long: and the other eight, constituting the edges of two squares, each $\sqrt{2}$ times as long, or 5·66 centim. Dipped in soap-solution and taken out it always unambiguously gives the central quadrilateral in the plane perpendicular to the four short edges. It shows with mathematical accuracy (if we suppose the wire edges infinitely thin) a complete quadrilateral, four half-quadrilaterals, and four half-hexagons of the minimal

tetrakaidecahedron. The two principal views are represented in figs. 5 and 6.

Fig. 5.

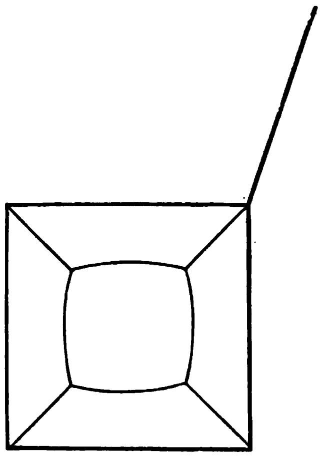
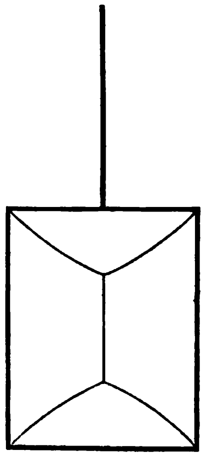
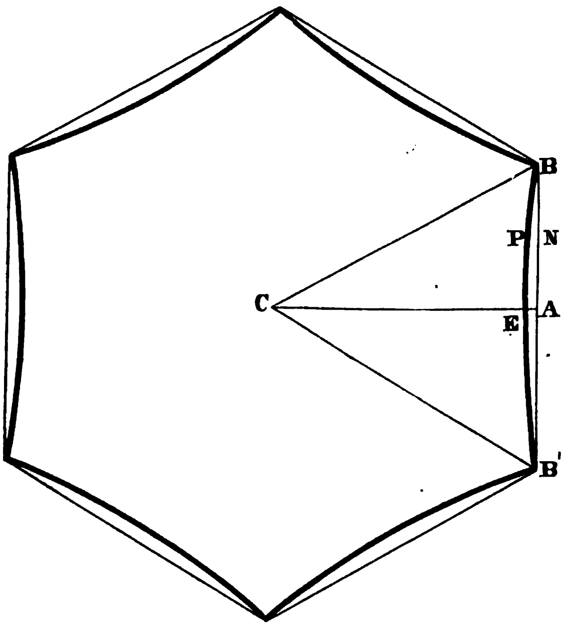


Fig. 6.



16. The mathematical problem of calculating the forms of the plane arc-edges, and of the curved surface of the hexagonal faces, is easily carried out to any degree of approximation that may be desired;

Fig. 7.



though it would be very laborious, and not worth the trouble, to do so further than a first approximation, as given in § 17 below. But first let us state the rigorous mathematical problem; which by symmetry becomes narrowed to the consideration of a 60° sector BCB' of our non-plane hexagon, bounded by straight lines CB, CB' and a slightly curved edge BEB', in a plane, Q, through BB', inclined to the plane BCB' at an angle of $\tan^{-1}\sqrt{2}$, or 54° 44′. The plane of the curved edge I call Q, because it is the plane of the contiguous quadrilateral. The mathematical problem to be solved is *to find the surface of zero curvature edged by BCB' and cutting at 120° the plane Q all along the intersectional curve* (fig. 7). It is obvious that this problem is determinate and has only one solution. Taking CA for axis of x; and z perpendicular to the plane BCB': and regarding z as a function of x, y, to be determined for finding the form of the surface, we have, as the analytical expression of the conditions

$$(1) \qquad \frac{d^2z}{dx^2}\left(1+\frac{dz^2}{dy^2}\right)-2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx\,dy}+\frac{d^2z}{dy^2}\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)=0;$$

and

$$(2) \qquad \left|\begin{array}{l}\left(1+\dfrac{dz^2}{dx^2}+\dfrac{dz^2}{dy^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}-\dfrac{dz}{dx}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)=\dfrac{1}{2}. \\ \qquad\text{when } z=(a-x)\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

17. The required surface deviates so little from the plane BCB' that we get a good approximation to its shape by neglecting dz^2/dx^2, $dz/dx \,.\, dz/dy$, and dz^2/dy^2, in (1) and (2), which thus become

$$(3) \qquad \nabla^2 z = 0,$$

and

$$(4) \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{3}{8}}=\cdot 094734, \quad \text{when } x=a-\frac{z}{\sqrt{2}},$$

∇^2 denoting $(d/dx)^2+(d/dy)^2$. The general solution of (3), in polar coordinates (r, φ) for the plane (x, y), is

$$(5) \qquad \Sigma(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi)r^m,$$

where A, B, and m are arbitrary constants. The symmetry of our problem requires $B = 0$, and $m = 3.(2i + 1)$, where i is any integer. We shall not take more than two terms. It seems not probable that advantage could be gained by taking more than two, unless we also fall back on the rigorous equations (1) and (2), keeping dz^2/dx^2 &c. in the account, which would require each coefficient A to be not rigorously constant but a function of r. At all events we satisfy ourselves with the approximation yielded by two terms, and assume

$$z = Ar^3 \cos 3\varphi + A'r^9 \cos 9\varphi \tag{6}$$

with two coefficients A, A' to be determined so as to satisfy (4) for two points of the curved edge, which, for simplicity, we shall take as its middle, $E(\varphi = 0)$; and end, $B(\varphi = 30°)$. Now remark that, as z is small, even at E, where it is greatest, we have, in (4), $x \doteqdot a$ or $r \doteqdot a \sec \varphi$. Thus, and substituting for dz/dx its expression in polar (r, φ) coordinates, which is

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dr}\cos\varphi - \frac{dz}{rd\varphi}\sin\varphi, \tag{7}$$

we find, from (4) with (6),

(8) (by case $\varphi = 0$) $\quad A + 3a^6 A' = {\cdot}031578 a^{-2}$,

(9) (and by case $\varphi = 30°$) $\quad A - \frac{64}{9} a^6 A' = {\cdot}031578 . \frac{3}{2} . a^{-2}$;

whence

$$A' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{91} \times {\cdot}031578 . a^{-8} = -9 \times {\cdot}0001735 . a^{-8}$$
$$= -{\cdot}001561 . a^{-8},$$
$$A = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{64}{91}\right) \times {\cdot}031578 . a^{-2} = 209 \times {\cdot}0001735 . a^{-2}$$
$$= {\cdot}03626 . a^{-2};$$

and for required equation of the surface we have (taking $a = 1$ for brevity)

$$(10)\quad \begin{cases} z = \cdot 03626 \,.\, r^3 \cos 3\varphi - \cdot 001561\, r^9 \cos 9\varphi \\ \;\; = \cdot 03626 \,.\, r^3 (\cos 3\varphi - \cdot 043 \,.\, r^6 \cos 9\varphi). \end{cases}$$

18. To find the equation of the curved edge BEB', take, as in (4),

$$(11)\qquad x = 1 - \frac{z}{\sqrt{2}} = 1 - \xi, \text{ where } \xi \text{ denotes } \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

Substituting in this, for z, its value by (10), with for r its approximate value $\sec\varphi$, we find

$$(12)\qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cdot 03626 \sec^3\varphi \cos 3\varphi - \cdot 001561 \sec^9\varphi \cos 9\varphi)$$

as the equation of the orthogonal projection of the edge, on the plane BCB', with

$$(13)\qquad AN = y = \tan\varphi; \quad \text{and} \quad NP = \xi.$$

The diagram was drawn to represent this projection roughly, as a circular arc, the projection on BCB' of the circular arc of 20° in the plane Q, which, before making the mathematical investigation, I had taken as the form of the arc-edges of the plane quadrilaterals. This would give $1/35$ of CA, for the sagitta, AE; which we now see is somewhat too great. The equation (12), with $y = 0$, gives for the sagitta

$$(14)\qquad AE = \cdot 0245 \times CA,$$

or, say, $1/41$ of CA. The curvature of the projection at any point is to be found by expressing $\sec^3\varphi \cos 3\varphi$ and $\sec^9\varphi \cos 9\varphi$ in terms of $y = \tan\varphi$ and taking d^2/dy^2 of the result.

By taking $\sqrt{3/2}$ instead of $\sqrt{1/2}$ in (12), we have the equation of the arc itself in the plane Q.

19. To judge of the accuracy of our approximation, let us find the greatest inclination of the surface to the plane BCB'. For the tangent of the inclination at (r, φ) we have

$$(15)\qquad \left(\frac{dz^2}{dr^2} + \frac{dz^2}{r^2 d\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \cdot 1088 \,.\, r^2 (1 - 2 \times \cdot 129 \,.\, r^6 \cos 6\varphi + \cdot 129^2 r^{12})^{\frac{1}{2}}.$$

The greatest values of this will be found at the curved bounding edge, for which $r \doteq \sec\varphi$. Thus we find

$$(16)\qquad \left(\frac{dz^2}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{dz^2}{d\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left\{\begin{array}{lll}\cdot 0948, \text{ and therefore inclination} & = & 5^\circ 25' \text{ at } E\\ \cdot 1894, \quad \text{»} \quad\quad \text{»} \quad\quad \text{»} & = & 10^\circ 44' \text{ at } B.\end{array}\right\}$$

Hence we see that the inaccuracy due to neglecting the square of the tangent of the inclination in the mathematical work cannot be large. The exact value of the inclination at E is $\tan^{-1}(-\sqrt{2}) - 120^\circ$, or $5^\circ\ 16'$, which is less by $9'$ than its value by (16).

SUR UN MODE DE TRANSFORMATION DES SURFACES MINIMA

PAR

E. GOURSAT

À PARIS.

1. En interprétant géométriquement les formules de MONGE, M. SOPHUS LIE a rattaché la théorie des surfaces minima à celle des courbes dont les tangentes vont rencontrer le cercle de l'infini, et auxquelles il a donné le nom de *courbes minima.*[1] Bornons-nous d'abord, pour plus de netteté, aux surfaces réelles; il résulte des recherches de M. LIE que la surface minima réelle la plus générale peut être considérée comme le lieu du milieu d'une corde qui joint un point quelconque d'une courbe minima à un point quelconque de la courbe conjuguée.

Soient

$$X = A(t), \qquad Y = B(t), \qquad Z = C(t) \tag{1}$$

les équations d'une courbe minima Γ, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ désignant trois fonctions du paramètre variable t qui vérifient la relation

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0.$$

Les coordonnées d'un point *réel* de la surface minima *réelle* correspondante S seront données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} x &= \Re A(t), \\ y &= \Re B(t), \\ z &= \Re C(t), \end{aligned}\right. \tag{2}$$

[1] S. LIE. *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen:* I. *Projectivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen* (Mathematische Annalen, t. **14**, p. 331; 1878). — II. *Metrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen* (même recueil t. **15**, p. 465; 1879).

le signe $\mathfrak{R}$ indiquant que l'on prend seulement la partie réelle d'une quantité imaginaire; comme t est une variable complexe, les coordonnées x, y, z dépendent bien, comme cela doit être, de deux paramètres réels.

Imaginons maintenant que l'on applique à la courbe minima Γ une transformation qui la change en une nouvelle courbe minima; à cette nouvelle courbe correspondra une autre surface minima réelle dont les relations avec la première surface seront plus ou moins simples, suivant le mode de transformation adopté. Or, parmi les transformations qui changent une courbe minima en une autre courbe minima, il n'en est pas de plus simples que les transformations homographiques qui conservent le cercle de l'infini. Toute transformation de cette nature est équivalente, comme on sait, à une combinaison des trois opérations suivantes: 1° une translation; 2° une transformation homothétique à pôle réel et à module réel ou imaginaire; 3° un déplacement autour d'un point réel. Si on imprime à la courbe Γ une translation dont les composantes suivant les axes soient h, k, l, les coordonnées x, y, z de la surface S seront augmentées respectivement des quantités

$$\mathfrak{R}h, \mathfrak{R}k, \mathfrak{R}l,$$

et la surface aura subi elle-même une translation. La seconde opération a été étudiée en détail; elle donne les surfaces homothétiques des surfaces *associées* à la première.[1] En ce qui concerne les rotations, il y a lieu de distinguer les rotations réelles des rotations imaginaires. Si on applique à une courbe minima une rotation réelle, il est facile de démontrer que la surface minima réelle correspondante subit la même rotation. Il ne reste donc plus qu'à étudier les surfaces que l'on obtient en appliquant à une même courbe minima des rotations imaginaires, et je ne connais sur ce sujet que quelques indications données par M. Lie dans le second Mémoire déjà cité.[2] Le présent travail est consacré à l'étude de ce mode de transformation. Je supposerai toujours qu'on a pris pour origine des coordonnées le point réel autour duquel s'effectue le déplacement.

---

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 1, p. 322 et 457; 1887.

[2] Mathematische Annalen, t. 15, p. 475.

2. Rappelons d'abord la représentation analytique des rotations qui a son origine dans les travaux de RIEMANN et qui a été développée complètement par M. KLEIN. Soient α, β, γ les coordonnées rectangulaires d'un point de la sphère

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \tag{3}$$

on emploie, pour fixer la position de ce point sur la sphère, un nouveau système de coordonnées défini de la manière suivante. La sphère étant une surface du second ordre, on sait que par chaque point passent deux génératrices rectilignes. Ces deux systèmes de génératrices sont déterminés respectivement par les équations

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + i\beta}{1-\gamma} &= \frac{1+\gamma}{\alpha - i\beta} = u, \\ \frac{\alpha - i\beta}{1-\gamma} &= \frac{1+\gamma}{\alpha + i\beta} = -\frac{1}{v}; \end{aligned} \tag{4}$$

nous prendrons u et v pour nouvelles coordonnées du point (α, β, γ) de la sphère. Quand on décrit une génératrice rectiligne, une de ces coordonnées conserve une valeur constante. Des formules (4) on tire inversement:

$$\alpha = \frac{1 - uv}{u - v}, \qquad \beta = i\frac{1 + uv}{u - v}, \qquad \gamma = \frac{u + v}{u - v}. \tag{5}$$

Cela posé, on sait que tout déplacement de la sphère autour de son centre est caractérisé par une certaine substitution linéaire effectuée simultanément sur u et sur v,[1]

$$u = \frac{mu_1 + n}{pu_1 + q}, \qquad v = \frac{mv_1 + n}{pv_1 + q}. \tag{6}$$

Cherchons s'il existe des points réels de la sphère qui viennent coïncider après la rotation avec des points réels. Remarquons pour cela que, si un point de coordonnées (u, v) est réel, u et $-\frac{1}{v}$ sont conjuguées et réciproquement; cela résulte immédiatement des formules (4) et (5). De

[1] Voir, par exemple, DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Chapitre 3, p. 30.

même, pour que le point de coordonnées (u_1, v_1) soit réel, il faut et il suffit que u_1 et $-\frac{1}{v_1}$ soient conjuguées. On aura donc à la fois, en supposant que le point réel (u, v) vienne coïncider avec un point réel (u_1, v_1),

$$uv_0 = -1,$$

$$u_1(v_1)_0 = -1,$$

v_0 et $(v_1)_0$ désignant les imaginaires conjuguées de v et de v_1. Remplaçons dans la seconde relation u_1 et $(v_1)_0$ par leurs valeurs; il vient

$$\frac{(n - qu)(n_0 - q_0 v_0)}{(pu - m)(p_0 v_0 - m_0)} + 1 = 0.$$

Cette relation s'écrit, en remplaçant v_0 par $-\frac{1}{u}$

$$\frac{(n - qu)(n_0 u + q_0)}{(pu - m)(m_0 u + p_0)} - 1 = 0,$$

ou

$$(7) \quad (pm_0 + qn_0)u^2 + (qq_0 + pp_0 - mm_0 - nn_0)u - (p_0 m + q_0 n) = 0.$$

Pour que la rotation considérée soit réelle, il faut évidemment que cette équation (7) se réduise à une identité; on aura alors

$$\frac{p_0}{n} = \frac{-q_0}{m} = \frac{-m_0}{q} = \frac{n_0}{p},$$

et les formules (6) pourront s'écrire

$$(8) \qquad u = \frac{mu_1 + n}{m_0 - n_0 u_1}, \qquad v = \frac{mv_1 + n}{m_0 - n_0 v_1},$$

m_0 et n_0 étant conjuguées de m et de n. Cette forme particulière de substitution, qui convient aux rotations reelles, ne dépend que de trois paramètres réels arbitraires, comme le déplacement réel le plus général autour de l'origine, tandis que la substitution (6) et le déplacement imaginaire le plus général autour de l'origine dépendent de six paramètres réels arbitraires.

Supposons maintenant que l'équation (7) ne se réduise pas à une

identité. Cette équation possèdera deux racines *distinctes* u', u'' et il est aisé de vérifier que ces racines satisfont à la relation

$$u'u_0'' = -1.$$

Les valeurs correspondantes de v seront

$$v' = -\frac{1}{u_0'} = u'',$$

$$v'' = -\frac{1}{u_0''} = u';$$

les deux points réels de coordonnées (u', u''), (u'', u') sont diamétralement opposés, comme on s'en assure aussitôt à l'inspection des formules (5). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Dans tout déplacement imaginaire autour de l'origine, il existe un diamètre réel et un seul qui vient coïncider avec un autre diamètre réel.

Soit AA' le diamètre réel qui vient coïncider avec un autre diamètre réel BB'. Faisons suivre ce déplacement d'une rotation réelle R amenant BB' sur AA'; nous aurons un nouveau déplacement qui ne changera pas le diamètre AA', c'est-à-dire une rotation imaginaire autour de cet axe. Si à ce nouveau déplacement nous ajoutons la rotation R^{-1}, inverse de la rotation R, nous retrouvons évidemment le déplacement primitif. Il suit de là que *toute rotation imaginaire est équivalente à une suite de deux rotations:* 1° *une rotation imaginaire autour d'un axe réel;* 2° *une rotation réelle.*

On pourrait aussi décomposer la rotation imaginaire d'une autre façon, en mettant la première la rotation réelle composante. Enfin, on démontre de la même manière le théorème suivant que je me borne à énoncer: *Toute rotation imaginaire est équivalente à une suite de trois rotations:* 1° *une rotation réelle;* 2° *une rotation imaginaire autour d'un axe réel choisi arbitrairement;* 3° *une nouvelle rotation réelle.*

3. Nous emploierons dans ce qui suit la forme particulière donnée aux formules de Monge par M. Weierstrass; je vais rappeler en quelques mots comment on parvient à cette forme, en partant des idées de M. S. Lie. Puisque les tangentes à une courbe minima rencontrent le cercle imaginaire de l'infini, le plan tangent à la surface développable

formée par ces tangentes sera lui-même tangent au cercle de l'infini. Prenons l'équation de ce plan sous la forme:

$$(9)\qquad (1-u^2)X + i(1+u^2)Y + 2uZ + 4f(u) = 0,$$

u désignant le paramètre variable et $f(u)$ une fonction quelconque de ce paramètre. On aura pour les coordonnées d'un point de l'aréte de rebroussement les expressions suivantes

$$(10)\qquad \begin{cases} X = (1-u^2)f''(u) + 2uf'(u) - 2f(u), \\ Y = i(1+u^2)f''(u) - 2iuf'(u) + 2if(u), \\ Z = 2uf''(u) - 2f'(u), \end{cases}$$

qui peuvent encore s'écrire, en posant $f'''(u) = \mathfrak{F}(u)$,

$$(10')\qquad \begin{cases} X = \int (1-u^2)\mathfrak{F}(u)du, \\ Y = \int i(1+u^2)\mathfrak{F}(u)du, \\ Z = \int 2u\mathfrak{F}(u)du; \end{cases}$$

on obtiendra donc les nappes réelles de la surface minima réelle la plus générale en posant [1]

$$(11)\qquad \begin{cases} x = \Re\int (1-u^2)\mathfrak{F}(u)du, \\ y = \Re\int i(1+u^2)\mathfrak{F}(u)du, \\ z = \Re\int 2u\mathfrak{F}(u)du, \end{cases}$$

$\mathfrak{F}(u)$ désignant une fonction analytique quelconque de u. Rappelons encore que la variable u est, dans le système employé par Riemann, l'affixe du point de la sphère qui est l'image sphérique du point de la surface minima répondant à cette valeur de u.

Imaginons que l'on imprime un déplacement autour de l'origine à la courbe minima représentée par les équations (10) et (10'). Que deviennent les fonctions $f(u)$, $\mathfrak{F}(u)$? La réponse à cette question se trouve dans l'ouvrage déjà cité de M. Darboux (p. 304). J'ai donné aussi une

---

[1] Weierstrass, Monatsberichte der Berliner Akademie, p. 612, 855; 1866.

méthode un peu différente de celle de M. DARBOUX pour traiter la même question, dans un Mémoire *Sur les surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un des polyèdres réguliers.*[1] Il est vrai que je supposais les rotations réelles, mais la méthode reste la même pour les rotations imaginaires. Voici le résultat auquel on est conduit; soit

$$u = \frac{mv + n}{pv + q}$$

la substitution linéaire qui correspond à ce déplacement, et soient $g(v)$ et $\mathfrak{G}(v)$ les fonctions qui remplacent $f(u)$ et $\mathfrak{F}(u)$. On a

$$g(v) = f\left(\frac{mv + n}{pv + q}\right)\frac{(pv + q)^2}{\delta},$$

$$\mathfrak{G}(v) = \mathfrak{F}\left(\frac{mv + n}{pv + q}\right)\frac{\delta^2}{(pv + q)^4},$$

où

$$\delta = mq - np.$$

Supposons d'abord que l'on applique à la courbe Γ un déplacement réel; la surface minima réelle correspondante subira le même déplacement. J'ai admis cette proposition comme évidente dans le Mémoire que je viens de citer; mais il est bien facile de la démontrer en toute rigueur. Soit Γ la courbe minima représentée par les équations (1) et soit Γ'_1 la courbe minima qui s'en déduit par une rotation réelle autour de l'origine. Cette courbe Γ'_1 sera représentée par des équations de la forme

$$\begin{aligned} X_1 &= aX + bY + cZ, \\ Y_1 &= a'X + b'Y + c'Z, \\ Z_1 &= a''X + b''Y + c''Z, \end{aligned}$$

a, b, c, a', etc. étant les coefficients d'une substitution orthogonale, qui par hypothèse sont tous *réels*. La surface minima réelle S_1 que l'on déduit de Γ'_1 sera donnée par les équations

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathfrak{R}X_1 = a\mathfrak{R}X + b\mathfrak{R}Y + c\mathfrak{R}Z, \\ y_1 &= \mathfrak{R}Y_1 = a'\mathfrak{R}X + b'\mathfrak{R}Y + c'\mathfrak{R}Z, \\ z_1 &= \mathfrak{R}Z_1 = a''\mathfrak{R}X + b''\mathfrak{R}Y + c''\mathfrak{R}Z, \end{aligned}$$

[1] Annales de l'Ecole Normale supérieure, 3ème série, t. 4, p. 251; 1887.

ou encore

$$x_1 = ax + by + cz,$$
$$y_1 = a'x + b'y + c'z,$$
$$z_1 = a''x + b''y + c''z;$$

ces formules mettent en évidence le résultat annoncé. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Si on remplace dans les formules (11) $\mathfrak{F}(u)$ *par*

$$\mathfrak{F}\left(\frac{mu + n}{m_0 - n_0 u}\right)\frac{(mm_0 + nn_0)^2}{(m_0 - n_0 u)^4},$$

m_0 *et* n_0 *désignant les imaginaires conjuguées de* m *et de* n, *les nouvelles formules représentent la même surface minima rapportée à des axes différents.*

4. Il ne nous reste plus qu'à étudier l'effet d'un déplacement imaginaire appliqué à la courbe minima. D'après les propositions combinées des paragraphes 2 et 3, nous pouvons même nous borner à considérer l'effet d'une rotation autour d'un diamètre réel de la sphère. Supposons que nous ayons pris ce diamètre pour axe des z; alors la substitution correspondante à cette rotation sera de la forme

$$u = ke^{\theta i}u_1,$$

k et θ étant réels (on peut même supposer $k > 0$). Cette rotation peut encore être décomposée en deux: 1° une rotation réelle d'un angle θ autour de Oz; 2° une rotation imaginaire caractérisée par la substitution

$$u = ku_1,$$

ces deux rotations pouvant d'ailleurs être effectuées dans l'ordre qu'on voudra. Comme la rotation réelle ne fait que déplacer la surface minima, nous n'avons en définitive qu'à examiner la rotation imaginaire définie par la substitution

$$u = ku_1,$$

où k est réel et différent de ± 1.

Soient $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les coordonnées rectilignes de deux posi-

tions correspondantes du même point avant et après le déplacement. On a d'une manière générale

$$\alpha_1 = a\alpha + a'\beta + a''\gamma,$$
$$\beta_1 = b\alpha + b'\beta + b''\gamma,$$
$$\gamma_1 = c\alpha + c'\beta + c''\gamma,$$

$a, b, c, a', \dots$ étant les coefficients d'une substitution orthogonale dont on trouvera les valeurs en fonction de m, n, p, q à la page 34 de l'ouvrage de M. DARBOUX. Dans le cas actuel, ces valeurs s'obtiennent bien aisément. On a en effet, d'après les formules (5),

$$\alpha_1 = \frac{1 - u_1 v_1}{u_1 - v_1}, \qquad \beta_1 = \frac{i(1 + u_1 v_1)}{u_1 - v_1}, \qquad \gamma_1 = \frac{u_1 + v_1}{u_1 - v_1},$$

ou, en remplaçant u_1 par $\frac{u}{k}$ et v_1 par $\frac{v}{k}$,

$$\alpha_1 = \frac{k^2 - uv}{k(u - v)}, \qquad \beta_1 = \frac{i(k^2 + uv)}{k(u - v)}, \qquad \gamma_1 = \frac{u + v}{u - v};$$

éliminons u et v entre ces équations et les équations (5), il vient:

$$\alpha_1 = \frac{1 + k^2}{2k}\alpha - i\frac{k^2 - 1}{2k}\beta,$$

$$\beta_1 = \frac{1 + k^2}{2k}\beta + i\frac{k^2 - 1}{2k}\alpha,$$

$$\gamma_1 = \gamma.$$

Les coefficients $a, b, c, a', \dots$ auront par conséquent les valeurs suivantes:

$$a = \frac{1 + k^2}{2k}, \qquad a' = -i\frac{k^2 - 1}{2k}, \qquad a'' = 0,$$

$$b = i\frac{k^2 - 1}{2k}, \qquad b' = \frac{1 + k^2}{2k}, \qquad b'' = 0,$$

$$c = 0, \qquad c' = 0, \qquad c'' = 1.$$

Appliquons la rotation précédente à la courbe minima Γ représentée par

les équations (1); nous obtenons une nouvelle courbe minima Γ_1 représentée par les équations:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1+k^2}{2k}A(t) - i\frac{k^2-1}{2k}B(t), \\ Y_1 = i\frac{k^2-1}{2k}A(t) + \frac{1+k^2}{2k}B(t), \\ Z_1 = C(t). \end{cases}$$

Soient S et S_1 les surfaces minima réelles qui correspondent respectivement aux courbes Γ et Γ_1, S_0 la surface *adjointe* à S; désignons par x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_0, y_0, z_0 les coordonnées de trois points correspondants de ces trois surfaces, c'est-à-dire de trois points qui correspondent à une même valeur de t. Les coordonnées d'un point réel de la surface adjointe S_0 sont données, comme on sait, par les formules

$$x_0 = \Re iA(t), \qquad y_0 = \Re iB(t), \qquad z_0 = \Re iC(t); \tag{12}$$

on aura pour expressions des coordonnées d'un point de S_1

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1+k^2}{2k}\Re A(t) - \frac{k^2-1}{2k}\Re iB(t), \\ y_1 = \frac{1+k^2}{2k}\Re B(t) + \frac{k^2-1}{2k}\Re iA(t), \\ z_1 = \Re C(t). \end{cases}$$

Entre ces dernières formules et les formules (2) et (12) éliminons

$$\Re A(t),\ \Re B(t),\ \Re C(t),\ \Re iA(t),\ \Re iB(t),\ \Re iC(t);$$

on arrive aux expressions suivantes pour les coordonnées d'un point de la surface S_1:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1+k^2}{2k}x - \frac{k^2-1}{2k}y_0, \\ y_1 = \frac{1+k^2}{2k}y + \frac{k^2-1}{2k}x_0, \\ z_1 = z. \end{cases} \tag{13}$$

Si k est positif, ce qu'on peut toujours supposer, on posera $k = e^{\varphi}$, et les formules pourront s'écrire

$$(14)\qquad \begin{cases} x_1 = x\cosh\varphi - y_0 \sinh\varphi, \\ y_1 = y\cosh\varphi + x_0\sinh\varphi, \\ z_1 = z. \end{cases}$$

Il me paraît intéressant de faire remarquer l'analogie curieuse que présentent ces formules avec les formules qui définissent une rotation, dans le sens ordinaire du mot, autour de l'axe des z. Cette analogie est d'ailleurs purement formelle.

On arrive rapidement au même résultat au moyen des formules de M. Weierstrass. Si la courbe minima Γ a pour fonction caractéristique $\mathfrak{F}(u)$, la courbe Γ_1' aura pour fonction caractéristique $k^2\mathfrak{F}(ku)$ et les trois surfaces S, S_0, S_1 seront données respectivement par les groupes de formules ci-dessous:

$$S \begin{cases} x = \Re\int(1-u^2)\mathfrak{F}(u)\,du, \\ y = \Re\int i(1+u^2)\mathfrak{F}(u)\,du, \\ z = \Re\int 2u\mathfrak{F}(u)\,du; \end{cases}$$

$$S_0 \begin{cases} x_0 = \Re\int i(1-u^2)\mathfrak{F}(u)\,du, \\ y_0 = \Re\int -(1+u^2)\mathfrak{F}(u)\,du, \\ z_0 = \Re\int 2iu\mathfrak{F}(u)\,du; \end{cases}$$

$$S_1 \begin{cases} x_1 = \Re\int(1-v^2)k^2\mathfrak{F}(kv)\,dv, \\ y_1 = \Re\int i(1+v^2)k^2\mathfrak{F}(kv)\,dv, \\ z_1 = \Re\int 2vk^2\mathfrak{F}(kv)\,dv. \end{cases}$$

Des deux premiers groupes on tire

$$\Re\int \mathfrak{F}(u)\,du = \frac{x-y_0}{2}, \qquad \Re\int u^2\mathfrak{F}(u)\,du = -\frac{x+y_0}{2},$$

$$\Re\int i\mathfrak{F}(u)\,du = \frac{x_0+y}{2}, \qquad \Re\int iu^2\mathfrak{F}(u)\,du = \frac{y-x_0}{2};$$

les expressions des coordonnées x_1, y_1, z_1 peuvent encore s'écrire, en posant $kv = u$,

$$x_1 = k\Re\int \mathfrak{F}(u)du - \frac{1}{k}\Re\int u^2\mathfrak{F}(u)du,$$

$$y_1 = k\Re\int i\mathfrak{F}(u)du + \frac{1}{k}\Re\int iu^2\mathfrak{F}(u)du,$$

$$z_1 = \Re\int 2u\mathfrak{F}(u)du,$$

et, en éliminant les intégrales, on retrouve précisément les formules (13).

Pour abréger le langage, je dirai que la surface S_1 est une surface *dérivée* de S; j'appellerai l'axe réel autour duquel s'effectue la rotation de la courbe minima *l' axe de dérivation* et la constante réelle *k paramètre de dérivation*. Si on se donne la surface S, l'axe et le paramètre de dérivation, la surface dérivée S_1 n'est pas entièrement déterminée; on sait en effet que la surface adjointe d'une surface minima donnée n'est pas complètement définie de position. Cette surface peut subir une translation quelconque ou être remplacée par sa symétrique relativement à l'origine des coordonnées. Lorsque la surface S_0 subit une translation, les formules (14) nous montrent qu'il en est de même de la surface S_1. Si x_0, y_0, z_0 changent de signe, cela revient à changer le signe de φ dans ces formules. On voit de même que, si l'axe de dérivation se déplace parallèlement à lui-même, la surface S_1 subit aussi une translation. Par conséquent, si on fait abstraction d'une translation quelconque, les surfaces dérivées d'une surface minima donnée dépendent de trois constantes réelles seulement, le paramètre de dérivation et les deux constantes réelles qui déterminent la direction de l'axe de dérivation.

5. Considérons le groupe des transformations homographiques qui conservent le cercle de l'infini; les coefficients d'une transformation de ce groupe dépendent de *quatorze* paramètres réels arbitraires. Ces transformations appliquées à une même courbe minima donneront naissance à une infinité de surfaces minima réelles; nous dirons que ces surfaces appartiennent à une même *famille*. Il est aisé de compter les paramètres dont dépendent les surfaces d'une même famille. Nous avons d'abord les six constantes réelles provenant du déplacement réel le plus général; nous avons ensuite les trois paramètres réels dont dépendent les surfaces

dérivées. Enfin, quand on passe d'une surface minima à une surface homothétique d'une surface associée à la première, on introduit encore deux paramètres réels. Cela nous fait en tout *onze* paramètres réels, au lieu de quatorze dont dépend la transformation homographique la plus générale qui conserve le cercle de l'infini. On se rend compte de cette différence en remarquant qu'il existe une infinité de transformations homographiques, dépendant de trois constantes réelles, que l'on peut appliquer à une courbe minima Γ, sans changer la surface minima correspondante: ce sont les translations dont les composantes suivant les axes sont complètement imaginaires.

La fonction caractéristique de M. Weierstrass $\mathfrak{F}(u)$ restant la même pour une surface minima quand on lui fait subir une translation quelconque, il est naturel de faire abstraction d'un déplacement de ce genre; c'est ce que nous ferons désormais. Alors les surfaces minima d'une même famille ne dépendront plus que de *huit* paramètres réels. Les fonctions caractéristiques seront comprises dans la forme générale

$$\frac{A}{(pu+q)^4}\,\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right),$$

A, m, n, p, q étant des constantes quelconques. Parmi ce groupe de surfaces il y a lieu de distinguer des sous-groupes très-importants formés par les surfaces dérivées de l'une d'elles, déplacées en outre d'une façon arbitraire. Par exemple, si une surface a pour fonction caractéristique $\mathfrak{F}(u)$, les fonctions caractéristiques du sous-groupe auquel elle appartient seront de la forme

$$\frac{(mq-np)^2}{(pu+q)^4}\,\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right).$$

Il peut arriver que les surfaces d'une même famille ne dépendent pas de huit paramètres distincts; c'est une question qui sera examinée en détail plus loin.

Appelons *déformation* l'opération par laquelle on passe d'une surface minima à une surface minima associée, et *dilatation* l'opération par laquelle on passe d'une surface à une surface homothétique. Pour passer d'une surface minima à une surface homothétique ou à une surface associée on multiplie la fonction caractéristique par un facteur réel a ou par un facteur

de la forme $e^{\theta i}$, θ étant réel; j'appellerai a le *paramètre de dilatation* et θ le *paramètre de déformation*. Il est clair que la dilatation, la déformation et la dérivation sont trois opérations commutatives. En particulier, toute surface associée à une surface dérivée de S est identique à la surface dérivée de la surface associée à S, les paramètres de dérivation et de déformation restant les mêmes dans les deux cas.

6. Je me propose d'étudier dans ce paragraphe les principales propriétés de la surface dérivée S_1 représentée par les équations (14),

$$(14) \qquad \begin{cases} x_1 = x \cosh\varphi - y_0 \sinh\varphi, \\ y_1 = y\cosh\varphi + x_0 \sinh\varphi, \\ z_1 = z; \end{cases}$$

on en tire

$$dx_1 = dx\cosh\varphi - dy_0 \sinh\varphi,$$
$$dy_1 = dy\cosh\varphi + dx_0 \sinh\varphi,$$
$$dz_1 = dz.$$

Or on a[1]

$$dx_0 = \beta dz - \gamma dy, \qquad dy_0 = \gamma dx - \alpha dz, \qquad dz_0 = \alpha dy - \beta dx,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs d'une direction convenable sur la normale à la surface S. Remplaçons dans les formules précédentes dx_0 et dy_0 par leurs valeurs; il vient

$$(15) \qquad \begin{cases} dx_1 = [\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi]dx + \alpha\sinh\varphi dz, \\ dy_1 = [\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi]dy + \beta\sinh\varphi dz, \\ dz_1 = dz. \end{cases}$$

Si on suppose $dz = 0$, dx_1 et dy_1 sont proportionnels à dx et à dy. Par conséquent, *les sections des deux surfaces S et S_1 par un même plan perpendiculaire à l'axe de dérivation se correspondent point par point de façon*

---

[1] Schwarz, *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen* (Journal für Mathematik, t. **80**, p. 280; 1875).

que les tangentes aux deux sections aux points correspondants soient parallèles.

Soient ds et ds_1 les éléments linéaires des deux surfaces, dA et dA_1 les éléments superficiels. On a

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = [\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi]^2(dx^2 + dy^2)$$
$$+ [1 + (\alpha^2 + \beta^2)\sinh^2\varphi]dz^2 + 2\sinh\varphi[\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi](\alpha dx + \beta dy)dz;$$

en remplaçant $\alpha^2 + \beta^2$ par $1 - \gamma^2$, $\alpha dx + \beta dy$ par $-\gamma dz$ et en réduisant, on trouve

$$ds_1^2 = [\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi]^2 ds^2;$$

comme γ est inférieur à l'unité, $\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi$ est toujours positif et on a en valeur absolue

$$ds_1 = (\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi)ds. \tag{16}$$

Ainsi, *les deux surfaces S et S_1 sont appliquées conformément l'une sur l'autre par le mode de correspondance qui vient d'être établi.* En d'autres termes, deux courbes quelconques tracées sur S se coupent sous le même angle que leurs *images* sur la surface S_1. On déduit de la formule (16) la relation suivante entre les éléments superficiels

$$dA_1 = (\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi)^2 dA. \tag{17}$$

Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les cosinus directeurs de la normale à la surface S_1; en exprimant que l'on a identiquement

$$\alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 + \gamma_1 dz_1 = 0,$$

on trouve aisément

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\gamma\cosh\varphi - \sinh\varphi} = \frac{\pm 1}{\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi},$$

et par suite

$$\begin{cases} \alpha_1 = \pm\dfrac{\alpha}{\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi}, \\ \beta_1 = \pm\dfrac{\beta}{\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi}, \\ \gamma_1 = \pm\dfrac{\gamma\cosh\varphi - \sinh\varphi}{\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi}. \end{cases} \tag{18}$$

Inversement on aura

$$(18') \quad \begin{cases} \alpha = \pm \dfrac{\alpha_1}{\cosh\varphi + \gamma_1 \sinh\varphi}, \\ \beta = \pm \dfrac{\beta_1}{\cosh\varphi + \gamma_1 \sinh\varphi}, \\ \gamma = \pm \dfrac{\gamma_1 \cosh\varphi + \sinh\varphi}{\cosh\varphi + \gamma_1 \sinh\varphi}. \end{cases}$$

Si α, β, γ vérifient une relation linéaire telle que

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + p = 0,$$

l, m, n, p étant des constantes, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ vérifient une relation de même forme et inversement. Par conséquent, *toute courbe de la surface S dont l'image sphérique est un cercle a pour transformée sur la surface S_1 une courbe jouissant de la même propriété, et réciproquement.*

En particulier, si γ est constant, il en sera de même de γ_1. Donc les méridiens et les parallèles de la surface S ont respectivement pour images les méridiens et les parallèles de la surface S_1. Nous appelons avec Minding méridiens d'une surface les courbes pour lesquelles la normale à la surface est parallèle à un plan vertical fixe, et parallèles les courbes pour lesquelles la normale fait un angle constant avec le plan horizontal.

Des valeurs trouvées plus haut pour $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ on déduit la relation

$$d\alpha_1 dx_1 + d\beta_1 dy_1 + d\gamma_1 dz_1 = \pm(d\alpha dx + d\beta dy + d\gamma dz)$$

dont l'interprétation est immédiate. Supposons en effet que le point x, y, z décrive une ligne asymptotique de S; on aura

$$d\alpha dx + d\beta dy + d\gamma dz = 0$$

et par suite

$$d\alpha_1 dx_1 + d\beta_1 dy_1 + d\gamma_1 dz_1 = 0,$$

de sorte que le point x_1, y_1, z_1 décrira aussi une ligne asymptotique de S_1. Comme les lignes de courbure des deux surfaces coupent les lignes asymptotiques sous un angle de 45° et que les angles se conservent dans la transformation, on peut énoncer le théorème suivant;

Les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de S ont respectivement pour transformées les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de S_1.

Si la surface S admet une ligne de courbure plane, la transformée de cette courbe sur la surface S_1 sera encore ligne de courbure de S_1, et son image sphérique sera encore un cercle. Elle sera donc aussi une ligne de courbure plane. De même si la surface S admet une ligne asymptotique hélicoïdale, l'image sphérique de cette courbe sera un petit cercle, et sa transformée sera une ligne asymptotique hélicoïdale de S_1. Donc:

Toute ligne de courbure plane de la surface S se change en une ligne de courbure plane de S_1, et toute ligne asymptotique hélicoïdale se change en une ligne asymptotique hélicoïdale.

Supposons que la surface S soit algébrique; il en sera de même de la surface S_1. D'ailleurs il est clair qu'une transformation homographique, qui conserve le cercle de l'infini, appliquée à une courbe minima, ne change pas l'ordre de la développable formée par les tangentes à cette courbe ni la multiplicité du cercle de l'infini sur cette développable. On a donc le théorème suivant, qui est vrai pour toutes les surfaces d'une même famille et qui a été énoncé par M. Lie.[1]

Etant données deux surfaces minima d'une même famille, si aucune n'est surface double ou si toutes les deux sont surfaces doubles, elles sont de même classe. Si une seule est surface double, sa classe est la moitié de celle de l'autre.

Il n'existe pas de loi aussi simple en ce qui concerne l'ordre de deux surfaces. Considérons par exemple une courbe minima Γ d'ordre m ayant un ou plusieurs points communs à l'infini avec sa conjuguée Γ_0; l'ordre de la surface minima correspondante sera inférieur à m^2. Il est clair qu'en appliquant à la courbe Γ un déplacement imaginaire quelconque la nouvelle courbe Γ_1 n'aura plus, en général, de point commun à l'infini avec sa conjuguée, et l'ordre de la nouvelle surface minima sera bien égal à m^2.

7. La plupart des propriétés qui viennent d'être démontrées s'établissent aussi très aisément au moyen des formules de M. Weierstrass. Afin

[1] Mathematische Annalen, t. **15**, p. 476.

de n'avoir à considérer que des substitutions linéaires homogènes, nous adopterons un nouveau système de formules, dues également à l'illustre géomètre et qui ont été employées aussi par M. Darboux.[1] Dans les formules (11) faisons un changement de variable et introduisons les notations nouvelles

$$u = -\frac{G(t)}{H(t)}, \qquad \mathfrak{F}(u)\,du = -\,iH^2(t)\,dt;$$

les équations de la surface minima S prendront la forme suivante:

$$(19)\qquad \begin{cases} x = \mathfrak{R}\int i[G^2(t) - H^2(t)]\,dt, \\ y = \mathfrak{R}\int [G^2(t) + H^2(t)]\,dt, \\ z = \mathfrak{R}\int 2iG(t)H(t)\,dt. \end{cases}$$

L'élément linéaire sera donné par la formule

$$(20)\qquad ds^2 = 4[G(t)G_0(t_0) + H(t)H_0(t_0)]^2\,dt\,dt_0,$$

$G_0(t_0)$ et $H_0(t_0)$ étant les imaginaires conjuguées de $G(t)$ et de $H(t)$; l'équation différentielle des lignes asymptotiques deviendra

$$(21)\qquad \mathfrak{R}i(HG' - GH')\,dt^2 = 0$$

et celle des lignes de courbure sera de même

$$(22)\qquad \mathfrak{R}(HG' - GH')\,dt^2 = 0.$$

Considérons maintenant une autre surface minima S_1 donnée par les équations

$$(23)\qquad \begin{cases} x_1 = \mathfrak{R}\int i[G_1^2(t) - H_1^2(t)]\,dt, \\ y_1 = \mathfrak{R}\int [G_1^2(t) + H_1^2(t)]\,dt, \\ z_1 = \mathfrak{R}\int 2iG_1(t)H_1(t)\,dt, \end{cases}$$

où on a

$$G_1(t) = aG(t) + bH(t),$$
$$H_1(t) = cG(t) + dH(t),$$

[1] *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, p. 453.

a, b, c, d désignant quatre constantes telles que $ad - bc$ ne soit pas nul. Toutes les surfaces minima ainsi obtenues appartiennent à une même famille; ces surfaces dépendent bien, comme on voit, de huit paramètres réels. Pour avoir le sous-groupe formé par les surfaces dérivées de la surface (19), déplacées d'une façon quelconque, il suffit de supposer

$$ad - bc = 1.$$

Enfin, si la seconde surface se déduit de la première par un simple déplacement, les formules de substitution auront la forme particulière suivante

$$G_1(t) = \frac{m}{\sqrt{\delta}} G(t) - \frac{n}{\sqrt{\delta}} H(t),$$

$$H_1(t) = \frac{n_0}{\sqrt{\delta}} G(t) + \frac{m_0}{\sqrt{\delta}} H(t),$$

m_0 et n_0 étant les imaginaires conjuguées de m et de n, et δ le discriminant $mm_0 + nn_0$.

Prenons le cas général où $ad - bc$ est égal à l'unité, et faisons correspondre les points des deux surfaces S et S_1 qui répondent à une même valeur de t. On aura

$$H_1G_1' - G_1H_1' = HG' - GH';$$

d'où on déduit que les équations différentielles des lignes asymptotiques et des lignes de courbure sont les mêmes pour les deux surfaces. En comparant de même la formule (20) à la formule analogue pour la seconde surface on voit que le rapport $\frac{ds}{ds_1}$ ne dépend que de t.

Les formules qui précèdent permettent de démontrer très simplement la proposition que voici: si l'on considère sur une surface minima un point non singulier, le point correspondant sur toute autre surface de la même famille sera également un point non singulier; si le premier point est un *point de ramification* d'ordre $n - 2$, il en est de même du second.

Supposons qu'on ait pris l'axe des z parallèle à la normale à la surface S au point considéré, de façon que la valeur de u soit nulle pour ce point. On pourra toujours choisir la variable t de façon qu'elle

soit nulle aussi pour $u = 0$ et que dans le voisinage de l'origine les fonctions $H(t)$, $G(t)$ aient respectivement les formes suivantes[1]

$$H(t) = P(t),$$
$$G(t) = t^{n-1} P_1(t),$$

$P(t)$ et $P_1(t)$ représentant des séries ordonnées suivant les puissances positives de t et ne s'annulant pas pour $t = 0$, et n un nombre entier positif au moins égal à 2. Cela posé, considérons une surface de la même famille représentée par les équations (23) où on a pris

$$G_1(t) = aG(t) + bH(t),$$
$$H_1(t) = cG(t) + dH(t);$$

faisons subir à cette nouvelle surface un déplacement, ce qui revient à remplacer dans les formules (23) G_1 et H_1 par les nouvelles fonctions G_2 et H_2,

$$G_2(t) = \frac{m}{\sqrt{\delta}} G_1(t) - \frac{n}{\sqrt{\delta}} H_1(t) = \frac{ma - nc}{\sqrt{\delta}} G(t) + \frac{mb - nd}{\sqrt{\delta}} H(t),$$

$$H_2(t) = \frac{n_0}{\sqrt{\delta}} G_1(t) + \frac{m_0}{\sqrt{\delta}} H_1(t) = \frac{n_0 a + m_0 c}{\sqrt{\delta}} G(t) + \frac{n_0 b + m_0 d}{\sqrt{\delta}} H(t).$$

En prenant m et n de façon que $mb - nd = 0$, les fonctions $G_2(t)$ et $H_2(t)$ auront dans le voisinage de l'origine la même forme que les fonctions $G(t)$ et $H(t)$; d'où résulte la proposition annoncée.

8. Revenons à la surface S_1 représentée par les équations (14); si dans ces équations on fait varier le paramètre φ, le point (x_1, y_1) décrit une branche de l'hyperbole ayant pour équation

$$(x_1 x_0 + y_1 y_0)^2 - (x_1 y - y_1 x)^2 = (x x_0 + y y_0)^2,$$

qui se réduit à une droite si l'on a $x x_0 + y y_0 = 0$. Par suite, lorsqu'on fait varier φ de $-\infty$ à $+\infty$, tous les points de la surface variable S_1 décrivent des hyperboles ayant leurs centres sur l'axe des z. Mais il

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, p. 461.

est à remarquer qu'il n'y a qu'une branche de l'hyperbole qui soit décrite; pour avoir la seconde branche il faudrait donner au paramètre k qui figure dans les formules (13) des valeurs négatives.

On est ainsi conduit à se poser la question suivante. Etant données dans un même plan perpendiculaire à l'axe des z deux courbes quelconques C, C_1, peut-on choisir la surface minima S passant par C de façon que l'une de ses dérivées passe par la courbe C_1? Les propriétés obtenues plus haut permettent de répondre par l'affirmative. En effet, faisons correspondre les points des deux courbes C, C_1 où les tangentes sont parallèles, et donnons-nous le paramètre φ. Soient x, y; x_1, y_1 les coordonnées de deux points correspondants sur les courbes C, C_1, $d\sigma$, $d\sigma_1$ les éléments d'arcs correspondants, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{dy_1}{dy} = \frac{d\sigma_1}{d\sigma}.$$

Des formules (14) nous tirons

$$x_0 = \frac{y_1 - y\cosh\varphi}{\sinh\varphi}, \qquad dx_0 = dy\,\frac{\dfrac{d\sigma_1}{d\sigma} - \cosh\varphi}{\sinh\varphi},$$

$$y_0 = \frac{x\cosh\varphi - x_1}{\sinh\varphi}, \qquad dy_0 = -\,dx\,\frac{\dfrac{d\sigma_1}{d\sigma} - \cosh\varphi}{\sinh\varphi};$$

posons encore

$$dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 = dx^2 + dy^2.$$

On en tire

$$dz_0 = d\sigma\sqrt{1 - \gamma^2}, \qquad z_0 = \int\sqrt{1 - \gamma^2}\,d\sigma,$$

où

$$\gamma = \frac{\dfrac{d\sigma_1}{d\sigma} - \cosh\varphi}{\sinh\varphi}.$$

Choisissons le paramètre φ de façon que γ soit inférieur à l'unité; nous déterminons une courbe gauche C_0 décrite par le point de coordonnées x_0, y_0, z_0, telle que les arcs correspondants des deux courbes C, C_0 sont égaux et les éléments correspondants orthogonaux, d'après la rela-

tion $dx dx_0 + dy dy_0 = 0$. Il existe donc une surface minima passant par la courbe C et telle que la courbe correspondante sur la surface adjointe soit précisément C_0. Dans les formules qui donnent cette surface il n'entre qu'une seule quadrature provenant de l'équation qui donne z_0. Si on applique à cette surface S les formules (14), on reconnaît par un calcul inverse du précédent que la surface dérivée S_1 passe par la courbe C_1.

Considérons en particulier une surface S admettant la courbe plane C pour ligne de courbure; γ étant constant le long de cette courbe, le rapport $\frac{ds_1}{ds}$ sera constant d'après la formule (16) et par suite les sections des surfaces dérivées par le plan de la courbe C seront des courbes homothétiques à la première. D'autre part, les formules (18) nous montrent que γ_1 sera constant aussi le long de la courbe C_1. On a donc le théorème suivant:

Si une surface minima S admet une ligne de courbure plane C, les surfaces dérivées de S avec un axe de dérivation perpendiculaire au plan de cette courbe sont coupées par ce plan suivant des lignes de courbure homothétiques à la courbe C.

Ainsi on peut faire dériver les surfaces qui admettent une ligne de courbure plane des surfaces qui admettent pour ligne géodésique une ligne homothétique à celle-là.[1] Pour donner une application de cette propriété, considérons l'alysséide et un axe de dérivation perpendiculaire à un plan méridien; les surfaces dérivées admettront une chaînette pour ligne de courbure plane. Or, comme la dérivation change les lignes de courbure planes en lignes de courbure planes, les nouvelles surfaces auront encore toutes leurs lignes de courbure planes. Ce sont les surfaces trouvées par M. O. Bonnet.[2] Nous voyons que cette seule propriété d'une surface minima d'admettre pour ligne de courbure une chaînette permet d'affirmer que toutes les autres lignes de courbure de la surface sont également des courbes planes.

Si une surface minima admet une ligne de courbure plane C, les surfaces associées coupent un cylindre ayant pour section droite une courbe semblable à C suivant une ligne géodésique et sous un angle

[1] Voir S. Lie, Mathematische Annalen, t. **15**, p. 477.
[2] Comptes rendus, t. **41**, p. 1057; 1855.

constant. Le théorème qui précède rapproché de la remarque faite à la fin du paragraphe 5 nous donne ce nouveau théorème:

Si une surface minima coupe un cylindre suivant une ligne géodésique et sous un angle constant, les surfaces dérivées avec un axe de dérivation parallèle aux génératrices du cylindre coupent un cylindre homothétique au premier suivant une ligne géodésique et sous un angle constant.[1]

En particulier, on peut faire dériver les surfaces qui admettent une ligne asymptotique hélicoïdale des surfaces qui passent par une ligne droite.

9. Lorsqu'une surface minima passe par une droite réelle, on sait que cette droite est un axe de symétrie pour la surface, et de même lorsqu'une surface minima admet une ligne géodésique plane, le plan de cette ligne est un plan de symétrie pour la surface. Ces théorèmes peuvent être généralisés au moyen des surfaces dérivées.

Considérons une surface minima S ayant une ligne de courbure plane C dans le plan des xy; soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations de cette courbe, σ l'arc compté à partir d'un point fixe et ω l'angle constant sous lequel la surface coupe le plan des xy. La courbe correspondante à C sur la surface adjointe S_0 sera une hélice tracée sur un cylindre ayant pour section droite une courbe homothétique à C que l'on aurait fait tourner de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine; soient

$$x_0 = -y\cos\omega, \qquad y_0 = x\cos\omega, \qquad z_0 = \sigma\sin\omega$$

les équations de cette courbe. Posons

$$e^{\varphi} = \frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega};$$

on en tire

$$\cosh\varphi = \frac{1+\cos^2\omega}{1-\cos^2\omega}, \qquad \sinh\varphi = \frac{2\cos\omega}{1-\cos^2\omega}.$$

Le paramètre φ étant choisi de cette façon, considérons la surface S_1

[1] Voir S. Lie, Mathematische Annalen, t. 15, p. 477.

représentée par les équations (14); pour tout point de la courbe C on aura, d'après les valeurs de x_0, y_0,

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = 0.$$

c'est-à-dire que la surface dérivée S_1 passera également par la courbe C. D'autre part, les formules (18) nous donnent, pour les cosinus directeurs de la normale à la nouvelle surface le long de la courbe C,

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \beta_1 = \beta, \qquad \gamma_1 = -\cos\omega;$$

nous voyons que les plans tangents aux deux surfaces S et S_1 en un même point de la courbe C sont symétriques par rapport au plan des xy. Imaginons maintenant que l'on prenne la surface symétrique de S_1 par rapport au plan des xy, la nouvelle surface ainsi obtenue S_1' passera encore par la courbe C et aura le même plan tangent que la surface S tout le long de cette courbe. Donc, d'après une proposition bien connue de la théorie des surfaces minima, les surfaces S et S_1' coïncident. Ainsi:

Lorsqu'une surface minima S admet une ligne de courbure plane située dans un plan P, si on prend la dérivée de la portion de surface située d'un côté du plan P avec un axe de dérivation perpendiculaire à ce plan et un paramètre convenable, puis la surface symétrique de cette dérivée par rapport au plan P, on retrouve la portion de la surface primitive S située de l'autre côté de ce plan.

Cette proposition comprend évidemment comme cas particulier le théorème rappelé plus haut sur les surfaces à lignes géodésiques planes. On fait ainsi correspondre les sections des deux nappes de la surface S équidistantes du plan P et les points de ces deux sections où les tangentes sont parallèles. Il est aisé de trouver comment sont disposés sur la sphère les images sphériques de deux points correspondants M, M' de la surface S. Soient α, β, γ; α', β', γ' les cosinus directeurs des deux normales aux points M et M'. Au moyen des formules (18), nous obtenons les relations:

$$\alpha' = \frac{\alpha \sin^2\omega}{1 + \cos^2\omega - 2\gamma\cos\omega},$$

$$\beta' = \frac{\beta \sin^2\omega}{1 + \cos^2\omega - 2\gamma\cos\omega},$$

$$\gamma' = \frac{2\cos\omega - \gamma(1 + \cos^2\omega)}{1 + \cos^2\omega - 2\gamma\cos\omega};$$

ces relations expriment, il est aisé de le vérifier, que la droite qui joint les deux points $m(\alpha, \beta, \gamma)$ et $m'(\alpha', \beta', \gamma')$ de la sphère va couper l'axe Oz en un point Q de coordonnées $\left(x = y = 0, z = \frac{1}{\cos\omega}\right)$. Ce point Q est précisément le pôle dû petit cercle de la sphère qui est l'image sphérique de la ligne de courbure plane C. On peut donc dire que les images sphériques des deux points M, M' sont symétriques par rapport au petit cercle qui est l'image sphérique de la ligne de courbure plane considérée. J'appelle points *symétriques* par rapport à un petit cercle deux points tels que la droite qui les joint va passer par le pôle du plan de ce cercle.

On a un théorème analogue au précédent pour les surfaces minima qui admettent une ligne asymptotique hélicoïdale. Soient x, y, z les coordonnées d'un point de cette hélice, ω l'angle de la tangente à l'hélice avec le plan horizontal; la courbe correspondante sur la surface adjointe sera une courbe plane représentée par les formules

$$x_0 = -\frac{y}{\cos\omega}, \qquad y_0 = \frac{x}{\cos\omega}.$$

Cela posé, prenons pour le paramètre k qui figure dans les formules (13) la valeur négative

$$k = -e^{\gamma} = -\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega};$$

les formules (14) seront remplacées par les suivantes

$$\begin{aligned} x_1 &= -x\frac{1+\cos^2\omega}{\sin^2\omega} + y_0\frac{2\cos\omega}{\sin^2\omega}, \\ y_1 &= -y\frac{1+\cos^2\omega}{\sin^2\omega} - x_0\frac{2\cos\omega}{\sin^2\omega}, \\ z_1 &= z, \end{aligned}$$

et on aura de même pour les cosinus directeurs de la normale à la nouvelle surface

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{-\alpha\sin^2\omega}{1+\cos^2\omega-2\gamma\cos\omega}, \\ \beta_1 &= \frac{-\beta\sin^2\omega}{1+\cos^2\omega-2\gamma\cos\omega}, \\ \gamma_1 &= \frac{\gamma(1+\cos^2\omega)-2\cos\omega}{1+\cos^2\omega-2\gamma\cos\omega}. \end{aligned}$$

Si on applique ces formules à un point de l'hélice on aura

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = z,$$

$$\alpha_1 = -\alpha, \qquad \beta_1 = -\beta, \qquad \gamma_1 = -\cos\omega;$$

par conséquent la nouvelle surface passe encore par cette hélice et elle admet le même plan tangent que la première tout le long de cette courbe. Donc les deux surfaces se confondent. Ainsi, *lorsqu'une surface minima réelle admet une ligne asymptotique hélicoïdale, les deux nappes de la surface se déduisent l'une de l'autre par une dérivation convenable, l'axe de dérivation étant parallèle aux génératrices du cylindre.* Les points correspondants sont dans un même plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre et les tangentes à la section de la surface par ce plan aux points correspondants sont parallèles. Les images sphériques de ces deux points sont encore symétriques par rapport au petit cercle qui est l'image sphérique de la ligne hélicoïdale.

10. Nous allons appliquer les considérations qui précèdent à quelques surfaces minima. Prenons d'abord la surface du neuvième ordre d'Enneper, que l'on obtient en supposant que la fonction $\mathfrak{F}(u)$ se réduit à une constante réelle; toute surface de la même famille aura une fonction caractéristique de la forme

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{A}{(m + n_0 u)^4}.$$

Ces surfaces dépendent par conséquent de *quatre* constantes réelles seulement. Il est aisé de reconnaître que toutes ces surfaces sont semblables à la surface primitive. En effet, faisons subir à la surface minima ayant pour fonction caractéristique la fonction précédente le déplacement qui correspond à la substitution linéaire

$$u = \frac{mv + n}{m_0 - n_0 v};$$

la fonction caractéristique de la surface minima dans sa nouvelle position se réduira à une constante ae^{bi}, a et b étant réels. La surface est donc homothétique à une surface associée à la surface d'Enneper, et on sait

que cette dernière est superposable à ses associées. Du reste, on se rend compte de ce fait *a priori*, si on remarque que la surface d'ENNEPER est la seule surface minima algébrique à lignes de courbure planes et que, dans une dérivation, les lignes de courbure planes se changent en lignes de courbure planes.

Considérons en second lieu la famille de surfaces minima à laquelle appartient l'alysséide. Si on prend pour axe des z l'axe de l'alysséide, la fonction caractéristique sera $\frac{1}{u^2}$; toute autre surface de la même famille aura une fonction caractéristique de la forme

$$\frac{A}{(u-\alpha)^2(u-\beta)^2}, \quad \text{où} \quad \alpha \gtrless \beta,$$

un des facteurs $u-\alpha$, $u-\beta$ pouvant se réduire à l'unité. Ces surfaces dépendent donc de *six* paramètres arbitraires réels. D'une manière générale, on peut dire que cette famille se compose des surfaces minima, *non algébriques*, à lignes de courbure planes, et des surfaces associées à celles-là. Pour obtenir les surfaces dérivées de l'alysséide, supposons l'axe de dérivation perpendiculaire à un plan méridien et prenons cet axe pour axe des z. Les expressions des coordonnées, d'un point de l'alysséide auront la forme suivante:

$$\begin{cases} x = a\mu, \\ y = a\cos\lambda\cosh\mu, \\ z = a\sin\lambda\cosh\mu, \end{cases}$$

λ et μ étant les paramètres des lignes de courbure. On aura de même pour la surface adjointe

$$\begin{cases} x_0 = a\lambda, \\ y_0 = a\sin\lambda\sinh\mu, \\ z_0 = -a\cos\lambda\sinh\mu. \end{cases}$$

Appliquons à cette surface les formules générales (14); nous trouvons pour les coordonnées d'un point de la surface dérivée

$$\begin{cases} x_1 = a\mu\cosh\varphi - a\sin\lambda\sinh\mu\sinh\varphi, \\ y_1 = a\cos\lambda\cosh\mu\cosh\varphi + a\lambda\sinh\varphi, \\ z_1 = a\sin\lambda\cosh\mu; \end{cases}$$

si on divise par $a\cosh\varphi$ et qu'on pose $\operatorname{tgh}\varphi = h$, ces formules deviennent:

$$\begin{cases} x_1 = \mu - h\sin\lambda\sinh\mu, \\ y_1 = \cos\lambda\cosh\mu + h\lambda, \\ z_1 = \sqrt{1-h^2}\sin\lambda\cosh\mu. \end{cases}$$

Il est aisé de reconnaître qu'elles sont équivalentes aux formules données par M. Darboux (*loc. cit.* p. 315). Le plan tangent a pour équation

$$X\sinh\mu - Y\cos\lambda + Z\left[\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\cosh\mu - \frac{\sin\lambda}{\sqrt{1-h^2}}\right]$$

$$= h\sin\lambda - h\lambda\cos\lambda + \mu\sinh\mu - \cosh\mu.$$

D'une manière générale, proposons-nous de déterminer toutes les familles de surfaces minima qui dépendent de moins de huit paramètres réels. Cela revient à chercher les fonctions $\mathfrak{F}(u)$ telles que les fonctions

$$\frac{A}{(pu+q)^4}\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right),$$

qui paraissent dépendre de quatre constantes complexes, ne dépendent en réalité que d'un moindre nombre de constantes. S'il en est ainsi, la fonction précédente sera identique à elle-même pour une infinité de valeurs des paramètres A, m, n, p, q, formant une suite continue. En particulier on pourra prendre pour ces paramètres des fonctions continues d'une variable t telles que l'on ait identiquement

$$\frac{A}{(pu+q)^4}\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right) = \mathfrak{F}(u),$$

et nous supposerons de plus, pour fixer les idées, que pour la valeur $t = 0$, on a

$$A = m = q = 1, \qquad n = p = 0.$$

Egalons à zéro la dérivée de la fonction précédente par rapport au pa-

ramètre t; il vient, en désignant par A', m', n', p', q' les dérivées de A, m, n, p, q

$$\frac{A'(pu+q)-4A(p'u+q')}{(pu+q)^5}\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right)$$

$$+\frac{A}{(pu+q)^6}[(m'u+n')(pu+q)-(mu+n)(p'u+q')]\mathfrak{F}'\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right)=0.$$

Cette relation est satisfaite identiquement si on a

$$\frac{A'}{4A}=\frac{p'}{p}=\frac{q'}{q}=\frac{m'}{m}=\frac{n'}{n}$$

ou

$$\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A_1^{\frac{1}{4}}}=\frac{p}{p_1}=\frac{q}{q_1}=\frac{m}{m_1}=\frac{n}{n_1},$$

A_1, m_1, n_1, p_1, q_1 étant les valeurs des paramètres pour une valeur particulière t_1 de la variable t. Ce résultat était évident à priori d'après l'homogénéité de la fonction caractéristique. Laissant de côté ce cas singulier, faisons $t=0$ dans la relation précédente; nous voyons que la fonction $\mathfrak{F}(u)$ doit satisfaire à une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)}+\frac{4au+b}{au^2+cu+d}=0,$$

a, b, c, d étant des constantes indépendantes de u. L'intégration ne présente aucune difficulté. Nous distinguerons plusieurs cas:

1°. Soit $a \gtrless 0$; si l'équation

$$au^2+cu+d=0$$

a deux racines distinctes α, β, l'équation pourra s'écrire

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)}-\frac{k}{u-\alpha}+\frac{k+4}{u-\beta}=0,$$

et on en tire

(A) $$\mathfrak{F}(u)=C\frac{(u-\alpha)^k}{(u-\beta)^{k+4}};$$

2°. Soit $a \gtrless 0$; si l'équation $au^2 + cu + d = 0$ a une racine double α, on aura

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)} + \frac{4}{u - \alpha} + \frac{k}{(u - \alpha)^2} = 0.$$

On en tire

(B) $$\mathfrak{F}(u) = \frac{C}{(u - \alpha)^4} e^{\frac{k}{u - \alpha}};$$

3°. Soit $a = 0$, $bc \gtrless 0$. On aura

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)} = \frac{k}{u - \alpha},$$

et par suite

(C) $$\mathfrak{F}(u) = C(u - \alpha)^k;$$

4°. Soit $a = 0$, $c = 0$, $b \gtrless 0$. L'équation différentielle devient

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)} = k,$$

et on en tire

(D) $$\mathfrak{F}(u) = Ce^{ku};$$

5°. Soit $a = 0$, $b = 0$. On aura

(E) $$\mathfrak{F}(u) = C.$$

Il est visible que les formes (C) et (E) ne sont que des cas particuliers de la forme (A)

$$\mathfrak{F}(u) = C \frac{(u - \alpha)^k}{(u - \beta)^{k+4}},$$

qui caractérise la famille de surfaces minima dont fait partie la surface ayant pour fonction caractéristique

$$\mathfrak{F}(u) = u^k;$$

cette dernière surface est applicable, comme on sait, sur une surface de révolution ou sur une surface spirale. Comme cette surface est superposable ou semblable à ses associées, il était certain *a priori* que la famille de surfaces minima dont elle fait partie ne pourrait dépendre de

huit paramètres réels arbitraires. Si k est quelconque, le nombre de ces paramètres sera égal à 6; il s'abaisse jusqu'à 4 pour la surface d'Enneper.

Les formes (B) et (D) sont elles-mêmes des cas particuliers de la forme suivante

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{e^{\frac{mu+n}{pu+q}}}{(pu+q)^4};$$

cette fonction $\mathfrak{F}(u)$ ne dépend que de trois constantes complexes. Elle reprend en effet la même valeur si on remplace m, n, p, q par

$$km + 4kpLk, kn + 4kqLk, kp, kq,$$

k étant une constante quelconque. Si on fait subir à la surface minima qui a pour fonction caractéristique la fonction précédente un déplacement réel convenable, il est facile de démontrer qu'on peut la ramener à avoir pour fonction caractéristique une fonction de la forme

$$\mathfrak{F}(u) = e^{au+b+ci},$$

a, b, c étant réels.

11. Imaginons que nous ayons pris un axe de dérivation quelconque passant par l'origine, faisant avec les axes de coordonnées des angles de cosinus a_i, b_i, c_i et soit φ_i le paramètre de dérivation. Les formules (16) et (17) deviennent

$$(16') \qquad ds_i = [\cosh\varphi_i - (a_i\alpha + b_i\beta + c_i\gamma)\sinh\varphi_i]ds,$$

$$(17') \qquad dA_i = [\cosh\varphi_i - (a_i\alpha + b_i\beta + c_i\gamma)\sinh\varphi_i]^2 dA.$$

Supposons que nous ayons pris cinq surfaces dérivées d'une même surface S, avec des axes et des paramètres de dérivation quelconques. Entre les cinq formules analogues à la formule (16') nous pourrons éliminer $\alpha, \beta, \gamma, ds$; par suite, *entre les longueurs des arcs correspondants de ces cinq surfaces il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants.* Il peut arriver d'ailleurs qu'on ait une relation de cette espèce en prenant moins de cinq surfaces. Considérons par exemple quatre surfaces dérivées d'une même surface par rapport à quatre axes situés dans un même plan que nous prendrons pour plan des xz; les formules analogues à la formule (16') ne contiendront plus que α et γ et, en éliminant α, γ

et ds on aura une relation linéaire et homogène entre les longueurs des arcs correspondants de ces quatre surfaces.

Prenons encore trois surfaces dérivées de la première suivant un même axe, que nous prendrons pour axe des z; on aura les trois relations

$$ds_1 = [\cosh\varphi_1 - \gamma\sinh\varphi_1]ds,$$
$$ds_2 = [\cosh\varphi_2 - \gamma\sinh\varphi_2]ds,$$
$$ds_3 = [\cosh\varphi_3 - \gamma\sinh\varphi_3]ds.$$

On en déduit

$$\sinh(\varphi_2 - \varphi_3)ds_1 + \sinh(\varphi_3 - \varphi_1)ds_2 + \sinh(\varphi_1 - \varphi_2)ds_3 = 0$$

et par suite

$$s_1\sinh(\varphi_2 - \varphi_3) + s_2\sinh(\varphi_3 - \varphi_1) + s_3\sinh(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

On verra de même, en partant de la formule (17'), qu'il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants entre les aires correspondantes: 1° de *dix* surfaces dérivées, lorsque les axes et les paramètres de dérivation sont quelconques; 2° de *sept* surfaces, lorsque les axes sont dans un même plan; 3° de *quatre* surfaces dérivées suivant un même axe.

12. La plupart des considérations précédentes s'appliquent, avec quelques changements, aux surfaces minima imaginaires. Soient Γ, Γ_1 deux courbes minima quelconques représentées par les équations

$$\Gamma\begin{cases}X = 2A(t),\\ Y = 2B(t),\\ Z = 2C(t),\end{cases}\qquad \Gamma_1\begin{cases}X_1 = 2A_1(\tau),\\ Y_1 = 2B_1(\tau),\\ Z_1 = 2C_1(\tau),\end{cases}$$

et soit S la surface minima, en général imaginaire, qui est le lieu des milieux des cordes joignant un point de Γ à un point de Γ_1, surface représentée par les équations

$$S\begin{cases}x = A(t) + A_1(\tau),\\ y = B(t) + B_1(\tau),\\ z = C(t) + C_1(\tau).\end{cases}$$

Supposons que l'on applique à la courbe Γ une transformation homographique conservant le cercle de l'infini, et une autre transformation de même nature à la courbe Γ_1. On obtient deux autres courbes minima Γ', Γ'_1;

$$\Gamma' \begin{cases} X' = 2\mathfrak{A}(t), \\ Y' = 2\mathfrak{B}(t), \\ Z' = 2\mathfrak{C}(t), \end{cases} \qquad \Gamma'_1 \begin{cases} X'_1 = 2\mathfrak{A}_1(\tau), \\ Y'_1 = 2\mathfrak{B}_1(\tau), \\ Z'_1 = 2\mathfrak{C}_1(\tau), \end{cases}$$

et une nouvelle surface minima S' représentée par les équations

$$S' \begin{cases} x' = \mathfrak{A}(t) + \mathfrak{A}_1(\tau), \\ y' = \mathfrak{B}(t) + \mathfrak{B}_1(\tau), \\ z' = \mathfrak{C}(t) + \mathfrak{C}_1(\tau). \end{cases}$$

Nous venons d'étudier le cas où les deux courbes Γ, Γ_1 sont imaginaires conjuguées et où on applique à ces deux courbes des déplacements imaginaires conjugués. Considérons maintenant le cas général; nous allons voir que *les coordonnées d'un point de la surface S' s'expriment linéairement au moyen des coordonnées de deux points correspondants de la surface S et de la surface adjointe S_0.*

On a pour expressions des coordonnées d'un point de S_0

$$S_0 \begin{cases} x_0 = i[A(t) - A_1(\tau)], \\ y_0 = i[B(t) - B_1(\tau)], \\ z_0 = i[C(t) - C_1(\tau)], \end{cases}$$

et par suite

$$\begin{aligned} x - ix_0 &= 2A(t), & x + ix_0 &= 2A_1(\tau), \\ y - iy_0 &= 2B(t), & y + iy_0 &= 2B_1(\tau), \\ z - iz_0 &= 2C(t), & z + iz_0 &= 2C_1(\tau). \end{aligned}$$

D'ailleurs $\mathfrak{A}(t)$, $\mathfrak{B}(t)$, $\mathfrak{C}(t)$ sont des fonctions linéaires à coefficients constants de $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$; de même $\mathfrak{A}_1(\tau)$, $\mathfrak{B}_1(\tau)$, $\mathfrak{C}_1(\tau)$ sont des fonctions linéaires à coefficients constants de $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$. Par suite x', y', z' s'exprimeront linéairement au moyen de x, y, z, x_0, y_0, z_0.

Je suppose maintenant que les deux transformations appliquées aux courbes Γ, Γ_1 se réduisent à deux déplacements indépendants l'un de l'autre. Faisons correspondre les points des deux surfaces S, S' qui répondent aux mêmes valeurs de t et de τ; alors *les lignes de courbure et les lignes asymptotiques se correspondent respectivement sur ces deux surfaces.* On le démontre facilement en prenant les équations de ces surfaces sous la forme générale qui précède. Désignons pour abréger par $A', B', C', A'', B'', C''$; $A_1', B_1', C_1', A_1'', B_1'', C_1''$ les dérivées de A, B, C; A_1, B_1, C_1 prises par rapport à t et à τ respectivement. Des relations

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 0,$$
$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0$$

on tire

$$\frac{A'}{B'C'' - C'B''} = \frac{B'}{C'A'' - A'C''} = \frac{C'}{A'B'' - B'A''};$$

posons

$$I(t) = \frac{A'B'' - B'A''}{C'} = \frac{B'C'' - C'B''}{A'} = \frac{C'A'' - A'C''}{B'}.$$

Soient

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}$$

les coefficients d'une substitution orthogonale de déterminant $+1$; des égalités précédentes on tire

$$I(t) = \frac{(a'b'' - b'a'')(A'B'' - B'A'') + (b'c'' - c'b'')(B'C'' - C'B'') + (c'a'' - a'c'')(C'A'' - A'C'')}{aA' + bB' + cC'}$$

$$= \frac{(a'A' + b'B' + c'C')(a''A'' + b''B'' + c''C'') - (a''A' + b''B' + c''C')(a'A'' + b'B'' + c'C'')}{aA' + bB' + cC'}.$$

On voit donc que $I(t)$ est un invariant relativement à toute substitution orthogonale de déterminant $+1$ effectuée sur les fonctions A, B, C. De même, si on pose

$$I_1(\tau) = \frac{A_1'B_1'' - B_1'A_1''}{C_1'} = \frac{B_1'C_1'' - C_1'B_1''}{A_1'} = \frac{C_1'A_1'' - A_1'C_1''}{B_1'},$$

$I_1(\tau)$ sera un invariant relativement à toute substitution orthogonale de déterminant $+1$ effectuée sur les fonctions A_1, B_1, C_1. On sait que l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface S est

$$\begin{vmatrix} A' & A'' & A_1' \\ B' & B'' & B_1' \\ C' & C'' & C_1' \end{vmatrix} dt^2 + \begin{vmatrix} A_1' & A' & A_1'' \\ B_1' & B' & B_1'' \\ C_1' & C' & C_1'' \end{vmatrix} d\tau^2 = 0,$$

ou, en développant et en supprimant le facteur commun $A'A_1' + B'B_1' + C'C_1'$,

$$I(t)dt^2 - I_1(\tau)d\tau^2 = 0.$$

De même l'équation différentielle des lignes de courbure sera

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u & v & w \\ du & dv & dw \end{vmatrix} = 0$$

où

$$u = B'C_1' - C'B_1', \qquad v = C'A_1' - A'C_1', \qquad w = A'B_1' - B'A_1';$$

en développant et réduisant les termes semblables, il vient pour cette équation

$$I(t)dt^2 + I_1(\tau)d\tau^2 = 0.$$

Puisque $I(t)$, $I_1(\tau)$ sont des invariants relativement à toute substitution orthogonale de déterminant $+1$, on voit aussitôt que ces équations sont les mêmes pour les deux surfaces S et S': d'où résulte la proposition générale énoncée plus haut.

Ce théorème se démontre aussi très simplement au moyen des formules de M. Weierstrass. Regardons les deux courbes minima Γ, Γ_1 comme les arêtes de rebroussement des deux développables enveloppes des plans

$$\begin{cases} (1-u^2)X + i(1+u^2)Y + 2uZ + 4f(u) = 0, \\ (1-u_1^2)X - i(1+u_1^2)Y + 2u_1Z + 4f_1(u_1) = 0; \end{cases}$$

la surface minima S sera représentée par les équations

$$\begin{cases} x = \int (1 - u^2)\mathfrak{F}(u)\,du + \int (1 - u_1^2)\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \\ y = \int i(1 + u^2)\mathfrak{F}(u)\,du - \int i(1 + u_1^2)\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \\ z = \int 2u\mathfrak{F}(u)\,du + \int 2u_1\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \end{cases}$$

où

$$\mathfrak{F}(u) = f'''(u), \qquad \mathfrak{F}_1(u) = f_1'''(u_1).$$

Les lignes de courbure et les lignes asymptotiques seront données par les équations différentielles

$$\mathfrak{F}(u)\,du^2 - \mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1^2 = 0,$$

$$\mathfrak{F}(u)\,du^2 + \mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1^2 = 0.$$

Si on suppose maintenant que les courbes Γ, Γ_1 subissent des déplacements, les fonctions $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u_1)$ sont remplacées par des fonctions $\mathfrak{G}(v)$, $\mathfrak{G}_1(v_1)$ de la forme suivante

$$\mathfrak{G}(v) = \mathfrak{F}\left(\frac{mv + n}{pv + q}\right)\frac{(mq - np)^2}{(pv + q)^4},$$

$$\mathfrak{G}_1(v_1) = \mathfrak{F}_1\left(\frac{m_1v_1 + n_1}{p_1v_1 + q_1}\right)\frac{(m_1q_1 - n_1p_1)^2}{(p_1v_1 + q_1)^4},$$

et les équations différentielles des lignes de courbure et des lignes asymptotiques deviennent respectivement

$$\mathfrak{G}(v)\,dv^2 - \mathfrak{G}_1(v_1)\,dv_1^2 = 0,$$

$$\mathfrak{G}(v)\,dv^2 + \mathfrak{G}_1(v_1)\,dv_1^2 = 0;$$

ces équations sont identiques aux premières où l'on aurait fait le changement de variables

$$u = \frac{mv + n}{pv + q}, \qquad u_1 = \frac{m_1v_1 + n_1}{p_1v_1 + q_1}.$$

Nous voyons de plus que, si on connaît l'image sphérique d'une ligne de la première surface, pour avoir l'image sphérique de la ligne corres-

pondante de la seconde surface, il suffit de faire la transformation précédente. Une telle transformation change les cercles en cercles; par suite toute ligne de courbure plane se change en une ligne de courbure plane et toute ligne asymptotique hélicoïdale en une ligne asymptotique hélicoïdale.

Pour donner un exemple de la transformation générale qui précède, reprenons la surface représentée par les équations (14) [§ 6]. Rien n'empêche de supposer que la surface S d'où l'on part est imaginaire ainsi que le paramètre k; les propositions qui ont été démontrées sont encore vraies dans ce cas. La surface S étant considérée comme le lieu des milieux des cordes qui joignent un point d'une courbe minima Γ à un point d'une autre courbe minima Γ_1, on obtiendra la nouvelle surface minima représentée par les équations (14) en faisant subir aux deux courbes Γ, Γ_1 des rotations égales et de sens contraires autour de l'axe Oz. Je dirai encore que la nouvelle surface est dérivée de la première.

13. Nous avons vu au paragraphe 6 que deux surfaces minima dérivées l'une de l'autre jouissaient de la propriété suivante. Si on considère les sections de ces deux surfaces par un même plan perpendiculaire à l'axe de dérivation et qu'on fasse correspondre les points de ces deux sections où les tangentes sont parallèles, on obtient un mode de correspondance entre les deux surfaces tel que l'angle de deux courbes quelconques tracées sur l'une d'elles est égal à l'angle des courbes correspondantes sur l'autre surface. On exprime ce fait en disant que les deux surfaces sont appliquées *conformément* l'une sur l'autre. Cette propriété appartient aussi aux surfaces de révolution. Soit Oz l'axe de la surface et

$$x = \varphi(z)$$

l'équation de la méridienne dans le plan des xz; l'élément linéaire sera donné par la formule

$$ds^2 = \varphi^2(z)d\omega^2 + [1 + \varphi'^2(z)]dz^2,$$

ω désignant l'angle d'un plan méridien avec le plan xOz. Soit maintenant

$$x = \psi(z)$$

la méridienne d'une autre surface de révolution, dont l'élément linéaire sera donné par la formule

$$ds_1^2 = \psi^2(z)\,d\omega^2 + [1 + \psi'^2(z)]\,dz^2.$$

Faisons correspondre les points des deux surfaces qui répondent aux mêmes valeurs de z et de ω; pour que ces deux surfaces soient appliquées conformément l'une sur l'autre, il faut et il suffit que le rapport $\frac{ds_1}{ds}$ ne dépende que de ω et de z, c'est-à-dire que l'on ait

$$(24) \qquad \frac{1 + \varphi'^2(z)}{\varphi^2(z)} = \frac{1 + \psi'^2(z)}{\psi^2(z)}.$$

La première surface étant donnée, on connaîtra la fonction φ et on aura pour déterminer ψ une équation différentielle du premier ordre admettant φ comme intégrale particulière. Il est aisé d'interpréter la relation (24); soient C, C' les deux méridiennes du plan xOz, M et M' deux points de ces courbes situés sur une même parallèle $MM'P$ à l'axe Ox. La formule (24) exprime précisément que la projection de MP sur la normale MN à la courbe C est égale à la projection de $M'P$ sur la normale $M'N'$ à la courbe C'.

Supposons en particulier que la première surface soit un cylindre de révolution; alors $\varphi(z) = a$ et l'équation (24) devient

$$1 + \psi'^2(z) = \frac{\psi^2(z)}{a^2}.$$

L'intégrale générale est

$$x = \psi(z) = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{z-z_0}{a}} + e^{\frac{z_0-z}{a}}\right];$$

elle représente des chaînettes égales tangentes à la droite $x = a$, qui est alors une intégrale singulière. Ceci nous conduit à quelques propriétés curieuses de l'alysséide. Si on considère l'alysséide et le cylindre circonscrit suivant le cercle de gorge et qu'on fasse correspondre les points des deux surfaces situés sur une même droite perpendiculaire à Oz et rencontrant cet axe, les angles se conservent dans ce mode de correspondance. Les lignes asymptotiques de l'alysséide ont pour transformées

des hélices inclinées à $45°$ sur les génératrices du cylindre, de sorte que ces lignes asymptotiques sont à l'intersection de l'alysséide et des hélicoïdes ayant Oz pour axe et égaux à l'hélicoïde adjoint.

Si on développe ensuite la surface du cylindre sur un plan, on obtiendra une carte de la surface de l'alysséide dans laquelle les lignes de courbure seront représentées par deux faisceaux rectangulaires de droites parallèles.

14. Nous sommes ainsi amenés à l'examen de la question suivante de Géométrie, par lequel je vais terminer. Etant données deux surfaces quelconques S, S_1, on prend les sections des deux surfaces par un plan variable parallèle à un plan fixe, et on fait correspondre les points de ces deux sections où les tangentes sont parallèles: dans quels cas obtient-on une application conforme des deux surfaces l'une sur l'autre par ce mode de correspondance?

Je prends le plan fixe pour plan des xy et j'appelle x, y, z; x_1, y_1, z les coordonnées de deux points correspondants des deux surfaces; ces coordonnées sont supposées exprimées en fonction de deux variables indépendantes α, β. D'après l'énoncé du problème, on aura d'abord la relation

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz^2 = k(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{25}$$

D'autre part, le plan tangent à la première surface aura pour équation

$$(X - x)\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}\right) + (Y - y)\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)$$
$$+ (Z - z)\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}\right) = 0,$$

et le coefficient angulaire de la trace de ce plan sur le plan des xy sera

$$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta} - \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial y}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta} - \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial x}{\partial \beta}},$$

et on aura une expression toute pareille pour le plan tangent à la seconde surface. On en tire une nouvelle équation de condition

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}-\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \beta}-\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)=\left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}-\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial y_1}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}-\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)$$

ou, en développant,

$$(26)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y_1}{\partial \beta}-\frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}-\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right) \\ +\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\left[\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \beta}+\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}-\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}-\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y_1}{\partial \beta}\right]=0. \end{cases}$$

Il s'agit de trouver cinq fonctions x, y, x_1, y_1, z des variables α et β vérifiant les relations (25) et (26). Imaginons que nous ayons pris pour variables α et β les paramètres des lignes de longueur nulle de la première surface. L'équation (25) pourra être remplacée par les relations ci-dessous

$$(27)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2=0, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2=0; \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2=0, \\ \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial y_1}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2=0. \end{cases}$$

Posons

$$x=\frac{u+u_0}{2},\qquad x_1=\frac{v+v_0}{2},$$

$$y=i\frac{u_0-u}{2},\qquad y_1=i\frac{v_0-v}{2};$$

d'où

$$u=x+iy,\qquad v=x_1+iy_1,$$

$$u_0=x-iy,\qquad v_0=x_1-iy_1.$$

Des relations (27) et (28) on tire

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial v}{\partial \alpha}\dfrac{\partial v_0}{\partial \alpha} = -\left(\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta} = \dfrac{\partial v}{\partial \beta}\dfrac{\partial v_0}{\partial \beta} = -\left(\dfrac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2. \end{cases}$$

On satisfait aux équations (29) de la façon la plus générale en prenant:

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} = e^{i\varphi}\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial \alpha} = e^{-i\varphi}\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}, \end{cases} \qquad (30')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} = e^{i\omega}\dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial \beta} = e^{-i\omega}\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}, \end{cases}$$

φ et ω étant deux nouvelles fonctions de α et de β. Si on remplace x, y, x_1, y_1 par leurs valeurs dans l'équation de condition (26), elle devient, après quelques réductions faciles,

$$\sin\frac{\omega+\varphi}{2}\left[e^{\frac{i(\omega-\varphi)}{2}}\left\{\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\right\} + e^{\frac{i(\varphi-\omega)}{2}}\left\{\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u_0}{\partial \beta}\right\}\right] = 0.$$

On peut satisfaire à cette équation de deux manières: 1° en prenant $\omega + \varphi = 0$; 2° en posant

$$e^{i(\varphi-\omega)} = -\frac{\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta} + \dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta} + \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}}.$$

Cette dernière solution est illusoire; en effet, on vérifie aisément, en tenant compte des équations (29), que l'on aurait

$$e^{i(\varphi-\omega)} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta}},$$

et les équations (30) nous donneraient

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v_0}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial v_0}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

de sorte que le point x_1, y_1, z décrirait, non pas une surface, mais une courbe, qui serait forcément une courbe minima. Il est aisé de s'expliquer la présence de cette solution étrangère. En effet, si on a une surface quelconque S et une courbe minima quelconque Γ et qu'on fasse correspondre tous les points de la surface S situés dans un plan parallèle au plan xOy au point unique de la courbe Γ situé dans ce plan, il est évident que la relation (25) sera satisfaite puisque on aura

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz^2 = 0.$$

D'autre part les quantités

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial x_1}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial y_1}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

sont identiquement nulles et la relation (26) est vérifiée également.

Nous voyons par conséquent que, pour avoir une véritable solution, il nous faudra prendre

$$\omega + \varphi = 0$$

et les relations (30) et (30′) pourront s'écrire

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} = \lambda \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial \beta} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \end{cases} \qquad (31')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_0}{\partial \alpha} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}, \\[2ex] \dfrac{\partial v_0}{\partial \beta} = \lambda \dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Ecrivons les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \alpha \partial \beta} = \lambda \frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\frac{\partial u_0}{\partial \beta} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha};$$

on en tire les relations

$$(32)\quad \begin{cases} \lambda^2 \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \beta} + \dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \lambda(1-\lambda^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}, \\[2ex] \dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \beta} + \lambda^2 \dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \lambda(1-\lambda^2)\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta}, \end{cases}$$

qui ne contiennent plus que les coordonnées u, u_0 de la première surface. Ces équations admettent toujours les deux solutions $\lambda = \pm 1$. Les surfaces S_1 que l'on obtient ainsi se déduisent de la surface S par une translation parallèle au plan des xy ou par une rotation de 180° autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. Ces solutions étaient d'ailleurs évidentes *a priori*.

On aperçoit immédiatement un autre cas particulier où les équations (32) admettent une infinité d'intégrales: c'est celui où la surface S est une surface minima. On a en effet dans ce cas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta} = 0,$$

et on satisfait aux équations (32) en prenant pour λ une constante quelconque. Des équations (31) on tire alors

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial\alpha\partial\beta} = 0;$$

ce qui nous montre que la seconde surface sera aussi une surface minima. Si on poursuit le calcul, ce qui n'offre aucune difficulté, on reconnaît que la surface S_1 est précisément une surface dérivée de S avec Oz pour axe de dérivation.

Prenons maintenant le cas général; les équations (32) peuvent se simplifier un peu en prenant pour nouvelle inconnue $\lambda^2 = \rho$. Elles deviennent, en les multipliant par 2λ,

$$\left\{\begin{aligned} \rho\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} &= 2\rho(1-\rho)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}, \\ \frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial\beta} + \rho\frac{\partial u_0}{\partial\beta}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} &= 2\rho(1-\rho)\frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta}; \end{aligned}\right.$$

si on résout par rapport à $\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}, \frac{\partial\rho}{\partial\beta}$, on trouve

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} \left[\rho^2\frac{\partial u_0}{\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right]\frac{\partial\rho}{\partial\beta} &= 2\rho(1-\rho)\left[\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial u_0}{\partial\beta} - \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta}\right], \\ \left[\rho^2\frac{\partial u_0}{\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right]\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} &= 2\rho(1-\rho)\left[\rho\frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\right]. \end{aligned}\right.$$

Ecartons le cas où on aurait une solution en prenant

$$\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u_0}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} = 0;$$

on aurait alors

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v_0}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial v_0}{\partial \alpha} = 0$$

et la surface S_1 serait un cylindre ayant ses génératrices parallèles à Oz. Ce cas sera examiné plus loin.

Si l'on veut qu'il y ait une infinité de surfaces S_1 correspondant à une surface donnée S, la condition d'intégrabilité du système (33)

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \beta \partial \alpha}$$

devra être satisfaite identiquement. Le calcul un peu long n'offre aucune difficulté et on est conduit aux conditions suivantes:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}\left[\log \frac{\partial u_0}{\partial \beta}\right] = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}\left[\log \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right], \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}\left[\log \frac{\partial u}{\partial \beta}\right] = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}\left[\log \frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\right], \tag{35}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\frac{\partial u_0}{\partial \beta}\frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta}}{\frac{\partial u}{\partial \alpha}}\right] = \left(\frac{\partial u_0}{\partial \beta}\right)^2 \frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}}{\frac{\partial u_0}{\partial \beta}}\right], \tag{36}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta}}{\frac{\partial u}{\partial \beta}}\right] = \left(\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial u_0}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}}{\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}}\right]. \tag{37}$$

Des relations (34) et (35) on tire

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} &= \varphi(\alpha)\psi(\beta)\frac{\partial u}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \beta} &= \varphi_1(\alpha)\psi_1(\beta)\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

$\varphi(\alpha)$ et $\varphi_1(\alpha)$ ne dépendant que de α, $\psi(\beta)$ et $\psi_1(\beta)$ ne dépendant que de β. Si on porte ces valeurs de $\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial u_0}{\partial \beta}$ dans les formules (29) et qu'on élimine $\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}$, on voit que la fonction z doit vérifier une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\pi_1(\beta)\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \pi(\alpha)\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = F[\Phi(\alpha) + \Psi(\beta)],$$

en posant:

$$\Phi(\alpha) = \int \pi(\alpha)d\alpha, \qquad \Psi(\beta) = \int \pi_1(\beta)d\beta.$$

Comme les variables α et β peuvent toujours être remplacées par deux nouvelles variables ne dépendant respectivement que de chacune des premières, rien n'empêche de supposer que l'on a pris pour variables les fonctions $\Phi(\alpha)$, $\Psi(\beta)$ elles-mêmes. Alors la coordonnée z aura pour expression

$$z = F(\alpha + \beta). \tag{39}$$

On déduit de là une conséquence importante; puisque les lignes

$$\alpha + \beta = Const., \qquad \alpha - \beta = Const.$$

forment sur la surface deux systèmes orthogonaux et isothermes, nous voyons que *les sections de la surface S par des plans parallèles au plan des xy forment un système isotherme.*

Soit

$$f(\alpha + \beta) = -[F'(\alpha + \beta)]^2;$$

les formules (29) deviennent

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial u_0}{\partial \beta} = f(\alpha + \beta). \tag{40}$$

On en déduit

$$\frac{\frac{\partial u_0}{\partial \beta}}{\frac{\partial u}{\partial \alpha}} = \frac{\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}}{\frac{\partial u}{\partial \beta}},$$

et les formules (38) deviennent:

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha} = \varphi(\alpha)\psi(\beta)\dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \beta} = \varphi(\alpha)\psi(\beta)\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

Combinées avec les formules (40), elles donnent

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial u}{\partial \beta} = \dfrac{f(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha)\psi(\beta)}, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta} = \varphi(\alpha)\psi(\beta)f(\alpha+\beta). \end{cases}$$

Des relations (40) on tire

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{f'(\alpha+\beta)}{\frac{\partial u}{\partial \alpha}} - f(\alpha+\beta)\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}}{\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2}$$

$$= \frac{f'(\alpha+\beta)}{\frac{\partial u}{\partial \beta}} - f(\alpha+\beta)\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}}{\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2};$$

on peut satisfaire à cette relation de deux manières: 1° en prenant

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

mais on aurait aussi $\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} = \frac{\partial u_0}{\partial \beta}$ et la surface S se réduirait à une courbe; 2° en posant

$$\frac{f'(\alpha+\beta)}{f(\alpha+\beta)} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\left[\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial \alpha}} + \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial \beta}}\right].$$

La première des équations (42) nous donne aussi

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}}{\frac{\partial u}{\partial \alpha}} + \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}}{\frac{\partial u}{\partial \beta}} = \frac{f'(\alpha+\beta)}{f(\alpha+\beta)} - \frac{\psi'(\beta)}{\psi(\beta)}.$$

Ajoutons membre à membre les équations précédentes; il vient

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta} L\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = \frac{\psi'(\beta)}{\psi(\beta)}.$$

Par conséquent $\frac{\partial u}{\partial \beta}$ sera de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\pi(\alpha+\beta)}{\psi(\beta)};$$

on aura de même

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\pi_1(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha)},$$

les fonctions π, π_1 vérifiant la condition

$$\pi(\alpha+\beta) . \pi_1(\alpha+\beta) = f(\alpha+\beta).$$

On en tire encore

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\pi'(\alpha+\beta)}{\psi(\beta)} = \frac{\pi_1'(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha)};$$

si les fonctions π, π_1 sont des constantes, cette condition est satisfaite identiquement, et on retombe sur le cas déjà considéré des surfaces minima. S'il en est autrement, il faudra que le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\beta)}$ ne dépende que de $\alpha+\beta$, et par suite que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\beta)}\right) = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\beta)}\right),$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{\psi(\beta)} = -\frac{\psi'(\beta)\varphi(\alpha)}{\psi^2(\beta)},$$

ou

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = -\frac{\psi'(\beta)}{\psi(\beta)}.$$

La valeur commune des rapports précédents sera forcément une constante indépendante de α et de β, et on aura

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = m, \qquad \frac{\psi'(\beta)}{\psi(\beta)} = -m;$$

on en tire

$$\varphi(\alpha) = ae^{m\alpha}, \qquad \psi(\beta) = be^{-m\beta},$$

a et b désignant deux nouvelles constantes, et finalement on obtient les formules

$$(43) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} = \dfrac{1}{a} e^{-m\alpha} \pi_1(\alpha + \beta), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \beta} = \dfrac{1}{b} e^{m\beta} \pi(\alpha + \beta); \end{cases}$$

$$(44) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha} = ae^{m\alpha} \pi(\alpha + \beta), \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \beta} = be^{-m\beta} \pi_1(\alpha + \beta), \end{cases}$$

où

$$\pi(\alpha + \beta) . \pi_1(\alpha + \beta) = f(\alpha + \beta).$$

Les relations (40) et (41) sont satisfaites et les conditions d'intégrabilité des deux systèmes (43) et (44) se reduisent à une seule

$$\pi_1'(\alpha + \beta) = \frac{a}{b} e^{m(\alpha+\beta)} \pi'(\alpha + \beta).$$

On vérifie facilement que les autres conditions d'intégrabilité du système (33) sont vérifiées identiquement.

Pour interpréter géométriquement les relations (43) formons l'équation du plan tangent à la surface S

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

On aura

$$A = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{i}{2}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_0}{\partial \beta}\right]$$

$$= \frac{i}{2}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\left[\left(ae^{m\alpha} + \frac{1}{b}e^{m\beta}\right)\pi(\alpha+\beta) - \left(\frac{1}{a}e^{-m\alpha} + be^{-m\beta}\right)\pi_1(\alpha+\beta)\right],$$

$$B = \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial u_0}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\left[\left(\frac{1}{b}e^{m\beta} - ae^{m\alpha}\right)\pi(\alpha+\beta) + \left(be^{-m\beta} - \frac{1}{a}e^{-m\alpha}\right)\pi_1(\alpha+\beta)\right],$$

$$C = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u_0}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\left[\frac{b}{a}e^{-m(\alpha+\beta)}\pi_1^2(\alpha+\beta) - \frac{a}{b}e^{m(\alpha+\beta)}\pi^2(\alpha+\beta)\right].$$

On en tire

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2\left[-4\frac{a}{b}e^{m(\alpha+\beta)}\pi^2(\alpha+\beta) - 4\frac{b}{a}e^{-m(\alpha+\beta)}\pi_1^2(\alpha+\beta) + 8\pi(\alpha+\beta)\pi_1(\alpha+\beta)\right].$$

Nous voyons que C et $A^2 + B^2$, et par suite $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, ne dépendent que de $\alpha+\beta$ ou, ce qui revient au même, de z. Par conséquent, le plan tangent à la surface le long d'une section par un plan parallèle au plan xOy coupe ce plan sous un angle constant. La surface admet une série de lignes de courbure situées dans des plans parallèles; c'est donc une *surface moulure.*

15. Ce point étant démontré, il est commode pour achever le calcul d'employer un autre système de variables indépendantes. Choisissons comme variables la coordonnée z et l'angle α que fait avec Ox la trace du plan tangent sur le plan des xy. L'intersection du plan tangent au point M de coordonnées x, y, z avec le plan $Z = z$ aura pour équation

$$X\cos\alpha + Y\sin\alpha = F(\alpha, z);$$

les coordonnées du point M seront données par les deux équations

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = F(\alpha, z),$$

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = \frac{\partial F}{\partial\alpha};$$

on en tire

$$\begin{cases} x = \cos\alpha F(\alpha, z) - \sin\alpha\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}, \\ y = \sin\alpha F(\alpha, z) + \cos\alpha\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = -\sin\alpha\left[F(\alpha, z) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}\right]d\alpha + \left[\cos\alpha\dfrac{\partial F}{\partial z} - \sin\alpha\dfrac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial z}\right]dz, \\ dy = \quad\cos\alpha\left[F(\alpha, z) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}\right]d\alpha + \left[\sin\alpha\dfrac{\partial F}{\partial z} + \cos\alpha\dfrac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial z}\right]dz, \\ ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left[F(\alpha, z) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}\right]^2 d\alpha^2 \\ \qquad + 2\left[F(\alpha, z) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}\right]\dfrac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial z}d\alpha dz + \left[1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial z}\right)^2\right]dz^2. \end{cases}$$

Sur une surface moulure, les lignes

$$\alpha = Const., \qquad z = Const.$$

forment un système orthogonal. On doit donc avoir

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial z} = 0,$$

et par suite $F(\alpha, z)$ devra être de la forme

$$F(\alpha, z) = f(\alpha) + \varphi(z).$$

L'expression de ds^2 devient

$$ds^2 = [f(\alpha) + f''(\alpha) + \varphi(z)]^2 d\alpha^2 + [1 + \varphi'(z)^2]dz^2.$$

Pour que les courbes $z = Const.$ forment un système isotherme, il faudra

évidemment que le coefficient de $d\alpha^2$ soit le produit d'une fonction de α par une fonction de z. Or cela ne peut arriver que dans deux cas:

1°. Si on a $f(\alpha) + f''(\alpha) = a$; on aura alors

$$f(\alpha) = a + C\cos\alpha + C'\sin\alpha$$

et la trace du plan tangent sur le plan $Z = z$ aura pour équation

$$(X - C)\cos\alpha + (Y - C')\sin\alpha = \varphi(z),$$

en réunissant la constante a à $\varphi(z)$. Cette trace est constamment tangente à un cercle de rayon $\varphi(z)$ ayant son centre au point $x = C$, $y = C'$. La surface est donc une surface de révolution autour de la parallèle à Oz représentée par ces deux équations. Imaginons que nous ayons pris cette droite pour l'axe Oz lui-même; on pourra supposer dans ce qui précède $f(\alpha) = 0$. Considérons ensuite une autre surface dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds_1^2 = [f_1(\alpha) + f_1''(\alpha) + \varphi_1(z)]^2 d\alpha^2 + [1 + \varphi_1'(z)^2]dz^2;$$

le rapport $\frac{ds_1}{ds}$ ne dépendra que de α et de z si on a

$$\left[\frac{f_1(\alpha) + f_1''(\alpha) + \varphi_1(z)}{\varphi(z)}\right]^2 = \frac{1 + \varphi_1'(z)^2}{1 + \varphi'(z)^2}.$$

Pour que cette relation puisse avoir lieu, il faut évidemment que

$$f_1(\alpha) + f_1''(\alpha)$$

se réduise à une constante; on en déduira comme tout-à-l'heure que la seconde surface est une surface de révolution autour d'une droite parallèle à Oz. Si on amène l'axe de cette surface à coïncider avec Oz, on pourra prendre $f_1(\alpha) = 0$, et on retombe sur la relation déjà obtenue directement

$$\frac{1 + \varphi_1'(z)^2}{\varphi_1(z)^2} = \frac{1 + \varphi'(z)^2}{\varphi(z)^2};$$

2°. Les courbes $z = Const.$ forment encore un système isotherme si $\varphi(z)$ est constant, c'est-à-dire si la surface considérée est un cylindre ayant ses génératrices parallèles à Oz. On démontre aisément que la

seconde surface devra être un cylindre égal au premier à moins que le cylindre ne soit de révolution, cas qui a déjà été considéré.

En définitive, il n'y a pas d'autres surfaces jouissant de la propriété géométrique en question que les surfaces minima et les surfaces de révolution.

Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans une note présentée à l'Académie des Sciences le 24 Octobre 1887 (*Comptes rendus*, t. **105**, p. 743).

Paris, Novembre 1887.

ÜBER DIE ENTWICKLUNG COMPLEXER GRÖSSEN IN KETTENBRÜCHE

VON

A. HURWITZ
in KÖNIGSBERG i/Pr.

Es möge (S) ein System von Zahlen bezeichnen, welches die Eigenschaft besitzt, dass die Summe, die Differenz und das Produkt irgend zweier Zahlen des Systems wieder Zahlen des Systems sind.[1] Wenn die complexen Grössen in der üblichen Weise durch die Punkte einer Ebene dargestellt werden, so wird den Zahlen von (S) ein gewisses System von Punkten entsprechen. Ich nehme an, das System (S) sei so beschaffen, dass von diesen Punkten in jedem endlichen Gebiete der Ebene nur eine endliche Anzahl liegt. Daraus folgt, dass ausser der Null keine andere Zahl von (S) existirt, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist. Denn die Potenzen dieser Zahl würden sämmtlich Zahlen von (S) sein und im Innern des um den Nullpunkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises liegen. Eine letzte Voraussetzung, die ich in Betreff des Systems (S) mache, ist die, dass die Zahl 1 dem Systeme angehört.

Von einer Grösse x_0 ausgehend bilde ich nun die Gleichungskette:

$$(1)\qquad x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1},\qquad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2},\qquad x_2 = a_2 + \frac{1}{x},\quad \ldots$$

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}},\quad \ldots$$

[1] Eine Theorie solcher Zahlsysteme ist in den bekannten Arbeiten von KRONECKER und DEDEKIND, vorzugsweise für den Fall algebraischer Zahlen, entwickelt. Vgl. insbesondere das XI. Supplement zu DIRICHLET's Vorlesungen über Zahlentheorie. Dritte Auflage.

Acta mathematica. 11. Imprimé le 6 Mars 1888.

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ irgend welche Zahlen des Systems (S) bedeuten. Ich nehme an, dass sich die Gleichungskette (1) in's Unendliche fortsetzt, und dass alle auftretenden Grössen $x_1, x_2, \ldots$ sowie die Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ endliche Werthe besitzen. Die Elimination von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus den ersten $n+1$ Gleichungen (1) ergiebt die Darstellung von x_0 in Form eines Kettenbruches, welchen ich mit

$$x_0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}) \tag{2}$$

bezeichnen will und über welchen ich folgende Voraussetzungen mache:

(V) *Wenn der n^{te} Näherungsbruch mit*

$$\frac{p_n}{q_n} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{3}$$

bezeichnet, und

$$x_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta_n}{q_n^2} \tag{4}$$

gesetzt wird, so sei der absolute Betrag von θ_n für alle Werthe von n kleiner als eine endliche Grösse ρ, dagegen wachse der absolute Betrag von q_n mit zunehmendem n über alle Grenzen.

Falls alle diese Voraussetzungen zutreffen, lässt sich Folgendes erschliessen:

Erstens; Der in's Unendliche fortgesetzte Kettenbruch

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

convergirt und sein Werth ist x_0. Denn der Gleichung (4) zufolge wird die Differenz $x_0 - \frac{p_n}{q_n}$ unendlich klein, wenn n über alle Grenzen wächst.

Zweitens; Die Grösse x_0 kann nicht gleich dem Quotienten zweier Zahlen r, s des Systems (S) sein. Angenommen nämlich es sei $x_0 = \frac{r}{s}$, so folgt

$$rq_n - sp_n = \frac{s \cdot \theta_n}{q_n}.$$

Mit wachsendem n wird daher $rq_n - sp_n$ dem absoluten Betrage nach

unendlich klein. Wählt man nun n so gross, dass dieser absolute Betrag kleiner ist als 1, so muss

$$rq_n - sp_n = 0$$

sein, weil 0 die *einzige* Zahl des Systems (S) ist, deren absoluter Betrag kleiner ist als 1. Es ist also

$$x_0 = \frac{r}{s} = \frac{p_n}{q_n} = (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit (2) ergiebt $x_{n+1} = \infty$, was der Annahme alle Grössen $x_1, x_2, \ldots$ seien endlich widerstreitet.

Drittens: *Genügt die Grösse x_0 einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten Zahlen des Systems (S) sind, so kommen in der unendlichen Reihe*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

nur eine endliche Anzahl verschiedener Grössen vor.

Ich entwickle, um den Beweis dieses Satzes zu führen, zunächst einige Hülfsformeln. Bekanntlich ist

$$(5) \qquad x_0 = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}},$$

woraus, in Rücksicht auf die Relation

$$(6) \qquad p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1},$$

folgt:

$$(7) \qquad \begin{cases} x_0 - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^n}{q_n^2\left(x_{n+1} + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}, \\[2ex] x_0 - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}^2\left(\dfrac{1}{x_{n+1}} + \dfrac{q_n}{q_{n-1}}\right)}. \end{cases}$$

Vergleicht man diese Formeln mit der Gleichung (4), so ergiebt sich

$$(8) \qquad \begin{cases} x_{n+1} + \dfrac{q_{n-1}}{q_n} = \dfrac{(-1)^n}{\theta_n}, \\[2ex] \dfrac{1}{x_{n+1}} + \dfrac{q_n}{q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\theta_{n-1}}. \end{cases}$$

Daher ist der absolute Betrag sowohl von

$$x_{n+1}+\frac{q_{n-1}}{q_n}, \quad \text{wie von} \quad \frac{1}{x_{n+1}}+\frac{q_n}{q_{n-1}}$$

stets grösser als $\rho' = \frac{1}{\rho}$, wo die Grösse ρ' von Null verschieden ist. Sei nun

$$(9) \qquad Ax^2 + Bx + C = 0$$

die Gleichung, welcher x_0 genügt; sei ferner

$$(10) \qquad B^2 - 4AC = D.$$

Dann ist x_{n+1}, der Gleichung (5) zufolge, Wurzel der Gleichung

$$A(p_n x' + p_{n-1})^2 + B(p_n x' + p_{n-1})(q_n x' + q_{n-1}) + C(q_n x' + q_{n-1})^2 = 0,$$

welche in geordneter Form

$$(11) \qquad A'x'^2 + B'x' + C' = 0$$

lauten möge. Hier bezeichnen A', B', C' Zahlen des Systems (S), und es ist

$$(12) \qquad B'^2 - 4A'C' = D.$$

Bezeichnet nun y_{n+1} die zweite Wurzel von (11), so ist die Grösse

$$(13) \qquad y_0 = \frac{p_n y_{n+1} + p_{n-1}}{q_n y_{n+1} + q_{n-1}}$$

die zweite Wurzel der Gleichung (9). Diese zweite Wurzel y_0 ist von der ersten Wurzel x_0 verschieden, weil andernfalls $y_0 = x_0 = \frac{-B}{2A}$ der Quotient zweier Zahlen des Systems (S) sein würde, was, wie oben gezeigt wurde, nicht sein kann. Aus (13) folgt:

$$y_{n+1} = \frac{q_{n-1} y_0 - p_{n-1}}{-q_n y + p_n} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{(-1)^{n-1}}{-q_n^2 y_0 + p_n q_n},$$

oder, wenn p_n mit Hülfe von (4) eliminirt wird:[1]

$$(14) \qquad y_{n+1} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{(-1)^{n-1}}{q_n^2(x_0 - y_0) - \theta_n}.$$

Da nun $x_0 - y_0$ eine von Null verschiedene Grösse ist, die von n unabhängig ist, so werden in den Gleichungen

$$(15) \qquad y_{n+1} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} + \varepsilon_n, \qquad \frac{1}{y_{n+1}} = -\frac{q_n}{q_{n-1}} + \varepsilon'_n$$

die Grössen ε_n und ε'_n mit wachsenden Werthen von n unendlich klein. Die rechten Seiten der Gleichungen

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \left(x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) - \varepsilon_n$$

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}} = \left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{q_n}{q_{n-1}}\right) - \varepsilon'_n$$

sind daher, wenn n eine bestimmte Grenze überschreitet, dem absoluten Betrage nach grösser als ρ'', wo ρ'' eine um beliebig wenig kleiner als ρ' angenommene Grösse bedeutet.

Durch Auflösung der Gleichung (11) findet man aber

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{\pm\sqrt{D}}{A'}, \qquad \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{\mp\sqrt{D}}{C'},$$

und also ist, von einem bestimmten Werthe von n ab,

$$|A'| < \frac{|\sqrt{D}|}{\rho''}, \qquad |C'| < \frac{|\sqrt{D}|}{\rho''}.$$

Folglich können A', C' und $B' = \sqrt{D + 4A'C'}$, sowie

$$x_{n+1} = \frac{-B' \pm \sqrt{D}}{2A'},$$

[1] Für den Fall der Entwicklung reeller Grössen in Kettenbrüche, deren Theilnenner gewöhnliche reelle positive ganze Zahlen sind, hat Herr Hermite diese Gleichung zum Beweise der periodischen Entwicklung quadratischer Irrationalitäten verwendet. (Bulletin des sciences mathématiques, 2^me^ série, t. 9, pag. 11.)

von diesem Werthe von n ab, nur noch eine endliche Anzahl verschiedener Werthe annehmen. Es sind also in der That, wie behauptet wurde, in der Reihe

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

nur eine endliche Anzahl verschiedener Grössen vorhanden.

Indem ich mich nunmehr den Anwendungen der entwickelten Sätze auf besondere Zahlensysteme (S) zuwende, bemerke ich vorab noch Folgendes: Die Voraussetzungen (V) sind sicher erfüllt, wenn der absolute Betrag von $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ beständig grösser als 1 und der absolute Betrag von $\frac{1}{x_n}$ beständig kleiner als k ist, wo k eine positive Zahl kleiner als 1 bezeichnet. In der That wächst dann der absolute Betrag von q_n, der Ungleichung $|q_n| > |q_{n-1}|$ zufolge, mit n über alle Grenzen, und es ist wegen (8),

$$\left|\frac{1}{\theta_{n-1}}\right| \geqq \left|\frac{q_n}{q_{n-1}}\right| - \left|\frac{1}{x_{n+1}}\right| > 1 - k,$$

also der absolute Betrag von θ_n beständig kleiner als $\frac{1}{1-k}$.

I.

(S) ist das System der complexen ganzen Zahlen $m + ni$.

Es sei $x = u + iv$ eine beliebige complexe Grösse. Ich setze

$$x = a + (u' + iv'),$$

wo die complexe ganze Zahl a so bestimmt werden soll, dass

$$-\frac{1}{2} \leqq u' < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2} \leqq v' < \frac{1}{2}$$

wird. Auf diese Weise wird jeder complexen Grösse x eine bestimmte complexe ganze Zahl a zugeordnet. Bildet man nun, von irgend einer Grösse x_0 ausgehend, die Gleichungskette

$$(16) \quad x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad \ldots, \quad x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \ldots$$

wobei allgemein a_n diejenige complexe ganze Zahl bezeichnet, welche der Grösse x_n zugeordnet ist, so ist zunächst

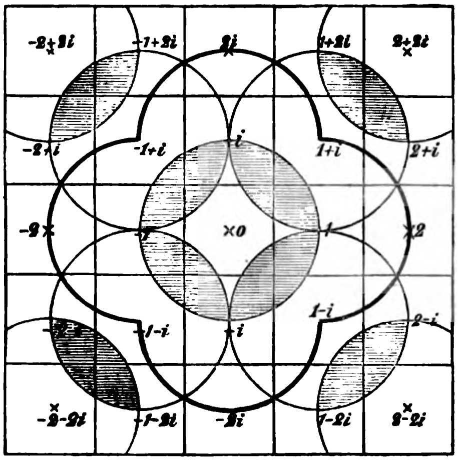
$$(1.7) \qquad \left|\frac{1}{x_n}\right| \leqq \sqrt{\frac{1}{2}}. \qquad {\scriptstyle (n=1,2,3,\ldots)}$$

Der Beweis der Ungleichung $|q_n| > |q_{n-1}|$ ist nicht ganz einfach; er erfordert eine genauere Untersuchung der Zahlenreihe $a_1, a_2, \ldots.$ Behufs dieser Untersuchung zerlege ich die Zahlenebene durch die Geraden

$$u = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots; \qquad v = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$$

in unendlich viele Quadrate. Dann wird jeder Grösse $u + iv$ diejenige complexe ganze Zahl zugeordnet sein, welche den Mittelpunkt des die

Fig. 1.



Grösse $u + iv$ enthaltenden Quadrates bildet, wobei von den Rändern des einzelnen Quadrates nur diejenigen zu dem Quadrate rechnen, welche man vom Mittelpunkte aus nach der Richtung der abnehmenden u, bez. v erblickt. Da $x_0 - a_0$ in dem Quadrate mit dem Mittelpunkte 0 liegt, so wird $x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0}$ dem Raume R angehören, welcher ausserhalb der Kreise $(1), (i), (-1), (-i)$ liegt.[1] Hier habe ich, wie in der Folge stets, mit (a) denjenigen Kreis bezeichnet, welcher den Radius 1 und den

[1] Die Begrenzung von R ist in Figur 1. scharf gezeichnet.

Punkt a zum Mittelpunkt hat. Wie x_1 werden auch $x_2, x_3, \ldots$ in den Raum R fallen, und daher können die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ keinen der Werthe $0, +1, +i, -1, -i$, annehmen. Aber die Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ unterliegt ferner noch gewissen Beschränkungen, welche sich auf die Aufeinanderfolge der Zahlen beziehen. Sei beispielsweise

$$a_n = 2 + i.$$

Dann muss x_n sowohl dem Raume R als auch dem Quadrate mit dem Mittelpunkte $2 + i$ angehören. Folglich kann $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}$ nicht in denjenigen Raum eintreten, welcher aus R von dem Kreise $(-1 + i)$ ausgeschnitten wird. Daher ist die Folge $a_n = 2 + i$, $a_{n+1} = -1 + i$ unmöglich. Man erkennt sofort, dass solche Beschränkungen in der Aufeinanderfolge der Zahlen a immer und nur dann bei der Zahl a_n beginnen werden, wenn das Quadrat mit dem Mittelpunkte a_n von der Begrenzung des Raumes R durchschnitten wird. Für den vorliegenden Zweck genügt es von den Zahlfolgen $a_n, a_{n+1}, \ldots$ die folgenden als unmöglich zu constatiren, was an der Hand von Fig. 1. ohne Schwierigkeit geschieht.

Tabelle unmöglicher Zahlfolgen.

	a_n	a_{n+1}	a_{n+2}	a_{n+3}
I.	$-2, 2i, -1+i, -2+i, -1+2i$	$1+i$		
II.	$2, 2i, 1+i$	$-2+2i$		
III.	$2+i, 1+2i$	$-2+2i$	$1+i$	
IV.	$-2, 2i, -1+i$	$2+2i$		
V.	$-2+i, -1+2i$	$2+2i$	$-2+2i$	$1+i$

Wenn ferner $a_n = 2 + i$ oder $1 + 2i$ ist, und die folgenden Zahlen $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+2k-1}$ haben abwechselnd die Werthe $-2 + 2i$ und $2 + 2i$, so kann a_{n+2k} nicht gleich $1 + i$ sein; ebenso wenn $a_n = -2 + i$ oder $-1 + 2i$ ist und die folgenden Zahlen $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+2k}$ haben abwechselnd die Werthe $2 + 2i$ und $-2 + 2i$, so kann a_{n+2k+1} nicht gleich $1 + i$ sein. Die einfachsten Fälle hierfür sind in der Tabelle unter III. und V. aufgenommen.

Dies vorausgeschickt gehe ich nun zum Beweise der Ungleichung $|q_n| > |q_{n-1}|$ über. Ich setze

$$(18) \qquad k_n = \frac{q_n}{q_{n-1}};$$

dann ist, der Gleichung $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ zufolge:

$$(19) \qquad k_1 = a_1, \qquad k_2 = a_2 + \frac{1}{k_1}, \quad \ldots, \quad k_n = a_n + \frac{1}{k_{n-1}}, \quad \ldots,$$

und es ist zu beweisen, dass beständig

$$(20) \qquad |k_n| > 1$$

ist, oder dass der Punkt k_n beständig ausserhalb des Kreises (0) liegt. Dies trifft nun für k_1 offenbar zu; ich will annehmen, dass $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ der Ungleichung (20) genügen, dagegen k_n nicht mehr und werde zeigen, dass diese Annahme auf einen Widerspruch führt. Da $k_n = a_n + \frac{1}{k_{n-1}}$ im Innern des Kreises (a_n) liegt, so muss a_n einen der Werthe $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$, $-1 - i$ besitzen; denn in allen anderen Fällen würde k_n ausserhalb des Kreises (0) fallen, also der absolute Betrag von k_n grösser als 1 sein. Ich betrachte nun nur den Fall $a_n = 1 + i$, da die drei übrigen Fälle eine ganz analoge Behandlung gestatten.

Da $k_n = a_n + \frac{1}{k_{n-1}}$ im Innern der beiden Kreise $(0)'$ und $(1 + i)$ liegt (den Rand des ersteren Kreises eingeschlossen, was durch das an (0) gesetzte Komma angedeutet werde) so fällt $\frac{1}{k_{n-1}}$ in das Innere der Kreise (0) und $(-1 - i)'$;[1] folglich $k_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{k_{n-2}}$ in das Äussere des Kreises (0) und in das Innere von $(-1 + i)'$. Daher kann a_{n-1} nur einen der Werthe -2, $-2 + i$, $-1 + 2i$, $2i$, $-1 + i$, $-2 + 2i$ besitzen; denn in allen übrigen Fällen wird der Kreis (a_{n-1}), welcher $a_{n-1} + \frac{1}{k_{n-2}}$ in sich aufnimmt, nicht in das Innere des Kreises $(-1 + i)'$ eintreten. Von jenen Werthen ist aber, der aufgestellten Tabelle zufolge, nur der letzte zulässig. Es muss also $a_{n-1} = -2 + 2i$ sein. Da nun $a_{n-1} + \frac{1}{k_{n-2}}$

[1] Die betreffenden Gebiete sind in der Figur 1. schraffirt.

im Innern der beiden Kreise $(-2+2i)$ und $(-1+i)'$ [1] liegt, so folgt weiter, dass $k_{n-2} = a_{n-2} + \frac{1}{k_{n-3}}$ ausserhalb des Kreises (0) und im Innern des Kreises $(1+i)'$ liegt, und hieraus, wieder mit Rücksicht auf die Tabelle, $a_{n-2} = 2 + 2i$. So fortfahrend erkennt man, dass die Zahlen $a_n, a_{n-1}, \ldots$ die Werthe haben müssen:

$$a_n = 1 + i, \quad a_{n-1} = -2 + 2i, \quad a_{n-2} = 2 + 2i,$$
$$a_{n-3} = -2 + 2i, \quad a_{n-4} = 2 + 2i, \quad \ldots .$$

Bildet man aber mit diesen Zahlen die Grössen $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n-1}$, so zeigt sich, dass sie sämmtlich in den unendlichen, von den Kreisen $(1+i), (1-i), (-1+i), (-1-i)$ begrenzten Raum fallen. Daher wird $|k_n| > 1$ sein, was der Annahme widerstreitet. In ganz entsprechender Weise ergiebt sich ein Widerspruch, wenn man voraussetzt a_n habe einen der Werthe $1-i, -1+i, -1-i$.

Hiermit ist ausser Zweifel gesetzt, dass $|k_n|$ beständig grösser als 1, also stets

$$|q_n| > |q_{n-1}|$$

ist. Auf Grund der vorausgeschickten allgemeinen Entwicklungen kann man nunmehr offenbar den folgenden Satz aussprechen:

Man entwickle eine beliebige complexe Grösse x_0 in einen Kettenbruch, indem man

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \quad \ldots$$

setzt, wo die ganze complexe Zahl a_n immer so bestimmt ist, dass sowohl der reelle Bestandtheil, wie auch der Factor von i in der Differenz $x_n - a_n$ zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegt. Dann wird dieser Kettenbruch 1° stets gegen den Werth x_0 convergiren, 2° immer und nur dann abbrechen, wenn x_0 eine complexe rationale Zahl ist, und 3° stets periodisch werden, wenn x_0 einer Gleichung zweiten Grades mit ganzzahligen complexen Coefficienten genügt, ohne Wurzel einer eben solchen Gleichung ersten Grades zu sein.

---

[1] Das betreffende Gebiet ist in der Figur 1. schraffirt.

Ich brauche kaum besonders hervorzuheben, dass auf diesen Satz die Theorie der quadratischen Formen im Gebiete der complexen ganzen Zahlen gegründet werden kann, dass insbesondere aus ihm ohne Weiteres die Lösung der PELL'schen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

folgt, unter D eine gegebene nichtquadratische, unter t und u zu bestimmende complexe ganze Zahlen verstanden.[1]

Ausser der hier betrachteten giebt es übrigens noch andere Kettenbruchentwicklungen im Gebiete der complexen ganzen Zahlen $m + ni$, für welche der obige Satz ebenfalls gilt, worauf ich indessen an dieser Stelle nicht eingehen will.

II.

(S) ist das System der complexen ganzen Zahlen $m + n\rho$ $\left(\rho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$.[2]

Ich verbinde den Punkt 0 mit den umliegenden Punkten $1, 1+\rho, \rho, -1, -1-\rho, -\rho$ und errichte in den Mitten der Verbindungslinien die Lothe. Diese bilden ein reguläres Sechseck mit dem Mittelpunkte 0. (Vgl. Fig. 2.) Von den Randpunkten rechne ich nur die links von der Axe der rein imaginären Zahlen liegenden zu dem Sechseck. Wird in entsprechender Weise um jeden Punkt $m + n\rho$ ein solches Sechseck construirt, so überdeckt die Gesammtheit der letzteren die complexe Zahlenebene einfach und lückenlos. Einer beliebigen complexen Grösse x ordne ich nun diejenige ganze Zahl $m + n\rho$ zu, welche den

[1] Vgl. die Andeutung in DIRICHLET's Abhandlung: *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes.* CRELLE's Journal, Bd. 24, pag. 336.

[2] Der Euclidische Algorithmus für die Zahlen $m + n\rho$, welchen Herr BACHMANN in seinem Buche: *die Lehre von der Kreistheilung* pag. 189 benutzt, ergiebt eine andere Kettenbruchentwicklung wie die, welche ich im Texte definire. Die erstere Entwicklung legt eine Eintheilung der Ebene in Rechtecke zu Grunde, deren Mittelpunkte die ganzen Zahlen $m + n\rho$ sind, deren Seiten den Axen der reellen bez. rein imaginären Zahlen parallel laufen und bez. die Längen 1 und $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ besitzen.

Mittelpunkt des die Grösse x aufnehmenden Sechsecks bildet. Um eine beliebige Grösse x_0 in einen Kettenbruch zu entwickeln setze ich

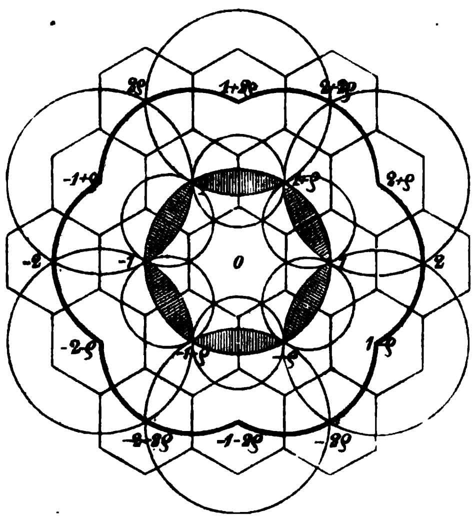
$$(21) \qquad x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \quad \ldots,$$

wobei allgemein a_n die der Grösse x_n zugeordnete Zahl bezeichnet. Da $\frac{1}{x_n}$ in das um den Nullpunkt abgegrenzte Sechseck fällt, so gilt die Ungleichung

$$(22) \qquad \left|\frac{1}{x_n}\right| \leqq \sqrt{\frac{1}{3}}. \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

Um zu beweisen, dass der absolute Betrag von $k_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$ stets grösser ist als 1, bemerke ich zunächst, dass $x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}}$ in den ausserhalb der Kreise $(1), (1+\rho), (\rho), (-1), (-1-\rho), (-\rho)$ liegenden Raum R fällt.[1] Hieraus folgt, dass die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ keinen der Werthe

Fig. 2.



$0, 1, 1+\rho, \rho, -1, -1-\rho, -\rho$ annehmen können. Die Begrenzung des Raumes R durchsetzt, wie aus der Figur 2. ersichtlich ist, zwölf

[1] Die Begrenzung von R ist in Fig. 2. scharf gezeichnet.

Sechsecke. Daher giebt es wieder bestimmte Reihenfolgen der Zahlen $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$, welche in der Gleichungskette (21) nicht vorkommen können. Für den vorliegenden Zweck genügt es zu bemerken, dass die Zahl a_{n+1} nicht den Werth $2+\rho$ erhalten kann, wenn a_n einen der Werthe $-2, \rho-1, 2\rho$ besitzt. Angenommen nun in der Reihe der Grössen

$$(23)\qquad k_1 = a_1 + \frac{1}{k_0}, \qquad k_2 = a_2 + \frac{1}{k_1}, \quad \ldots, \quad k_n = a_n + \frac{1}{k_{n-1}}, \quad \ldots,$$

(wo $k_0 = \infty$, $k_1 = a_1$) sei k_n die erste deren absoluter Betrag nicht grösser ist als 1. Da $a_n + \frac{1}{k_{n-1}}$ im Innern des Kreises (a_n) liegt, so kann a_n nur einen der Werthe

$$2+\rho,\ 1+2\rho,\ \rho-1,\ -2-\rho,\ -1-2\rho,\ -\rho+1$$

haben. Ich knüpfe die weitere Betrachtung an die Annahme

$$a_n = 2+\rho,$$

da die übrigen fünf Fälle auf ganz entsprechende Art erledigt werden können. Ist $a_n = 2+\rho$, so liegt k_n im Innern der Kreise $(0)'$ und $(2+\rho)$, wobei wieder das Komma bedeutet, dass der Rand des betreffenden Kreises mitzurechnen ist. Daher liegt $\frac{1}{k_{n-1}} = k_n - a_n$ im Innern der Kreise (0) und $(-2-\rho)'$, folglich k_{n-1} ausserhalb des Kreises (0) und im Innern oder auf dem Rande desjenigen Kreises, welcher über der Strecke $-1 \ldots \rho$ als Durchmesser beschrieben ist. Da nun

$$k_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{k_{n-2}}$$

im Innern von (a_{n-1}) liegt, so muss a_{n-1} einen der Werthe $-2, \rho-1, 2\rho$ besitzen. Dies ist aber unmöglich, da dann die auf a_{n-1} folgende Zahl a_n nicht gleich $2+\rho$ sein könnte. Da somit die Annahme $|k_n| = \left|\frac{q_n}{q_{n-1}}\right|$ sei $\leqq 1$ auf einen Widerspruch führt, so gilt die Ungleichung

$$(24)\qquad |q_n| > |q_{n-1}|$$

für jeden Werth von n. Aus (22) und (24) folgen nun mit Hülfe der

oben bewiesenen allgemeinen Sätze wieder die fundamentalen Eigenschaften der hier betrachteten Kettenbruchentwicklung:

Die Entwicklung einer complexen Grösse ergiebt stets einen convergenten Kettenbruch, welcher dann und nur dann abbricht, wenn die entwickelte Grösse der Quotient zweier ganzen Zahlen $m + n\rho$ ist, und welcher periodisch wird, wenn die entwickelte Grösse einer irreductibeln quadratischen Gleichung genügt, deren Coefficienten complexe ganze Zahlen der Form $m + n\rho$ sind.

Dieser Satz kann wiederum als Fundament dienen für die Theorie der quadratischen Formen im Gebiete der complexen ganzen Zahlen, welche aus dritten Einheitswurzeln zusammengesetzt sind.

Königsberg i/Pr. den 29. November 1887.

Ausgegeben den 20. März 1888. — Paru le 20 mars 1888.

Inhaltsverzeichniss. Table des matières.

Preis des Bandes: 15 Mark. — Prix par volume: 18,75 francs.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT
HERAUSGEGEBEN
VON

JOURNAL
RÉDIGÉ
PAR

G. MITTAG-LEFFLER

11:3

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1888.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

SUR LES GROUPES TRANSITIFS

DONT LE DEGRÉ EST LE CARRÉ D'UN NOMBRE PREMIER

PAR

L. SYLOW

à FREDERIKSHALD.

Si l'ordre d'un groupe est divisible par une puissance d'un nombre premier, telle que p^m, mais non divisible par p^{m+1}, cet ordre est, comme on le sait, de la forme $p^m\pi(np + 1)$; le groupe en contient un autre de l'ordre $p^m\pi$; celui-ci contient à son tour un troisième groupe, de l'ordre p^m, auquel toutes ses substitutions sont permutables; enfin le nombre des groupes de l'ordre p^m contenus dans le premier groupe est $np + 1$. La détermination complète de ce dernier nombre, dans les divers cas qui peuvent se présenter, serait évidemment d'une grande importance pour la théorie des substitutions; malheureusement elle paraît être d'une extrême difficulté. Mais il sera possible de trouver des résultats plus ou moins intéressants sur la forme du nombre n par rapport aux modules $p, p^2, p^3, \ldots$; à cet effet on n'aura qu'à poursuivre le raisonnement qui m'a servi pour la démonstration du théorème cité (Mathematische Annalen, t. 5). Pour faire un premier pas dans cette direction, je me propose, dans le travail présent, de considérer le cas le plus simple, celui des groupes transitifs du degré p^2.

Je désignerai par G un groupe transitif du degré p^2, par O son ordre, que je supposerai divisible par $p^{\alpha+2}$, mais non divisible par $p^{\alpha+3}$; le nombre α pourra donc avoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$. Je désignerai de plus par I un groupe de l'ordre $p^{\alpha+2}$ contenu dans G, et par H le plus grand groupe contenu dans G dont les substitutions soient

permutables à I. L'ordre du groupe H sera dénoté par $p^{a+2}.\pi$, où par conséquent π est premier à p; on aura donc

$$O = p^{a+2}\pi(np + 1).$$

Je déterminerai dans un premier paragraphe la forme de I, dans un deuxième celle de H; dans les deux paragraphes suivants je m'occuperai du nombre n; enfin dans le dernier je ferai des résultats trouvés quelques applications, qui se présentent au premier coup d'oeil.

§ 1. *Détermination du groupe I.*

1. D'après le lemme de Cauchy le groupe symétrique du degré p^2 contient un certain nombre de groupes de l'ordre p^{p+1}, tous isomorphes entre eux. Notre groupe I est contenu dans un de ces groupes de Cauchy, et en disposant convenablement des indices, nous pouvons choisir ce dernier comme nous voudrons. En désignant les éléments par le symbole

$$u_{x,y},$$

les indices x et y étant pris suivant le module p, nous pouvons donc supposer que les substitutions de I soient contenues dans l'expression

$$\left|\begin{matrix} x & x + a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{p-1} y^{p-1} \\ y & y + b \end{matrix}\right|,$$

qui d'ailleurs peut être remplacée par cette autre

$$\left|\begin{matrix} x & x + a_0 + a_1 y + a_2 (y)_2 + a_3 (y)_3 + \dots + a_{p-1} (y)_{p-1} \\ y & y + b \end{matrix}\right|,$$

où, pour abréger, on a fait

$$(y)_i = \frac{y(y-1)(y-2)\dots(y-i+1)}{1.2.3\dots i}.$$

En posant

$$U = \left|\begin{matrix} x & x + a_0 + a_1 y + a_2 (y)_2 + \dots + a_{p-1} (y)_{p-1} \\ y & y + 1 \end{matrix}\right|,$$

on trouve

$$U^m = \begin{vmatrix} x & x + ma_0 + a_1\{(y+m)_2 - (y)_2\} + \dots + a_{p-2}\{(y+m)_{p-1} - (y)_{p-1}\} + a_{p-1}\sum_0^{m-1}{}_r (y+r)_{p-1} \\ y & y+m \end{vmatrix}.$$

Si l'on fait $m = p$, on a, pour $i \leqq p - 1$,

$$(y + m)_i - y_i \equiv 0 \pmod p,$$

et

$$\sum_0^{m-1}{}_r (y + r)_{p-1} = 1,$$

donc

$$U^p = \begin{vmatrix} x & x + a_{p-1} \\ y & y \end{vmatrix}.$$

Ainsi l'ordre de la substitution U est égal à p ou à p^2 suivant que a_{p-1} est congru à zéro, ou non.

Parmi ces substitutions toutes celles qui ne changent pas l'indice y, sont échangeables entre elles. En faisant

$$S = \begin{vmatrix} x & x + f(y) \\ y & y \end{vmatrix}, \qquad T = \begin{vmatrix} x & x + \varphi(y) \\ y & y + 1 \end{vmatrix},$$

on trouve

$$(1) \qquad T^{-1}ST = \begin{vmatrix} x & x + f(y - 1) \\ y & y \end{vmatrix}, \qquad TST^{-1} = \begin{vmatrix} x & x + f(y + 1) \\ y & y \end{vmatrix},$$

d'où

$$(2) \qquad S^{-1}T^{-1}ST = T^{-1}STS^{-1} = \begin{vmatrix} x & x - \{f(y) - f(y - 1)\} \\ y & y \end{vmatrix},$$

$$(3) \qquad S^{-1}TST^{-1} = TST^{-1}S^{-1} = \begin{vmatrix} x & x + f(y + 1) - f(y) \\ y & y \end{vmatrix},$$

$$(4) \qquad S^{-1}TS = \begin{vmatrix} x & x + f(y + 1) - f(y) + \varphi(y) \\ y & y + 1 \end{vmatrix},$$

2. Le groupe G étant transitif, I le sera également (voir le Mémoire cité plus haut, n° 4); donc I contient des substitutions de chacune des formes S et T du numéro précédent. Or, si β désigne le plus grand degré des fonctions $f(y)$, les formules (2) et (3) font voir que le groupe I contient aussi des substitutions dans lesquelles les fonctions $f(y)$ sont des degrés $\beta - 1$, $\beta - 2$, ..., 1, 0. On en peut conclure qu'on a $\beta = \alpha$, et qu'en faisant

$$\theta_i = | x, y \quad x + y^i, y |,$$

toutes les substitutions de I sont contenues dans l'expression

$$\theta_0^{a_0}\theta_1^{a_1}\ldots\theta_\alpha^{a_\alpha}.T^b;$$

d'ailleurs les substitutions θ_i peuvent être remplacées par les suivantes

$$\vartheta_i = | x, y \quad x + (y)_i, y |.$$

Si l'on désigne, pour un moment, par g_i le groupe dérivé des substitutions $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_i$, et par I_i celui qui dérive des substitutions de g_i et de T, on voit (équat. (2) et (3)) que les substitutions de I_i sont échangeables entre elles à des substitutions de g_{i-1} près. Donc si l'on a $\alpha = 0$, toutes les substitutions de I_α sont échangeables entre elles; si $\alpha > 0$, les $\theta_0^{a_0}$ sont les seules substitutions de I_α qui soient échangeables à toutes les autres.

Transformons maintenant le groupe I par la substitution

$$U = | x, y \quad x + \psi(y), y |.$$

Les substitutions θ_i, ϑ_i conservent leurs formes, au contraire on a

$$U^{-1}TU = | x, y \quad x + \varphi(y) + \psi(y + 1) - \psi(y), y + 1 |.$$

Or, si en développant suivant les fonctions $(y)_i$, on a

$$\varphi(y) = a_0 + a_1 y + a_2(y)_2 + \ldots + a_{p-2}(y)_{p-2} + a_{p-1}(y)_{p-1},$$

on peut faire

$$\psi(y + 1) - \psi(y) = -[a_0 + a_1 y + a_2(y)_2 + \ldots + a_{p-2}(y)_{p-2}],$$

ce qui donne

$$U^{-1}TU = |\, x, y \quad x + a_{p-1}(y)_{p-1}, y + 1 \,| = T'.$$

Si maintenant a_{p-1} est différent de zéro, transformons de nouveau par la substitution

$$V = |\, x, y \quad bx, y \,|,$$

qui évidemment est permutable au groupe g_α; on trouve

$$V^{-1}T'V = |\, x, y \quad x + a_{p-1}b(y)_{p-1}, y + 1 \,| = T'';$$

donc en faisant $a_{p-1}b \equiv 1 \pmod p$, on a

$$T'' = |\, x, y \quad x + (y)_{p-1}, y + 1 \,|.$$

Par un choix convenable des indices, la substitution T peut donc être réduite à l'une des deux formes suivantes

$$t = |\, x, y \quad x, y + 1 \,|, \qquad t = |\, x, y \quad x + (y)_{p-1}, y + 1 \,|.$$

On voit que, pour $\alpha < p - 1$, on a deux espèces de groupes de l'ordre $p^{\alpha+2}$, qui diffèrent seulement par la forme de la substitution t; dans la première espèce toutes les substitutions sont de l'ordre p; dans la seconde, celles qui ne font pas varier l'indice y sont de l'ordre p, les autres de l'ordre p^2. Quand $\alpha = p - 1$, les deux cas ne donnent qu'un seul groupe, puisque le groupe g_{p-1} contient la substitution

$$\vartheta_{p-1} = |\, x, y \quad x + (y)_{p-1}, y \,|,$$

Tous les groupes d'ordre p^2 contenus dans G étant isomorphes, cette classification peut aussi être appliquée aux groupes du degré p^2 en général; nous comprendrons dans la première espèce les cas où $\alpha = p - 1$.

Des équations (1) on déduit les suivantes:

$$(5) \qquad t^{-1}\vartheta_i t = \vartheta_0^{\pm 1}\vartheta_1^{\mp 1} \dots \vartheta_{i-1}^{-1}\vartheta_i, \qquad t\vartheta_i t^{-1} = \vartheta_{i-1}\vartheta_i,$$

$$(6) \qquad t^{-1}\theta_i t = \theta_0^{\pm 1}\theta_1^{\mp i}\theta_2^{\pm (i)_2} \dots \theta_{i-1}^{-i}\theta_i, \qquad t\theta_i t^{-1} = \theta_0\theta_1^{i}\theta_2^{(i)_2} \dots \theta_{i-1}^{i}\theta_i.$$

En considérant les groupes de la seconde espèce, il est quelquefois

commode d'employer un seul indice, pris suivant le module p^2. A cet effet on peut faire

$$xp + y \equiv \xi \pmod{p^2},$$

en ayant soin de remplacer toujours y par le plus petit nombre positif qui lui est congru $(\bmod p)$; on trouve ainsi

$$t = | \xi \quad \xi + 1 |,$$

$$t^p = \theta_0 = \vartheta_0 = | \xi \quad \xi + p |,$$

$$\vartheta_\iota = | \xi \quad \xi + p(\xi)_\iota |, \qquad \theta_\iota = | \xi \quad \xi + p\xi^\iota |.$$

Evidemment le groupe I est non-primitif, les éléments qui répondent à une même valeur de y formant un système; de plus si $\alpha > 0$, les éléments ne peuvent être répartis en systèmes que de cette manière, comme on le voit aisément.

Un groupe d'ordre $p^{\alpha+2}$ contenu dans G est complètement déterminé, quand on connaît les substitutions qui sont échangeables à toutes les autres, et qu'on connaît de plus de quelle manière les systèmes sont permutés entre eux. Supposons, en effet, que le groupe I', contenu dans G, contienne la substitution $\theta_0^a = | x, y \quad x + a, y |$ échangeable à toutes les autres, et que celles-ci déplacent les systèmes conformément à la substitution $| y \quad y + b |$. Evidemment les substitutions de I' sont comprises dans l'expression

$$T = | x, y \quad x + \varphi(y), y + b |.$$

Or G, contenant T et t, contient $T.t^{-b}$, substitution qui peut être écrite sous la forme suivante

$$Tt^{-b} = | x, y \quad x + F(y), y | = S.$$

Si maintenant S n'était pas contenu dans I, le groupe qui dérive de S et des substitutions de I serait d'un ordre $p^{\alpha+m}$, où $m > 2$; donc S, et par suite T, font partie de I, c'est-à-dire que I' coïncide avec I. En particulier, si G appartient à la seconde espèce, I' est complètement déterminé par une substitution quelconque de l'ordre p^2.

§ 2. *Détermination du groupe H.*

3. Considérons d'abord les groupes de la première espèce, en excluant préalablement les cas où $\alpha = 0$. Les θ_0^m étant les seules substitutions de I échangeables à toutes les autres, une substitution S de H doit transformer θ_0 en θ_0^a; par suite on doit avoir

$$S = |\, x\,, y \quad ax + \varphi(y)\,, \varphi_1(y)\,|,$$

φ et φ_1 dénotant des fonctions entières du degré $p - 1$ au plus. La transformée de t par S doit être une substitution de I, ce qui donne les conditions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(y + 1) - \varphi(y) \equiv b_0 + b_1\varphi_1(y) + b_2[\varphi_1(y)]^2 + \dots + b_\alpha[\varphi_1(y)]^\alpha \\ &\varphi_1(y + 1) - \varphi_1(y) \equiv c \end{aligned}\right\} \pmod p.$$

La seconde congruence donne

$$\varphi_1(y) \equiv cy + d;$$

en remettant cette valeur dans la première et développant suivant les fonctions $(y)_i$, on a un résultat de la forme suivante

$$\varphi(y + 1) - \varphi(y) \equiv b'_0 + b'_1 y + b'_2(y)_2 + \dots + b'_\alpha(y)_\alpha,$$

d'où

$$\varphi(y) \equiv \varphi(0) + b'_0 y + b'_1(y)_2 + b'_2(y)_3 + \dots + b'_\alpha(y)_{\alpha+1}.$$

Donc toute substitution de H est comprise dans l'expression

$$\begin{vmatrix} x & ax + b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots + b_{\alpha+1} y^{\alpha+1} \\ y & cy + d \end{vmatrix};$$

par conséquent elle est le produit d'une substitution de I par une autre de la forme suivante:

$$T = |\, x\,, y \quad ax + by^{\alpha+1}\,, cy\,|.$$

Evidemment les substitutions T forment un groupe, que nous désignerons par H'.

Quand $\alpha = p - 1$, on a $b = 0$; nous démontrerons maintenant que, sans nuire à la généralité, on peut supposer $b = 0$, même si $\alpha < p - 1$. En supposant $c^{\alpha+1} \equiv a \pmod p$ on trouve

$$T^m = \left| \begin{matrix} x & c^{m(\alpha+1)}x + mbc^{(m-1)(\alpha+1)}y^{\alpha+1} \\ y & c^m y \end{matrix} \right|;$$

et en faisant m égal au plus petit exposant pour lequel $c^m \equiv 1 \pmod p$:

$$T^m = \left| x\,, y \quad x + m\frac{b}{a}y^{\alpha+1}\,, y \right|.$$

Or, si l'on n'avait pas $b \equiv 0$, la substitution T^m serait de l'ordre p, et par conséquent l'ordre de H serait divisible par $p^{\alpha+2}$; cela étant contre l'hypothèse, on conclut que si dans une substitution T de H' on a

$$a - c^{\alpha+1} \equiv 0,$$

on a en même temps

$$b \equiv 0.$$

Supposons maintenant que H' contienne les deux substitutions

$$T = \left| x\,, y \quad ax + by^{\alpha+1}\,, cy \right|, \qquad T_1 = \left| x\,, y \quad a_1x + b_1y^{\alpha+1}\,, c_1y \right|;$$

on trouve

$$T^{-1}T_1T.T_1^{-1} = \left| \begin{matrix} x & x + \dfrac{ab_1 - a_1b + bc_1^{\alpha+1} - b_1c^{\alpha+1}}{a_1c^{\alpha+1}}y^{\alpha+1} \\ y & y \end{matrix} \right|.$$

Cette substitution, qui est étrangère à I, doit être identique, car autrement son ordre serait p, ce qui est impossible; donc on a

$$\frac{b_1}{a_1 - c_1^{\alpha+1}} \equiv \frac{b}{a - c^{\alpha+1}} \pmod p. \tag{7}$$

Cela posé, transformons le groupe H par la substitution

$$U = \left| x\,, y \quad x + ry^{\alpha+1}\,, y \right|,$$

qui est permutable à I; on trouve

$$U^{-1}TU = \left| x\,, y \quad ax + [b - r(a - c^{\alpha+1})]y^{\alpha+1}\,, cy \right|;$$

donc en faisant

$$r \equiv \frac{b}{a - c^{\alpha+1}},$$

on a

$$U^{-1}TU = |\, x\,, y \quad ax\,, cy \,|;$$

de plus la congruence (7) fait voir que les transformées de toutes les autres substitutions de H' prennent la même forme.

Il est donc démontré que, pour les groupes de la première espèce, α étant > 0, on peut supposer le groupe H' formé de substitutions de la forme

$$|\, x\,, y \quad ax\,, cy \,|;$$

l'ordre de H' est donc $\frac{(p-1)^2}{h}$, celui de H est $p^{\alpha+2}\frac{(p-1)^2}{h}$, le nombre h étant un diviseur de $(p-1)^2$.

4. Passons aux groupes de la seconde espèce. Quand $\alpha = 0$, le groupe I contient seulement les puissances de la substitution

$$t = |\, \xi \quad \xi + 1 \,| \pmod{p^2},$$

par suite toute substitution de H est le produit d'une substitution de I par une substitution de la forme $|\, \xi\,, a\xi \,|$, où a est premier à p, et appartient à un exposant qui est premier à p. Donc en désignant par δ une racine primitive du module p^2, les valeurs de a sont de la forme $\delta^{\nu p}$, par conséquent l'ordre de H est égal à

$$\frac{p^2(p-1)}{h},$$

h étant un diviseur de $p - 1$.

En général toute substitution U de H doit vérifier l'équation

$$tU = US,$$

S étant une substitution de I. En faisant

$$U = |\, \xi \quad \varphi(\xi) \,|,$$

on a ainsi la condition suivante:

$$\varphi(\xi + 1) - \varphi(\xi) \equiv m_0 + p\{m_1\varphi(\xi) + m_2(\varphi\xi)^2 + \ldots + m_\alpha(\varphi\xi)^\alpha\} \pmod{p^2}.$$

On en tire

$$\varphi(\xi+1)-\varphi(\xi)\equiv m_0 \pmod p,$$

d'où

$$\varphi(\xi)\equiv m_0\xi+\varphi(0) \pmod p.$$

En remettant ce résultat dans la congruence primitive, elle prend la forme

$$\varphi(\xi+1)-\varphi(\xi)\equiv n_0+p\{n_1\xi+n_2\xi^2+\ldots+n_\alpha\xi^\alpha\} \pmod{p^2}.$$

Comme nous avons supposé $\alpha<p-1$, on en tire

$$\varphi(\xi)\equiv a\xi+b+p(a_2\xi^2+a_3\xi^3+\ldots+a_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1}) \pmod{p^2}.$$

Donc toute substitution de H est le produit d'une substitution de I par une substitution de la forme suivante

$$T=|\,\xi \quad a\xi+pb\xi^{\alpha+1}\,|.$$

Ces substitutions forment un groupe H'. En supposant

$$a^\alpha\equiv 1 \pmod p,$$

on a

$$T^m=|\,\xi \quad a^m\xi+pbma^{m-1}\xi^{\alpha+1}\,|;$$

si l'on fait m égal au plus petit exposant pour lequel $a^m=1+ph$, il vient

$$T^m=|\,\xi \quad \xi+p(h\xi+bma^{m-1}\xi^{\alpha+1})\,|;$$

on en conclut que $b=0$, car autrement T^m serait de l'ordre p sans être contenu dans I. Ainsi la congruence

$$a^\alpha\equiv 1 \pmod p$$

entraîne celle-ci

$$b\equiv 0 \pmod p.$$

Or je dis que le groupe H ne peut contenir qu'une seule substitution pour chaque valeur de a. En effet, s'il contient

$$T=|\,\xi \quad a\xi+pb\xi^{\alpha+1}\,| \quad \text{et} \quad T_1=|\,\xi \quad a\xi+pb_1\xi^{\alpha+1}\,|,$$

il contient aussi

$$T^{-1}T_1 = \left| \xi \quad \xi + p\,\frac{b_1 - b}{a^{\alpha+1}}\,\xi^{\alpha+1} \right|,$$

qui, étant de l'ordre p, doit être contenu dans I; donc on a $b_1 \equiv b \pmod{p}$, $T = T_1$.

Par conséquent les valeurs du nombre a sont les puissances d'une certaine valeur primitive; donc les substitutions de H' sont les puissances de l'une d'elles, T_0; soit

$$T_0 = | \xi \quad a_0\xi + pb_0\xi^{\alpha+1} |.$$

En transformant H par la substitution

$$U = | \xi \quad \xi + pr\xi^{\alpha+1} |,$$

I n'est pas changé, et l'on a

$$U^{-1}T_0U = | \xi \quad a_0\xi + p[b_0 - r(a_0 - a_0^{\alpha+1})]\xi^{\alpha+1} |.$$

Or, si b_0 n'est pas congru à zéro $(\mathrm{mod}\, p)$, $a_0 - a_0^{\alpha+1}$ ne l'est pas non plus; nous pouvons donc faire

$$r \equiv \frac{b_0}{a_0 - a_0^{\alpha+1}} \pmod{p},$$

ce qui donne

$$U^{-1}T_0U = | \xi \quad a_0\xi |.$$

On peut donc supposer que les substitutions de H' soient de la forme $|\xi \quad a\xi|$; d'autre part toutes les substitutions de cette forme contenues dans G appartiennent à H'. Si $a > p$, faisons $a = a' + a''p$, où $a' < p$; on a

$$| \xi \quad a\xi | = | \xi \quad a'\xi | \cdot \left| \xi \quad \xi + p\frac{a''}{a'}\xi \right|,$$

et comme le dernier facteur appartient à I, on peut remplacer a par a'. Donc l'ordre de H' est $\frac{p-1}{h}$, celui de H est $\frac{p^{\alpha+2}(p-1)}{h}$, h étant un diviseur de $p - 1$.

Il est facile d'exprimer les substitutions de H par deux indices pris suivant le module p. En effet, ayant

$$T = | \xi \quad a\xi | \pmod{p^2},$$

et faisant

$$\xi = px + y, \qquad y < p,$$

$$ay \equiv \eta \pmod{p}, \qquad \eta \geqq 0, \qquad \eta < p,$$

et désignant enfin par $E(m)$ le plus grand nombre entier contenu dans la fraction m, on a

$$a\xi = apx + ay = apx + pE\left(\frac{ay}{p}\right) + \eta;$$

donc

$$T = \begin{vmatrix} x & ax + E\left(\frac{ay}{p}\right) \\ y & \eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & ax + E\left(\frac{ay}{p}\right) \\ y & ay \end{vmatrix} \pmod{p}.$$

5. Il nous reste à considérer le cas où le groupe I ne contient que les p^2 substitutions

$$| x, y \quad x + a, y + b |.$$

Le groupe H dérive évidemment des substitutions de I et de celles d'un certain groupe H' d'ordre π, dont les substitutions sont de la forme

$$| x, y \quad \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y |.$$

Inversement H renferme toutes les substitutions linéaires de G. Il faut donc trouver tous les groupes contenus dans le groupe linéaire homogène à deux indices dont les ordres sont premiers à p. La résolution de ce problème, beaucoup plus compliqué que celui que nous avons traité, peut être tirée de la détermination des groupes finis, contenus dans le groupe linéaire infini à deux variables, faite par M. Jordan dans son *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique* (Journal für Mathematik, Bd. 84).[1] En effet, l'analyse de

---

[1] Ainsi M. Gierster s'en est servi dans son énumeration des groupes partiels contenus dans le groupe linéaire fractionnaire à un indice (Inauguraldissertation, Leipzig 1881).

M. JORDAN repose entièrement sur la circonstance qu'un groupe fini ne peut contenir aucune substitution de la forme

$$|x, y \quad \alpha(x + \lambda y), \alpha y|,$$

λ étant différent de zéro, son ordre ne pouvant être fini; pareillement, dans notre problème, l'ordre d'une substitution de cette forme est toujours un multiple de p; elle ne peut donc appartenir à H'. En lisant la déduction de M. JORDAN, on voit aisément qu'on obtient toutes les formes du groupe H', en remplaçant les variables x et y par des indices pris suivant le module p, et changeant les équations de condition auxquelles doivent satisfaire les constantes, en des congruences (mod p). Dans l'énumération suivante les indices ξ, η sont ou réels, ou des nombres imaginaires et conjugués de la forme $a + b\varepsilon$, ε étant racine d'une congruence irréductible du second degré; ils sont réels ou imaginaires en même temps que les multiplicateurs de la première substitution, désignée par A et donnée sous forme canonique. Nous appellerons, avec M. JORDAN, substitutions de la première espèce celles qui, mises sous forme canonique, multiplient les indices par des nombres différents, substitutions de la seconde espèce celles qui multiplient les deux indices par un même nombre, nécessairement réel, et nous dénoterons ces dernières en écrivant simplement le multiplicateur, par exemple

$$a = |\xi, \eta \quad a\xi, a\eta|, \qquad -1 = |\xi, \eta \quad -\xi, -\eta|.$$

Premier type. Les substitutions sont de la forme

$$A = |\xi, \eta \quad a\xi, b\eta|.$$

Deuxième type. Le groupe dérive d'un groupe de premier type combiné avec une substitution de la forme

$$B = |\xi, \eta \quad c\eta, d\xi|.$$

Troisième type (type *tétraédrique*). Le groupe dérive des substitutions

$$A = |\xi, \eta \quad i\xi, -i\eta|, \quad \text{où} \quad i^2 + 1 \equiv 0 \pmod p,$$

$$B = |\xi, \eta \quad r\eta, s\xi|, \quad \text{où} \quad rs + 1 \equiv 0,$$

$$C = \begin{vmatrix} \xi & m\frac{1-i}{2}(\xi - r\eta) \\ \eta & m\frac{1+i}{2}(-s\xi + \eta) \end{vmatrix}, \quad m \text{ étant réel},$$

et d'un certain nombre de substitutions de la seconde espèce. Parmi celles-ci se trouvent toujours $A^2 = B^2 = -1$, $C^3 = -m^3$. L'ordre du groupe est égal à 12ω, ω étant l'ordre du groupe formé des substitutions de la seconde espèce contenues dans H'. Le groupe alterné entre quatre lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ est isomorphe à H'. En désignant par le signe $\sim$ qu'une substitution de H' correspond à une substitution entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on a

$$a \sim 1\,,\ aA \sim (\alpha\beta)(\gamma\delta)\,,\ aB \sim (\alpha\delta)(\beta\gamma)\,,\ aC \sim (\alpha\beta\gamma).$$

On doit évidemment omettre ce type quand $p = 3$.

Quatrième type (type *octaédrique*). Les groupes de ce type dérivent d'un groupe du troisième type et d'une substitution de la forme

$$D = |\,\xi, \eta \quad e\xi, ei\eta\,|,$$

où $e^2 \equiv fi$, f étant réel. Dans l'expression de la substitution C on peut toujours faire $m \equiv 1$. Le groupe symétrique entre 4 lettres est isomorphe à H'; on a

$$aD \sim (\alpha\gamma\beta\delta)\,,\ aBD \sim (\gamma\delta).$$

L'ordre du groupe est 24ω; par conséquent il doit être omis quand $p = 3$.

Cinquième type (type *icosaédrique*). Le groupe dérive de substitutions de la seconde espèce et des trois substitutions suivantes:

$$A = |\,\xi, \eta \quad \theta\xi, \theta^{-1}\eta\,|, \quad \text{où} \quad \frac{\theta^5 - 1}{\theta - 1} \equiv 0,$$

$$B = |\,\xi, \eta \quad r\eta, s\xi\,|, \quad \text{où} \quad rs + 1 \equiv 0,$$

$$C = \begin{vmatrix} \xi & \lambda\xi + r\mu\eta \\ \eta & -s\mu\xi - \lambda\eta \end{vmatrix}, \quad \text{où} \quad \lambda \equiv \frac{1}{\theta^3 - \theta^2}\,,\ \mu \equiv \frac{1}{\theta^4 - \theta},$$

et où par conséquent

$$\lambda^2 + \mu^2 + 1 \equiv 0.$$

Le groupe contient toujours la substitution $B^2 = C^2 = -1$; son ordre est égal à 60ω, ω ayant la même signification que plus haut; il n'existe que pour les nombres p de la forme $10h \pm 1$. Le groupe alterné entre cinq lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ est isomorphe au groupe icosaédrique; on a

$$aA \sim (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)\,,\ aB \sim (\beta\varepsilon)(\gamma\delta)\,,\ aC \sim (\beta\delta)(\gamma\varepsilon)\,,\ aA^2C \sim (\alpha\beta\gamma).$$

Le groupe H' appartient donc toujours à l'une de ces cinq types, et il peut être réduit à l'une des formes canoniques ci-dessus par une transformation linéaire, qui est réelle ou imaginaire en même temps que les indices ξ et η. S'ils sont réels, on peut simplement changer ξ et η en x et y, puisque toute substitution linéaire et réelle est permutable au groupe I. Au contraire, si ξ et η sont imaginaires, et qu'on veuille conserver I sous sa forme réelle, il faut réduire A, B, C, D à des formes réelles, ce qui ne présente pas de difficulté. Mais comme, dans la suite, nous pourrons nous servir des formes canoniques même s'ils sont imaginaires, nous omettrons ces calculs.

§ 3. *Sur le nombre n.*

6. Le groupe G contient $np+1$ groupes de l'ordre p^{a+2}, que nous désignerons par

$$I_0, I_1, I_2, \ldots, I_{np}.$$

En les transformant tous par les substitutions de I_0, on obtient un groupe de substitutions entre les I_m, isomorphe à I_0. Si l'on réunit en systèmes ceux qui sont permutés entre eux d'une manière transitive, le nombre des groupes contenus dans chaque système est une puissance de p, I_0 seul formant un système du degré 1. On a donc une équation de la forme suivante:

$$np = n_1 p^{r_1} + n_2 p^{r_2} + n_3 p^{r_3} + \ldots$$

les nombres $r_1, r_2, r_3, \ldots$ étant tous égaux ou supérieurs à 1. Supposons que I_1 fasse partie d'un système du degré p^{r_1}; I_1 est évidemment permutable aux substitutions d'un groupe K de l'ordre p^{a+2-r_1} contenu dans I_0. Le groupe K sera aussi contenu dans I_1; en effet, si le nombre des substitutions communes à I_1 et à K est égal à p^{a+2-r_1-s}, le groupe dérivé des substitutions de I_1 et de K aura pour ordre p^{a+2+s}, d'où l'on conclut que $s=0$, l'ordre de G n'étant pas divisible par p^{a+3}. Inversement, si les substitutions communes à I_0 et à I_1 forment un groupe de l'ordre p^{a+2-r_1}, I_1 fait évidemment partie d'un système du degré p^{r_1}. Spécialement, si $r_1 = 1$, I_1 appartient à un système du degré p; or K étant dans ce cas permutable aux substitutions de I_0, il sera contenu

dans tous les groupes du système, et sera permutable à leurs substitutions. Donc, si l'on désigne par $K_1, K_2, \ldots, K_m$ les groupes de l'ordre $p^{\alpha+1}$ contenus dans G, l'un quelconque d'entre eux, K_r, sera contenu dans les groupes d'un nombre n_r de systèmes, et l'on aura

$$np = n_1p + n_2p + \ldots + n_mp + n'p^2,$$

les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_m$ pouvant être nuls, tous ou en partie. Pour discuter cette équation nous distinguerons dans la suite plusieurs cas, qui diffèrent par l'espèce du groupe et par la valeur de α.

7. Commençons par les groupes de la première espèce où $\alpha = 0$: Les groupes K_r sont en nombre $p + 1$, chacun d'eux contenant les puissances d'une seule substitution

$$S = | x, y \quad x + a, y + b |;$$

nous ferons l'indice r congru au rapport $\frac{b}{a}$. Supposons que $K_{\frac{b}{a}}$ soit contenu dans les groupes des n_1 premiers systèmes, savoir les groupes $I_1, I_2, \ldots, I_{n_1p}$, et soit G_1 le groupe formé des substitutions de G qui sont échangeables à S. Les substitutions de chacun des groupes I étant échangeables entre elles, G_1 contient $I_0, I_1, \ldots, I_{n_1p}$, mais il ne contient aucun des groupes $I_{n_1p+1} \ldots I_{np}$. Par conséquent son ordre est $p^2\pi_1(n_1p + 1)$, π_1 étant l'ordre du groupe H_1' qui contient les substitutions de H' échangeables à S. De plus, $K_{\frac{b}{a}}$ étant intransitif, G_1 est non-primitif, ses substitutions remplaçant les éléments de chaque cycle de S par les éléments d'un même cycle. Il existe donc un groupe G_1' du degré p, isomorphe à G_1, et l'on voit aisément que son ordre sera

$$p\pi_1(n_1p + 1),$$

ce qui réduit très considérablement les valeurs que peuvent avoir n_1 et π_1. Notamment on sait, en vertu de deux théorèmes de M. E. MATHIEU (Journal de LIOUVILLE, année 1861, p. 310) qu'on ne peut avoir $\pi_1 = 1$, sans avoir $n_1 = 0$, et qu'on a également $n_1 = 0$, si $\pi_1 = 2$, $p = 4h + 3$.

Recherchons donc quelles sont les substitutions de H' qui peuvent être échangeables à une substitution de I_0. Soit

$$T = | x, y \quad \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y |$$

une substitution de H', et supposons que, réduite à sa forme canonique, elle devienne

$$T = | \xi, \eta \quad s_1 \xi, s_2 \eta |;$$

on sait que s_1 et s_2 sont les racines de la congruence

$$s^2 - (\alpha + \delta)s + \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 0 \pmod p,$$

et qu'on peut faire

$$\xi = (s_1 - \delta)x + \beta y, \qquad \eta = (s_2 - \delta)x + \beta y.$$

Exprimant S par les nouveaux indices on a

$$S = | \xi, \eta \quad \xi + A, \eta + B |,$$

où

$$A = (s_1 - \delta)a + \beta b, \qquad B = (s_2 - \delta)a + \beta b,$$

et l'on trouve

$$T^{-1}ST = | \xi, \eta \quad \xi + s_1 A, \eta + s_2 B |.$$

Pour que T soit permutable au groupe K_b, il faut que $T^{-1}ST = S^m$, d'où

$$(s_1 - m)A \equiv 0, \qquad (s_2 - m)B \equiv 0 \pmod p.$$

Donc si T n'appartient pas à la seconde espèce, il faut avoir

$$s_1 \equiv m, \quad B \equiv 0, \quad \text{ou} \quad s_2 \equiv m, \quad A \equiv 0.$$

Le nombre m étant réel par définition, on a le résultat suivant: parmi les substitutions de la première espèce de H' celles seulement qui sont réductibles à des formes canoniques réelles, peuvent être permutables à un groupe d'ordre p contenu dans I_0; inversement, chacune de ces substitutions est permutable à deux groupes, savoir

$$K_{\frac{\delta - s_2}{\beta}} \quad \text{et} \quad K_{\frac{\delta - s_1}{\beta}},$$

et n'est pas permutable aux autres.

Si T doit être échangeable à S, il faut de plus que l'un de ses multiplicateurs soit congru à 1; en supposant $s_1 \equiv 1$, on a

$$1 - \alpha - \delta + s_2 \equiv 0;$$

alors T est échangeable aux substitutions du groupe

$$K_{\frac{1-\alpha}{\beta}},$$

et il est en outre permutable au groupe $K_{\frac{\delta-1}{\beta}}$.

Soit maintenant T' une substitution de H' de la première espèce et échangeable à S; réduite à sa forme canonique elle sera

$$T = |\, \xi, \eta \quad \xi, s_2\eta \,|,$$

et l'on aura

$$S = |\, \xi, \eta \quad \xi + A, \eta \,|.$$

Les substitutions de H' permutables au groupe $K_{\frac{b}{a}}$ ont la forme suivante

$$T' = |\, \xi, \eta \quad m_1\xi + r\eta, m_2\eta \,|;$$

mais on trouve

$$T^{-1}T'T.T'^{-1} = \left|\, \xi, \eta \quad \xi + r\frac{1-s_2}{s_2 m_1}\eta, \eta \,\right|,$$

ce qui montre qu'on doit avoir $r \equiv 0 \pmod p$. Il s'ensuit que toutes ces substitutions sont échangeables entre elles. En particulier les substitutions de H' échangeables à S sont les puissances d'une seule d'entre elles; soit T cette substitution. De plus toute substitution de H' permutable à $K_{\frac{b}{a}}$ est le produit d'une puissance de T par une puissance d'une seule substitution

$$T_1 = |\, \xi, \eta \quad a_1\xi, b_1\eta \,|.$$

Les substitutions de G qui sont permutables à $K_{\frac{b}{a}}$ forment un groupe G_2, qui contient T_1 et les substitutions de G_1, mais ne contient aucun des groupes $I_{n_1p+1}, I_{n_1p+2}, \ldots.$ Par conséquent son ordre est égal à $p^2\pi_1\pi_2(n_1p+1)$, où π_2 est l'exposant de la plus petite puissance de a_1

congrue à 1. Le groupe G_2 est non-primitif, tout comme G_1; donc il existe un groupe G'_2 du degré p, isomorphe à G_2; l'ordre de ce groupe est évidemment

$$p\pi_1\pi'_2(n_1p + 1),$$

π'_2 désignant l'exposant de la plus petite puissance de b_1 congrue à une puissance de s_2. Si $\pi'_2 > 1$, cela donne une nouvelle réduction des valeurs de n_1.

8. Supposons que H' soit du premier type, et supposons que ses substitutions soient ramenées à la forme canonique

$$|\,\xi\,,\,\eta \quad a\xi\,,\,b\eta\,|.$$

Si maintenant ξ et η sont imaginaires, a et b ne peuvent être réels sans être congrus (mod p), donc, outre la substitution identique, aucune substitution de H' n'est échangeable à une substitution de I_0. Par suite les nombres $n_1, n_2, \ldots$ sont nuls, et l'ordre de G est de la forme

$$O = p^2\pi(n'p^2 + 1),$$

π étant un diviseur de $p^2 - 1$.

Si au contraire ξ et η sont réels, il est permis de les remplacer par x et y. Parmi les groupes d'ordre p, contenus dans I_0, il n'y a que deux, savoir K_0 et K_∞, dont les substitutions sont échangeables à des substitutions non identiques de H'. Soit δ_1 l'ordre du groupe contenu dans H' dont les substitutions sont de la forme

$$|\,x\,,\,y \quad x\,,\,m_1y\,|,$$

et δ_2 l'ordre de celui dont les substitutions sont de la forme

$$|\,x\,,\,y \quad m_2x\,,\,y\,|;$$

on aura

$$\pi = \delta_1 . \delta_2 . \delta_3 .$$

D'après les numéros 6 et 7, on a

$$O = p^2\pi(n'p^2 + n_1p + n_2p + 1),$$

π étant un diviseur de $(p-1)^2$. Le nombre

$$p\delta_1\delta_3(n_1p+1)$$

doit être l'ordre d'un groupe du degré p, contenant un autre de l'ordre

$$p\delta_1(n_1p+1);$$

pareillement

$$p\delta_2\delta_3(n_2p+1)$$

est l'ordre d'un groupe du degré p, contenant un autre du degré

$$p\delta_2(n_2p+1).$$

On a $n_1=0$ si $\delta_1=1$, et $n_2=0$ si $\delta_2=1$; quand p est de la forme $4h+3$, on a même $n_1=0$ si $\delta_1=2$, et $n_2=0$ si $\delta_2=2$. Les substitutions de H' étant toutes permutables aux groupes K_0, K_∞, l'ordre des groupes que nous avons désignés par G_2 est $p^2\pi(n_ip+1)$. Il s'ensuit que $n'p+n_2$ est divisible par n_1p+1, et $n'p+n_1$ divisible par n_2p+1.

9. Considérons le cas où H' appartient au deuxième type. La moitié des substitutions de H' ont la forme

$$S=|\,\xi,\eta\quad a\xi,b\eta\,|,$$

et forment un groupe H'' de l'ordre $\frac{\pi}{2}$; les autres sont de la forme

$$T=|\,\xi,\eta\quad c\eta,d\xi\,|.$$

Supposons *en premier lieu* que ξ et η soient réels; ils peuvent alors être remplacés par x et y, sans changer la forme du groupe I_0. Nous écrirons donc

$$S=|\,x,y\quad ax,by\,|,\qquad T=|\,x,y\quad cy,dx\,|.$$

Puisque H'' contient la substitution $T^{-1}ST=|\,x,y\quad bx,ay\,|$, les valeurs de a et de b sont les mêmes; elles sont donc les puissances d'une seule d'entre elles. Nous conserveront la lettre a pour désigner cette valeur, en la supposant racine primitive de la congruence

$$z^\delta\equiv 1 \pmod p.$$

Le groupe H'' en contient un autre donc les substitutions ne font pas varier l'indice x; ce groupe est formé des puissances d'une seule substitution

$$\varphi = | x , y \quad x , a^{\delta'} y |;$$

on peut supposer que δ' soit un diviseur de δ; en faisant

$$\delta = \delta_1 \delta',$$

l'ordre du groupe dont nous parlons est δ_1. De plus H'' contient une substitution de la forme suivante:

$$\varphi' = | x , y \quad ax , a^t y |;$$

évidemment toutes ses substitutions sont contenues dans l'expression $\varphi^m \varphi'^{m'}$, et l'ordre de H'' est égal à $\delta_1^2 \delta'$, d'où

$$\pi = 2 \delta_1^2 \delta'.$$

D'autre côté H'' dérive aussi des substitutions

$$\varphi_1 = T^{-1} \varphi T = | x , y \quad a^{\delta'} x , y |, \qquad \varphi_1' = T^{-1} \varphi' T = | x , y \quad a^t x , ay |.$$

En exprimant que φ_1' peut être égalé à $\varphi^m \varphi'^{m'}$, on obtient la congruence

$$t^2 - 1 \equiv 0 \pmod{\delta'}.$$

Les seules substitutions de H'' échangeables à des substitutions non identiques de I_0 sont donc les puissances de φ et de φ_1, qui sont échangeables respectivement aux substitutions des groupes K_0 et K_∞. Or, en supposant que G contienne $n_1 p + 1$ groupes d'ordre p^2 dont les substitutions sont échangeables à celles de K_0, on en déduit, en les transformant par T, un nombre égal qui ont leurs substitutions échangeables à celles de K_∞. Toutes les substitutions de H'' sont permutables aux groupes K_0 , K_∞; le nombre des substitutions qu'elles produisent entre les cycles de chaque groupe est évidemment égal à δ.

Voyons maintenant dans quels cas une substitution de la forme T est échangeable à des substitutions de I_0. En réduisant T à sa forme canonique, on trouve

$$T = | \xi , \eta \quad \sqrt{cd}\, \xi , -\sqrt{cd}\, \eta |;$$

il faut donc que $cd \equiv 1 \pmod p$, donc

$$T = | x , y \quad cy , c^{-1}x |.$$

On obtient toutes les substitutions de H' de cette forme, en multipliant l'une d'elles par les substitutions de H'' dont les déterminants sont congrus à 1. Ce sont les substitutions

$$| x , y \quad a^{h\delta_3}x , a^{-h\delta_3}y |,$$

où l'on a fait

$$t + 1 = \delta_2\tau, \qquad \delta' = \delta_2\delta_3,$$

et par suite

$$\delta = \delta_1\delta_2\delta_3, \qquad \pi = 2\delta_1^2\delta_2\delta_3,$$

δ_3 et τ étant premiers entre eux. Le nombre h peut avoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, (\delta_1\delta_2 - 1)$. Donc, si H' contient une substitution de la forme $| x , y \quad cy , c^{-1}x |$, il en contient un nombre de $\delta_1\delta_2$.

Telle que nous l'avons déterminée, la substitution T est échangeable aux substitutions du groupe K_{c-1}, c'est-à-dire aux puissances de

$$| x , y \quad x + c , y + 1 |;$$

outre la substitution identique, elle est la seule substitution de H' qui possède cette propriété. Or, si G contient un groupe G_1 de l'ordre $p^2 . 2(n_2p + 1)$, dont les substitutions sont échangeables à celles de K_{c-1}, on en peut conclure l'existence d'un autre ayant ses substitutions échangeables à celles de K_{rc-1}, pourvu que G contienne une substitution qui transforme K_{c-1} en K_{rc-1}. Sans une connaissance plus intime du groupe G, nous ne pouvons chercher cette substitution que dans H''. Les substitutions de celui-ci transforment K_{c-1} en $K_{a^\mu c-1}$, le nombre μ pouvant être égalé à un multiple quelconque du plus grand commun diviseur de $\delta_2\delta_3$ et $t - 1$. Or on a vu que $\delta_2\delta_3$ divise $t^2 - 1$, et que δ_2 est le plus grand commun diviseur de $\delta_2\delta_3$ et $t + 1$, donc δ_3 divise $t - 1$. En désignant le plus grand commun diviseur de $\delta_2\delta_3$ et $t - 1$ par

$$\varepsilon\delta_3,$$

ε divisera $t - 1$ et $t + 1$; on a donc $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = 2$.

Quand $\varepsilon = 1$, K_{c-1} peut être transformé en tout autre groupe d'ordre p qui a ses substitutions échangeables à une substitution de la forme T; donc tous les groupes G_1 correspondants sont de l'ordre $p^2.2(n_2p+1)$. Quand au contraire $\varepsilon = 2$, K_{c-1} ne peut être transformé qu'en $K_{c-1\,a^{2h\delta_3}}$; donc la moitié des groupes G_1 sont de l'ordre $p^2.2(n_2p+1)$, les autres pouvant être d'un ordre différent, $p^2.2(n_3p+1)$.

Le groupe K_{c-1} est permutable aux substitutions du groupe d'ordre $2\delta_1\delta_3\varepsilon$ qui dérive de T et des substitutions de la seconde espèce de H''. Ces substitutions produisent, entre les cycles de K_{c-1} un groupe dont l'ordre est égal à $2\delta_1\delta_3\varepsilon$ ou seulement à $\delta_1\delta_3\varepsilon$, suivant que $\delta_1\delta_3\varepsilon$ est impair ou pair. En effet, la substitution $-1.T$ ne déplace pas les cycles de K_{c-1}.

On possède maintenant les données nécessaires pour appliquer les résultats du numéro 7. On a, si $\varepsilon = 1$

$$O = p^2\pi(n'p^2 + 2n_1p + \delta_1\delta_2n_2p + 1),$$

et, si $\varepsilon = 2$,

$$O = p^2\pi\left(n'p^2 + 2n_1p + \frac{\delta_1\delta_2}{2}n_2p + \frac{\delta_1\delta_2}{2}n_3p + 1\right).$$

Les nombres n_i sont compatibles avec l'existence d'un groupe du degré p et de l'ordre $p\pi_1\pi_2'(n_ip+1)$, contenant un second groupe de l'ordre $p\pi_1(n_ip+1)$. Pour $i=1$ on a

$$\pi_1 = \delta_1, \qquad \pi_2' = \delta_2\delta_3;$$

pour $i = 2$ ou 3

$$\pi_1 = 2, \qquad \pi_2' = \frac{\delta_1\delta_3\varepsilon}{2} \quad \text{ou} \quad \delta_1\delta_3\varepsilon$$

suivant que $\delta_1\delta_3\varepsilon$ est pair ou impair. En particulier on a $n_1 = 0$ si $\delta_1 = 1$, ou si $\delta_1 = 2$ avec $p = 4h+3$; on a $n_2 = n_3 = 0$ si $p = 4h+3$, et toutes les fois que G ne contient pas de substitution de la forme $|x, y \quad cy, c^{-1}x|$. Enfin G contient des groupes des ordres

$$p^2\frac{\pi}{2}(n_1p+1),\ p^2.2\delta_1\delta_3\varepsilon(n_2p+1) \quad \text{et} \quad p^2.2\delta_1\delta_3\varepsilon(n_3p+1).$$

Considérons en *second lieu* le cas où ξ, η sont imaginaires. Les substitutions de H' de la forme S sont les puissances d'une seule d'entre elles, que nous désignerons par

$$S = | \xi, \eta \quad a\xi, a^r\eta |,$$

en supposant a racine primitive de la congruence

$$z^m \equiv 1 \pmod{p};$$

elles forment un groupe H'' de l'ordre $\frac{\pi}{2}$. Le nombre m est un diviseur de $p^2 - 1$; en supposant

$$p^2 - 1 = m \cdot m',$$

on peut faire

$$a = j^{m'},$$

j étant une racine primitive de la congruence

$$z^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

En posant

$$m = \delta_1\delta_2, \qquad p + 1 = \delta_1\delta_3,$$

δ_2 et δ_3 étant premiers entre eux, on a

$$m' = \delta_3\delta_4, \qquad p - 1 = \delta_2\delta_4, \qquad \pi = 2\delta_1\delta_2.$$

Outre la substitution identique, aucune substitution de H'' n'est échangeable à une substitution de I_0; en effet les multiplicateurs a^r, a^{rp} sont imaginaires ou égaux. Parmi les autres substitutions de H' les

$$T = | \xi, \eta \quad c\eta, c^{-1}\xi |.$$

seules sont échangeables aux substitutions d'un groupe K; comme $c\eta, c^{-1}\xi$ sont des nombres conjugués, on a $c^{p+1} \equiv 1$. On obtient toutes les substitutions de H' de cette forme en multipliant l'une d'elles par les substitutions de H'' à déterminant 1, c'est-à-dire par les

$$| \xi, \eta \quad a^{h\delta_2}\xi, a^{ph\delta_2}\eta |.$$

Par suite ou H' ne contient aucune substitution de la forme

$$| \xi, \eta \quad r\eta, r^{-1}\xi |,$$

ou il en contient δ_1, savoir les

(a) $$|\,\xi, \eta \quad a^{h\delta_2}c\eta, a^{-h\delta_2}c^{-1}\xi\,|.$$

En transformant T par S^{-t}, on trouve

$$S^tTS^{-t} = |\,\xi, \eta \quad a^{(p-1)t}c\eta, a^{-(p-1)t}c^{-1}\xi\,|;$$

or on peut rendre $a^{(p-1)t}$ ou $a^{\delta_2\delta_4 t}$ congru à

$$a^{h\varepsilon\delta_2},$$

où h est un entier quelconque, ε désignant le plus grand commun diviseur de δ_1 et δ_4; on a $\varepsilon = 2$ si δ_1 et δ_4 sont pairs, $\varepsilon = 1$ dans les autres cas. Donc si $\varepsilon = 1$, les δ_1 substitutions (a) peuvent être transformées les unes dans les autres par les substitutions de H'; au contraire, si $\varepsilon = 2$, on en peut déduire la moitié de la substitution T, l'autre moitié de $a^{\delta_2}T$. Dans le premier cas tous les groupes G_1 qui répondent aux diverses substitutions (a) ont le même ordre $p^2.\, 2(n_1p + 1)$, dans le second la moitié des groupes G_1 sont de l'ordre $p^2.\, 2(n_1p + 1)$, les autres pouvant avoir un ordre différent $p^2.\, 2(n_2p + 1)$.

Enfin le groupe formé des substitutions de H' qui sont permutables au groupe K_{c-1} dérive de T et des substitutions de la seconde espèce contenues dans H'' savoir les

$$|\,\xi, \eta \quad a^{\frac{h\delta_1}{\varepsilon}}\xi, a^{\frac{h\delta_1}{\varepsilon}}\eta\,|;$$

l'ordre de ce groupe est donc $2\delta_2\varepsilon$; il produit entre les cycles de K_{c-1} un groupe dont l'ordre est $2\delta_2\varepsilon$ ou $\delta_2\varepsilon$ suivant que $\delta_2\varepsilon$ est impair ou pair.

En vertu du numéro 7, on peut maintenant faire les conclusions suivantes:

Si $\varepsilon = 1$, on a

$$O = p^2\pi(n'p^2 + \delta_1 n_1 p + 1);$$

si $\varepsilon = 2$,

$$O = p^2\pi\left(n'p^2 + \frac{\delta_1}{2}n_1p + \frac{\delta_1}{2}n_2p + 1\right);$$

il existe des groupes du degré p des ordres

$$p.\, 2(n_1p + 1), \; p.\, 2(n_2p + 1)$$

contenus dans d'autres groupes, dont les ordres sont respectivement

$$p.2\delta_2\varepsilon(n_1p+1),\ p.2\delta_2\varepsilon(n_2p+1),\quad \text{si } \delta_2\varepsilon \text{ est impair,}$$

ou

$$p\delta_2\varepsilon(n_1p+1),\ p\delta_2\varepsilon(n_2p+1),\quad \text{si } \delta_2\varepsilon \text{ est pair.}$$

On a $n_1 = n_2 = 0$, quand p est de la forme $4h+3$, et quand le groupe G ne contient pas de substitution de la forme

$$|\xi, \eta \quad c\eta, c^{-1}\xi|.$$

Enfin le groupe G en contient d'autres des ordres

$$p^2.2\delta_2\varepsilon(n_1p+1),\ p^2.2\delta_2\varepsilon(n_2p+1).$$

10. Quand H' est tétraédrique, le nombre p est > 3. Les substitutions de H' sont les

$$a,\ aA,\ aB,\ aAB,\ aC^r,\ aA^{-1}C^rA,\ aB^{-1}C^rB,\ aB^{-1}A^{-1}C^rAB,$$

les lettres ayant la même signification qu'au numéro 5. Les substitutions aA sont permutables aux groupes K_0, K_∞, pourvu que ξ et η soient réels. Cela exige que -1 soit résidu quadratique de p, c'est-à-dire que p soit de la forme $4h+1$. Or si H' contient la substitution i ou $|\xi, \eta \quad i\xi, i\eta|$, il contient iA et $-iA$, qui sont échangeables respectivement aux substitutions des groupes K_∞ et K_0. Comme on a

$$B^{-1}iAB = -iA,$$

les deux groupes G_1 qui correspondent à K_0 et à K_∞ sont les transformés l'un de l'autre; ils sont donc d'un même ordre $p^2.2(n_1p+1)$. En transformant $\pm iA$ par C et C^2, on en déduit $\pm iB$, $\pm iAB$; donc G contient six groupes de l'espèce que nous avons désignée par G_1, tous de l'ordre $p^2.2(n_1p+1)$. Les groupes G'_1 du degré p qui y correspondent ont pour ordre $p.2(n_1p+1)$. Les groupes G_2 qui répondent aux six groupes G_1 sont évidemment de l'ordre $p^2.2\omega(n_1p+1)$; mais comme la substitution iA ne permute pas les cycles de K_0, l'ordre des groupes G'_2 sera $p.\omega(n_1p+1)$.

Le déterminant de la substitution aC étant a^2m^2, sa congruence caractéristique est

$$s^2 - ams + a^2m^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

d'où

$$s \equiv am\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Pour que la forme canonique de aC soit réelle, il faut donc que p soit de la forme $3h+1$. On trouve ainsi

$$aC = \left| \xi', \eta' \quad am\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\xi', am\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\eta' \right|.$$

La condition relative au nombre p étant remplie, aC est permutable à deux des groupes K, que nous désignerons par K', K''. Les substitutions aC^r sont les seules permutables à ces groupes; en effet, dans le cas contraire, H' contiendrait un groupe d'un ordre au moins égal à 6ω, à substitutions échangeables entre elles (n° 7); par conséquent il existerait, entre quatre lettres, un groupe de l'ordre 6 ou 12, contenant exclusivement des substitutions échangeables entre elles, ce qui est absurde. Or, si l'on a

$$a \equiv \frac{1}{m}\frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

la substitution aC est échangeable aux substitutions de K'; si

$$a \equiv \frac{1}{m}\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

elle est échangeable à celles de K''. Dans le premier cas H' contient la substitution $m\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, dans le second $m\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$; s'il contient l'une et l'autre, il contient leur produit m^2, et, en vertu du n° 5, m^3, et par suite m, c'est-à-dire qu'on peut faire $m=1$. Soient, pour abréger, C' et C'' les substitutions qui répondent aux deux valeurs de a:

$$C' = \left| \xi', \eta' \quad \xi', -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\eta' \right|, \qquad C'' = \left| \xi', \eta' \quad -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\xi', \eta' \right|;$$

C'' n'est pas la transformée de C' par une substitution de H'; c'est ce

qu'on voit sans calcul, en se souvenant de la correspondance qui a lieu entre les substitutions de H' et celles du groupe alterné entre quatre lettres. L'ordre du groupe G_1, formé par les substitutions de G échangeables à celles de K', peut évidemment être exprimé par $p^2 . 3(n_2 p + 1)$; celui de G'_1 est donc $p . 3(n_2 p + 1)$. Le groupe G_2 est de l'ordre $p^2 . 3\omega(n_2 p + 1)$. Or les substitutions communes à G_2 et H' sont les aC^r; s'il s'en trouve parmi elles qui ne permutent pas les cycles de K', ce ne peut être que les puissances de C''; cette circonstance ne se présente donc que dans le cas où l'on peut faire $m = 1$. Par suite l'ordre du groupe G'_2 sera $p\omega(n_2 p + 1)$ si $m = 1$; mais il sera $p . 3\omega(n_2 p + 1)$ dans le cas contraire. Quant aux groupes analogues qui répondent à K'', il suffit de remplacer n_2 par une autre lettre n_3. Des substitutions C', C'' on déduit, en les transformant par A, B, AB, six autres substitutions, échangeables respectivement aux substitutions de six autres des groupes K_r. Donc on a quatre groupes de l'espèce G_1 qui sont de l'ordre $p^2 . 3(n_2 p + 1)$, et quatre de l'ordre $p^2 3(n_3 p + 1)$.

De ce qui précède on tire les conclusions suivantes:

L'ordre de G est déterminé par la formule

$$O = p^2 . 12\omega(n' p^2 + 6 n_1 p + 4 n_2 p + 4 n_3 p + 1).$$

On a $n_1 = 0$, quand p est de la forme $12h + 7$ ou $12h + 11$, et quand H' ne contient pas la substitution i,

$n_2 = n_3 = 0$, quand p est de la forme $12h + 5$ ou $12h + 11$,

$n_2 = 0$, quand G ne contient pas la substitution $m\dfrac{1 + \sqrt{-3}}{2}$,

$n_3 = 0$, quand G ne contient pas la substitution $m\dfrac{1 - \sqrt{-3}}{2}$.

Les nombres n_r sont compatibles avec l'existence d'un groupe du degré p et de l'ordre $p . \pi_1 . \pi'_2(n_r p + 1)$, contenant un groupe de l'ordre $p . \pi_1(n_r p + 1)$; pour $r = 1$ on a $\pi_1 = 2$, $\pi'_2 = \dfrac{\omega}{2}$; pour $r = 2$ et $r = 3$, on a $\pi_1 = 3$, et, si H' contient la substitution m, $\pi'_2 = \dfrac{\omega}{3}$; dans le cas contraire on a $\pi'_2 = \omega$. Enfin G contient des groupes des ordres

$$p^2 . 2\omega(n_1 p + 1), \; p^2 . 3\omega(n_2 p + 1), \; p^2 . 3\omega(n_3 p + 1).$$

11. Quand H' est octaédrique, on a aussi $p > 3$. Les substitutions de H' sont: les substitutions d'un groupe tétraédrique où l'on a $m = 1$, les 6ω transformées des aD, les 6ω transformées des aBD. On connaît déjà les groupes K_r qui sont permutables aux substitutions tétraédriques, et l'on connaît les substitutions tétraédriques qui sont échangeables aux substitutions de ces groupes; mais évidemment on ne peut employer immédiatement ce qui a été dit sur l'ordre des groupes G_1, G'_1, G_2, G'_2 qui s'y rapportent.

Les substitutions aD ou $|\xi, \eta \quad ae\xi, aei\eta|$ sont permutables aux groupes K_0 et K_∞, comme le sont les aA, pourvu que $p = 4h + 1$; en effet e est réel en même temps que ξ. Donc le groupe G_1 correspondant à K_0 est de l'ordre $p^2 . 2(n_1 p + 1)$, si H' contient la substitution i, mais ne contient pas e. Si H' contient e il contient aussi i; en effet D^2A se réduit à $e^2 i$; dans ce cas l'ordre de G_1 est $p^2 . 4(n_1 p + 1)$. Le groupe G_2 est de l'ordre $p^2 . 4\omega(n_1 p + 1)$; G'_2 est de l'ordre $p\omega(n_1 p + 1)$, quand H' contient e, mais de l'ordre $p . 2\omega(n_1 p + 1)$ dans le cas contraire; c'est ce qu'on voit en remarquant que la substitution $e^{-1} i^{-1} D$ ne permute pas les cycles de K_0.

On a vu, au numéro précédent, que les substitutions aC^r sont permutables aux deux groupes K', K''; évidemment elles sont les seules substitutions de H' permutables à ces groupes. Dans le cas qui nous occupe, les groupes K', K'', ainsi que les substitutions C'^r, C''^r, se transforment l'un dans l'autre au moyen de la substitution

$$F = ABD.$$

En effet, dans le groupe symétrique entre les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, qui est isomorphe à H', la substitution $(\alpha\beta\gamma)$ correspond à C, $(\alpha\beta)$ à F, donc $F^{-1}CF$ et C^2 correspondent à $(\alpha\gamma\beta)$ d'où

$$F^{-1}CF = aC^2;$$

comme d'ailleurs C a son déterminant congru à 1, on doit avoir

$$F^{-1}CF = \pm 1 . C^2,$$

d'où

$$F^{-1}C^3F = \pm 1 . C^6;$$

or, comme on a $C^3 = -1$, on en conclut qu'il faut prendre le signe inférieur, donc

$$F^{-1}CF = -C^2.$$

En faisant, pour un moment, $\alpha = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$, on a

$$\alpha C = C', \qquad \frac{1}{\alpha}C = C'',$$

$$F^{-1}C'F = -\alpha C^2 = \frac{1}{\alpha^2}C^2 = C''^2,$$

$$F^{-1}C''F = -\frac{1}{\alpha}C^2 = \alpha^2 C^2 = C'^2.$$

Ainsi, dans le résultat final, les deux termes au coefficient 4 qui se présentent dans le cas où H est tétraédrique, se réunissent ici en un seul terme au coefficient 8. Les ordres des groupes G_1, G_1', G_2, G_2' sont évidemment les mêmes que dans le cas précédent en supposant $m = 1$.

On a

$$aBD = |\, \xi, \eta \quad ar e\eta, \, asei\xi \,|;$$

la congruence caractéristique de cette substitution étant

$$\sigma^2 + a^2e^2i \equiv 0 \pmod{p},$$

elle se réduit à la forme canonique

$$aBD = |\, \xi', \eta' \quad ae\sqrt{-i}\xi', \, -ae\sqrt{-i}\eta' \,|.$$

Pour que ξ', η' soient réels, il faut que $e\sqrt{-i}$ le soit. En supposant $p = 4h + 1$, e est réel; par conséquent il faut que $-i$ soit résidu quadratique de p, c'est-à-dire que p doit être de la forme $8h' + 1$. A cette condition aBD est permutable à deux des groupes K_r, que nous désignerons par K''', K''''; d'autre côté on voit que les a et aBD sont les seules substitutions de H' permutables à ces groupes. Si maintenant H' contient la substitution $e\sqrt{-i}$, on peut faire

$$a = \pm \frac{1}{e\sqrt{-i}};$$

on obtient ainsi les deux substitutions

$$|\xi', \eta' \quad \xi', -\eta'|, \qquad |\xi', \eta' \quad -\xi', \eta'|,$$

échangeables respectivement aux substitutions de K''' et de K''''. D'ailleurs ces substitutions sont les transformées l'une de l'autre, car en effet on a

$$A^{-1}BDA = -BD;$$

K'''' est donc la transformée de K''' par A. Il s'ensuit qu'en transformant le groupe G_1 correspondant à K''' par les substitutions de H', on obtient douze groupes G_1; tous de l'ordre $p^2.2(n_3p+1)$. Les groupes G_1', G_2, G_2' ont respectivement pour ordre $p.2(n_3p+1)$, $p^2.2\omega(n_3p+1)$, $p\omega(n_3p+1)$, comme on le voit aisément.

Quand $p = 4h+3$, le nombre n_3 est nécessairement nul; en effet la supposition contraire entraînerait l'existence d'un groupe du degré p et de l'ordre $p.2(n_3p+1)$.

On a donc le résultat suivant:

$$O = p^2.24\omega.(n'p^2 + 6n_1p + 8n_2p + 12n_3p + 1);$$

$n_1 = 0$, quand $p = 24h + 7, 11, 19, 23$, et quand H' ne contient pas la substitution i;

$n_2 = 0$, quand $p = 24h + 5, 11, 17, 23$, et quand H' ne contient pas la substitution $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$;

$n_3 = 0$, quand $p = 24h + 5, 7, 11, 13, 19, 23$, et quand H' ne contient pas la substitution $e\sqrt{-i}$.

Les nombres n_r admettent l'existence d'un groupe du degré p et de l'ordre $p\pi_1\pi_2'(n_rp+1)$, contenant un autre de l'ordre $p\pi_1(n_rp+1)$, où les nombres π_1, π_2' sont déterminés de la manière suivante:

pour $r = 1$, on a $\pi_1 = 4$, $\pi_2' = \frac{\omega}{4}$, ou $\pi_1 = 2$, $\pi_2' = \omega$, suivant que H' contient e ou non.

$$r = 2, \qquad \pi_1 = 3, \qquad \pi_2' = \frac{\omega}{3};$$

$$r = 3, \qquad \pi_1 = 2, \qquad \pi_2' = \frac{\omega}{2}.$$

Enfin le groupe G contient des groupes des ordres

$$p^2.4\omega(n_1p+1),\ p^2.3\omega(n_2p+1),\ p^2.2\omega(n_3p+1).$$

12. Quand H' est icosaédrique, le nombre p est de l'une des formes $10h+1$, $10h-1$. Par une analyse toute semblable à la précédente on trouve:

$$O=p^2.60\omega(n'p^2+12n_1p+20n_2p+30n_3p+1),$$

où

$n_1=0$, quand $p=60h+19, 29, 49, 59$, et quand H' ne contient pas la substitution θ;

$n_2=0$, quand $p=60h+11, 29, 41, 59$, et quand H' ne contient pas la substitution $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$;

$n_3=0$, quand $p=60h+11, 19, 31, 59$, et quand H' ne contient pas la substitution i.

Le nombre n_r admet l'existence d'un groupe du degré p et de l'ordre $p\omega(n_rp+1)$, contenant un autre de l'ordre $p\pi_1(n_rp+1)$, où pour $r=1, 2, 3$, le nombre π_1 est respectivement égal à $5, 3, 2$. Le groupe G contient des groupes des ordres $p^2.5\omega(n_1p+1)$, $p^2.3\omega(n_2p+1)$, $p^2.2\omega(n_3p+1)$.

On remarque que dans les cas où H' est de l'une des trois types polyédriques, les coefficients qui, dans l'expression de O, multiplient les termes en n_rp, sont les nombres des sommets, des faces et des arêtes des polyèdres correspondants.

13. Le cas où G est de la seconde espèce, α étant nul, est facile à traiter. En effet, I_0 ne contient que les puissances de la substitution

$$t=|\,x, y \quad x+(y)_{p-1}, y+1\,|;$$

par conséquent il ne contient qu'un seul groupe K de l'ordre p, qui est formé des substitutions

$$t^{ap}=|\,x, y \quad x+a, y\,|.$$

En supposant K contenu dans n_1 des groupes I_r, il existera un groupe G_1' du degré p et de l'ordre $p\pi_1(n_1p+1)$, où le nombre π_1 est l'ordre

du groupe renfermant les substitutions de H' échangeables à t^p. Or, les substitutions de H' étant toutes de la forme

$$\left| x\,, y \quad ax + E\left(\frac{ay}{p}\right)\,, ay \right|,$$

on a évidemment $\pi_1 = 1$, d'où $n_1 = 0$. Donc l'ordre de G est exprimé par la formule

$$O = p^2\pi(n'p^2 + 1).$$

14. De ce qui est dit aux numéros précédents on peut conclure que, si $\alpha = 0$ et $\pi = 1$, on a $n = 0$. En effet, sous cette hypothèse le groupe G est de l'ordre $p^2(n'p^2 + 1)$, et contient $n'p^2 + 1$ groupes de l'ordre p^2. Deux quelconques de ces groupes n'ayant en commun que la substitution identique, le nombre des substitutions des ordres p et p^2 est égal à $(p^2 - 1)(n'p^2 + 1)$; ces substitutions déplacent tous les éléments. Les substitutions qui ne déplacent pas un élément donné quelconque $u_{x,y}$ sont en nombre $n'p^2 + 1$; par conséquent elles coïncident avec les $n'p^2 + 1$ substitutions dont l'ordre est premier à p, en d'autres termes, ces dernières ne déplacent aucun élément. Donc $n' = n = 0$.

On a ainsi le théorème suivant, analogue au premier des théorèmes de M. Mathieu, cités plus haut:

Tout groupe transitif G du degré p^2 contient un groupe transitif Γ d'ordre p^2; si G ne contient pas de groupe plus général dont les substitutions sont permutables à Γ, G coïncide avec Γ.

15. Soit maintenant $\alpha = 1$, et supposons que G soit de la première espèce. Un groupe K de l'ordre p^2 contenu dans I_0 et I_1 pourrait être transitif ou intransitif. Si K est intransitif il est formé des substitutions $\theta^m\theta_1^{m_1}$; une substitution T de I_1, étrangère à K, transformera θ_0 en θ_0^a, car évidemment θ_0 et ses puissances sont les seules substitutions de K qui déplacent tous les éléments. Par conséquent T aura la forme suivante:

$$T = |\, x\,, y \quad ax + \varphi_1(y)\,, \varphi_2(y)\,|.$$

De plus T transformera θ_1 en $\theta^b\theta_1^c$, ce qui donne

$$T = \left| x\,, y \quad ax + \varphi_1(y)\,, \frac{a}{c}y - \frac{b}{c} \right|.$$

Pour que cette substitution soit de l'ordre p, il faut que

$$a \equiv c \equiv 1 \pmod{p};$$

mais alors T serait contenu dans I_0, ce qui est absurde. Donc le groupe K ne peut être intransitif.

Si K est transitif, il dérive de deux substitutions échangeables entre elles, S et T, dont l'une fait varier l'indice y; on peut donc supposer

$$S = \theta_0^a \theta_1^b t, \qquad T = \theta_0^c \theta_1^d;$$

mais on trouve

$$S^{-1}TS = t^{-1}Tt = \theta_0^{c-d}\theta_1^d,$$

donc d est égal à zéro. Par conséquent il est permis de faire

$$S = \theta_1^b t, \qquad T = \theta_0.$$

Or I_1 dérive des trois substitutions θ_0', θ_1', t' analogues respectivement à θ_0, θ_1, t, et l'on voit que θ_0', qui est échangeable à θ_1' et à t', ne peut être étrangère à K; en effet, dans ce cas, les p^3 substitutions de I_1 seraient échangeables entre elles, ce qui est absurde. De plus, θ_0' ne peut être une puissance de θ_0, car alors I_1, étant entièrement déterminé par θ_0' et S, se confondrait avec I_0. Donc on peut supposer

$$\theta_0' = \theta_0^a \theta_1^b t, \qquad t' = \theta_0.$$

Ces substitutions déterminent complètement I_1; d'ailleurs, aux p valeurs qu'on peut donner au nombre a répondent p groupes de l'ordre p^3, tous contenant K et contenus dans G; en effet on a

$$\theta_1^{-c}\theta_0'\theta_1^c = \theta_0^{a+c}\theta_1^b t, \qquad \theta_1^{-c}t'\theta_1^c = t' = \theta_0.$$

Il en résulte que le groupe G contient un groupe G_1, dont les substitutions sont permutables à K, et dont l'ordre est égal à

$$p^3\pi'(p+1),$$

π' étant un diviseur de π. D'autre part, G ne contient d'autres groupes de la même espèce que G_1; c'est ce que nous démontrerons, en faisant

voir qu'on a nécessairement $b = 0$. Pour simplifier les calculs, introduisons, au lieu de x, le nombre

$$\xi = x - b(y)_2.$$

On trouve

$$\theta_0 = t' = |\xi, y \quad \xi + 1, y|, \qquad \theta_1 = |\xi, y \quad \xi + y, y|,$$

$$t = |\xi, y \quad \xi - by, y + 1|, \qquad \theta_0' = \theta_1^b t = |\xi, y \quad \xi, y + 1|.$$

La substitution θ_1' doit être échangeable à θ_0', en ne faisant pas varier l'indice ξ; elle doit en outre satisfaire à la relation

$$t'^{-1}\theta_1' t' = \theta_0'^{-1}.\theta_1';$$

donc elle aura la forme suivante

$$\theta_1' = |\xi, y \quad \xi, y + \xi + a|.$$

Ainsi le groupe G_1, contenant les deux substitutions

$$|\xi, y \quad \xi + y, y|, \qquad |\xi, y \quad \xi, y + \xi|,$$

contiendra toute substitution linéaire et homogène par rapport aux indices ξ, y dont le déterminant est congru à $1 \pmod p$ (voir le *Traité des substitutions* de M. Jordan, n° 121), entre autres celle-ci

$$\left|\xi, y \quad r\xi, \frac{1}{r}y\right| = \left|x, y \quad rx + b\frac{r^2 - 1}{2r}y - b\frac{r^2 - 1}{2r^2}y^2, \frac{1}{r}y\right|,$$

où r peut avoir toute valeur non congrue à zéro. Or cette substitution appartient évidemment au groupe H; donc comme nous avons supposé que les substitutions de ce groupe soient contenues dans l'expression

$$|x, y \quad \alpha x + \beta y + \gamma, \delta y + \varepsilon|,$$

il faut qu'on ait $b = 0$, comme nous l'avons annoncé. On a vu en même temps que le groupe H contient toutes les substitutions

$$\left|x, y \quad rx, \frac{1}{r}y\right|;$$

comme d'ailleurs toutes les substitutions de H sont permutables à K, on

a $\pi' = \pi$. L'ordre de G_1 est donc $O' = p^3\pi(p + 1)$, celui de G est $O = p^3\pi(n'p^2 + p + 1)$, ou bien, puisque O est divisible par O',

$$O = p^3\pi(p + 1)(n''p^2 + 1).$$

Le résultat final se résume donc comme il suit:

Si $\alpha = 1$, et que G soit de la première espèce, on a ou

$$O = p^3\pi(n'p^2 + 1),$$

π étant un diviseur de $(p - 1)^2$, ou

$$O = p^2(p - 1)\pi_1(p + 1)(n'p^2 + 1) = \frac{p^2(p^2 - 1)(p^2 - p)}{\delta}(n'p^2 + 1),$$

$\pi_1 = \frac{p - 1}{\delta}$ étant le nombre des substitutions de la forme $| x, y \quad ax, y |$ contenues dans G. Quand la première formule a lieu, G ne contient d'autres substitutions linéaires que celles de H. En effet, si la substitution linéaire S est étrangère à H et, par suite, non permutable à I_0, le groupe I_1, transformé de I_0 par S, contiendra le groupe (θ_0, t), ce qui est contre l'hypothèse, si S appartient à G.

16. Passons au cas où G est de la seconde espèce, α étant égal à 1. D'abord on voit, comme au numéro précédent, qu'un groupe K de l'ordre p^2, contenu dans I_0 et I_1, ne peut être intransitif. Si K était transitif, il serait formé des puissances d'une seule substitution

$$t' = \theta^a\theta_1^b t,$$

mais alors I_0 et I_1, étant complètement déterminés par la substitution t', se confondraient, ce qui est contre l'hypothèse. Ainsi deux des groupes I_r ne peuvent contenir un même groupe d'ordre p^2. Donc

$$O = p^3\pi(n'p^2 + 1),$$

π étant un diviseur de $p - 1$.

17. Dans les cas où $\alpha > 1$, deux quelconques des groupes I_r, par exemple I_0 et I_1, ne peuvent contenir un même groupe transitif dont l'ordre surpasse p^2. En effet ce dernier groupe contiendrait nécessaire-

ment ϑ_0, ϑ_1 et une substitution de la forme $\vartheta_2^{m_2}\vartheta_3^{m_3}\dots\vartheta_a^{m_a}t$; or ces substitutions déterminent complètement le groupe de l'ordre p^{a+2} qui les contient, de sorte que I_0 et I_1 se confondraient. Donc si I_0 et I_1 contiennent un même groupe K de l'ordre p^{a+1}, celui-ci est intransitif, et par suite il dérive des substitutions $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_a$. Cherchons les substitutions qui sont permutables à K.

Nous désignons par $c_0, c_1, \dots, c_{p-1}$ les cycles de ϑ_0, de sorte que c_y soit une substitution qui permute circulairement les éléments dont le second indice est congru à y, et qu'on ait

$$\vartheta_0 = \prod_0^{p-1}{}_y c_y .$$

Si maintenant U désigne une substitution permutable à K, U transformera chaque substitution c_y en une puissance d'une autre, par exemple c_y en $c_{\psi(y)}^{f(y)}$; donc on a

$$U = | x, y \quad xf(y) + f_1(y), \psi(y) |.$$

Or, comme K est permutable à t, et contient la substitution

$$\vartheta_a = c_a \cdot c_{a+1}^{(a+1)_a} \cdot c_{a+2}^{(a+2)_a} \dots c_{p-1}^{(p-1)_a},$$

il contient en général la suivante

$$c_z \cdot c_{z+1}^{(a+1)_a} \cdot c_{z+2}^{(a+2)_a} \dots c_{p-a+z-1}^{(p-1)_a} = S_z .$$

Evidemment K dérive des substitutions $S_0, S_1, \dots, S_{p-1}$; donc pour que U soit permutable à K, il est nécessaire et il suffit que U transforme chacune des substitutions S_z en une substitution T de K, laquelle, comme S_z, est composée de $p - a$ cycles. Les substitutions de K ayant la forme

$$| x, y \quad x + F(y), y |,$$

où $F(y)$ est une fonction entière de y du degré a, on trouve les substitutions T en déterminant la fonction $F(y)$ de manière qu'elle s'annule pour a valeurs incongrues par rapport au module p. Soit $y_0, y_1, \dots, y_{a-1}$ ces valeurs; on aura

$$F(y) = M(y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_{a-1}),$$

M étant une constante, et

$$T = | x, y \quad x + F(y), y | = \Pi c_y^{F(y)}.$$

Comme d'ailleurs K contient toutes ces substitutions, on peut énoncer le critérium de la manière suivante: il faut et il suffit que U transforme les substitutions T les unes dans les autres. Or on'a

$$U^{-1}TU = \Pi c_{\psi(y)}^{f(y).F(y)},$$

donc il faut que

$$f(y).F(y) \equiv F'[\psi(y)]$$

$$\equiv M'[\psi(y) - \psi(y_0)][\psi(y) - \psi(y_1)] \ldots [\psi(y) - \psi(y_{a-1})] \pmod p,$$

ou bien, en posant $\frac{M'}{M} \equiv N$,

$$(7) \qquad f(y) \equiv N \frac{[\psi(y) - \psi(y_0)][\psi(y) - \psi(y_1)] \ldots [\psi(y) - \psi(y_{a-1})]}{(y - y_0)(y - y_1) \ldots (y - y_{a-1})} \pmod p.$$

Quand $a = p - 1$, cette congruence ne dit rien, puisque on ne peut donner à y d'autre valeur que y_{p-1}, sans annuler le numérateur et le dénominateur. Et, en effet, toute substitution de la forme

$$| x, y \quad xf(y) + f_1(y), \psi(y) |$$

est dans ce cas permutable à K, qui contient toutes les substitutions c_y.

Quand $a = p - 2$, on peut faire $y = y_{p-1}$, et $y = y_{p-2}$; on trouve ainsi, en vertu du théorème de Wilson,

$$\frac{f(y_{p-1})}{y_{p-1} - y_{p-2}} \equiv \frac{N}{\psi(y_{p-1}) - \psi(y_{p-2})}, \qquad \frac{f(y_{p-2})}{y_{p-2} - y_{p-1}} \equiv \frac{N}{\psi(y_{p-2}) - \psi(y_{p-1})},$$

d'où

$$f(y_{p-1}) \equiv f(y_{p-2});$$

comme d'ailleurs y_{p-1} et y_{p-2} sont arbitraires, on conclut que $f(y)$ est constant. Donc si $a = p - 2$, on a

$$U = | x, y \quad ax + f_1(y), \psi(y) |.$$

En effet, K dérive des substitutions $c_y . c_{y+1}^{-1}$, ou bien des $c_y . c_{y_1}^{-1}$, lesquelles par U sont transformées en $c_{\psi(y)}^a . c_{\psi(y_1)}^{-a}$.

Supposons maintenant $\alpha < p - 2$, $\alpha > 0$, et par conséquent $p > 3$. En faisant dans la congruence (7) successivement $y = y_{p-1}$, $y = y_{p-2}$, et divisant les résultats, on a

$$(8) \qquad \frac{f(y_{p-1})}{f(y_{p-2})}$$

$$\equiv \frac{[\psi(y_{p-1}) - \psi(y_0)][\psi(y_{p-1}) - \psi(y_1)]\cdots[\psi(y_{p-1}) - \psi(y_{\alpha-1})]}{[\psi(y_{p-2}) - \psi(y_0)][\psi(y_{p-2}) - \psi(y_1)]\cdots[\psi(y_{p-2}) - \psi(y_{\alpha-1})]} \cdot \frac{(y_{p-2} - y_0)(y_{p-2} - y_1)\cdots(y_{p-2} - y_{\alpha-1})}{(y_{p-1} - y_0)(y_{p-1} - y_1)\cdots(y_{p-1} - y_{\alpha-1})}.$$

Cette congruence, linéaire en y_0 et $\psi(y_0)$, peut être mise sous la forme suivante

$$(9) \qquad \psi(y_0) \equiv \frac{Ay_0 + B}{Cy_0 + D}.$$

Or on peut évidemment remplacer y_0 par chacun des nombres y_α, $y_{\alpha+1}$, ..., y_{p-2}, sans autre changement; de plus la congruence (9) est aussi satisfaite en remplaçant y_0 par y_{p-1} ou par y_{p-2}, puisque par là (8) est satisfaite identiquement. Donc on a

$$(10) \qquad \psi(y) \equiv \frac{Ay + B}{Cy + D}$$

pour $y \equiv y_0, y_\alpha, y_{\alpha+1}, \ldots, y_{p-1}$; le nombre de ces valeurs, $p - \alpha + 1$, est au moins égal à 4.

En traitant y_1 comme on a traité y_0, on tire de (8) une nouvelle congruence

$$\psi(y) \equiv \frac{A'y + B'}{C'y + D'},$$

qui a lieu pour les valeurs suivantes de y:

$$y_1, y_\alpha, y_{\alpha+1}, \ldots, y_{p-1}.$$

Donc on a

$$\frac{Ay + B}{Cy + D} \equiv \frac{A'y + B'}{C'y + D'}$$

pour les valeurs y_α, $y_{\alpha+1}$, ..., y_{p-1}, dont le nombre est égal ou supérieur à 3, donc cette congruence est identique, c'est-à-dire que la congruence (10) est satisfaite par $y \equiv y_1$. On démontre de la même manière qu'elle

est satisfaite par $y \equiv y_2, y_3, \ldots, y_{\alpha-1}$. Donc enfin elle est satisfaite par toute valeur de y; comme d'ailleurs $\phi(y)$ ne peut être infini, ni constant, on conclut que

$$C \equiv 0, \qquad \phi(y) \equiv cy + d.$$

En reportant cette valeur dans (8), il vient

$$f(y_{p-1}) \equiv f(y_{p-2});$$

y_{p-1} et y_{p-2} étant arbitraires, cela veut dire que $f(y)$ est une constante. Donc on a

$$U = | x, y \quad ax + f_1(y), cy + d |.$$

Par ce résultat on est en mesure de traiter en même temps tous les cas où $\alpha > 1$, $\alpha < p - 2$. En effet la substitution U ne peut être de l'ordre p où p^2 que si $a \equiv c \equiv 1 \pmod p$, mais alors U est contenue dans I_0. Par suite ce groupe n'a aucun groupe de l'ordre $p^{\alpha+1}$ en commun avec un autre des groupes I_r. On peut donc conclure que, si $\alpha > 1$, $\alpha < p - 2$, on a

$$O = p^{\alpha+2}\pi(n'p^2 + 1).$$

Quand $p > 3$, $\alpha = p - 2$, on sait que I_0 ne peut avoir qu'un seul groupe K en commun avec d'autres groupes I_r. En désignant par $n_1 p + 1$ le nombre des groupes I_r qui contiennent K, on a

$$O = p^p \pi(n_1 p + 1)(n'p^2 + 1),$$

où $p^p\pi(n_1 p + 1)$ est l'ordre du groupe G_1, formé de celles des substitutions de G qui sont permutables à K. Comme ces substitutions remplacent les éléments d'un même cycle par ceux d'un autre cycle, il existe un groupe G_1' du degré p, isomorphe à G_1, et de l'ordre

$$p\pi_1(n_1 p + 1),$$

π_1 désignant le nombre des valeurs que prend la constante b dans les expressions $| x, y \quad ax, by |$ ou $\left| x, y \quad bx + E\left(\frac{by}{p}\right), by \right|$ des substitutions de H'. En effet, les seules substitutions de G_1 qui ne permutent pas les cycles c_y sont les $| x, y \quad ax + f_1(y), y |$. Parmi les substitutions de G_1, celles qui sont de l'ordre p ou p^2 ont la forme $| x, y \quad x + f_1(y), \phi(y) |$,

et sont par conséquent échangeables à ϑ_0; donc G_1 contient un groupe G_2 dont les substitutions sont échangeables à ϑ_0, et dont l'ordre est $p^p\pi_2(n_1p+1)$, π_2 désignant le nombre des substitutions de G qui sont de la forme $|x, y \quad x, by|$. Par suite G_1' contient un groupe de l'ordre

$$p\pi_2(n_1p+1).$$

Particulièrement, si G est de la seconde espèce, on a $\pi_2 = 1$, d'où $n_1 = 0$; donc

$$O = p^p\pi(n'p^2+1).$$

On verra plus loin qu'on a $n' = 0$ dans tous les cas où $\alpha = p - 2$, $p > 3$.

Si $\alpha = p - 1$, on a

$$O = p^{p+1}\pi(n_1p+1)(n'p^2+1),$$

et l'on sait, comme dans le cas précédent, que G contient un groupe non primitif G_1 de l'ordre $p^{p+1}\pi(n_1p+1)$. Il existe bien un groupe G_1' du degré p, isomorphe à G_1, mais comme celui-ci peut contenir des substitutions de la forme $|x, y \quad xf(y)+f_1(y), y|$, qui, quoique étrangères à H, ne déplacent pas les cycles c_y, l'ordre de G_1' n'est pas généralement un multiple de $p(n_1p+1)$.

§ 4. *Conséquences tirées de la primitivité ou de la non-primitivité des groupes.*

18. Il résulte des travaux de M. Jordan (Journal für Mathematik, Bd. **79**, et Bulletin de la Soc. Math., t. **1**) que, pour les plus grandes valeurs de α, le groupe G ne peut être primitif, quand il ne contient pas le groupe alterné. En effet, d'après une formule du premier des Mémoires cités (p. 256), le degré n d'un groupe primitif, ne contenant pas le groupe alterné, mais contenant une substitution de l'ordre p à q cycles, doit vérifier l'inégalité

$$n < q(p+q)\log q + \frac{q(p-q)}{2} + p + 3q,$$

où l'on a supposé $q > 2$; si $q = 2$ on a

$$n \leq 2p + 3,$$

et si $q = 1$,

$$n \leqq p + 2.$$

Dans notre cas on a $n = p^2$; comme le groupe contient la substitution ϑ_α, qui est composée de $p - \alpha$ cycles de p lettres, on peut faire $q = p - \alpha$. En supposant $\alpha = p - 1$, on a $q = 1$; donc, ayant $p^2 > p + 2$, le groupe G ne peut être primitif, sans contenir le groupe alterné. En faisant $\alpha = p - 2$, on a $q = 2$; il faudra donc que $p^2 \leqq 2p + 3$, d'où $p = 3$; donc si $\alpha = p - 2$, le groupe ne peut être primitif excepté pour $p = 3$.

Pour les autres valeurs de q, on trouve que le groupe ne peut être primitif, quand on a

$$p > \frac{1}{2} q \log q + \frac{1}{4} q + \frac{1}{2}$$
$$+ \frac{1}{2} q \log q \sqrt{1 + \frac{5}{\log q} - \frac{7}{4(\log q)^2} + \frac{2}{q \log q} + \frac{13}{q(\log q)^2} + \frac{1}{(q \log q)^2}}.$$

Quand $q \geqq 7$, le radical est inférieur à 2, de sorte que l'inégalité précédente peut être remplacée par celle-ci:

$$p > \frac{3}{2} q \log q + \frac{1}{4} q + \frac{1}{2}.$$

En calculant, pour chaque valeur de q, la limite de p, on en déduit celle que α ne peut dépasser, quand le groupe est primitif sans contenir le groupe alterné. Voici les résultats pour les premières valeurs de p.

p	$\lim(\alpha)$	p	$\lim(\alpha)$	p	$\lim(\alpha)$
3	1	13	8	29	20
5	2	17	11	31	22
7	4	19	12	37	27
11	7	23	15	41	30.

Dans le Mémoire inséré au Bulletin de la Société Mathématique M. Jordan a donné, pour les valeurs de q inférieures à 6, une limite plus resserrée, savoir

$$n \leqq pq + q + 1,$$

en supposant $p > q$. On en tire, en faisant $n = p^2$,

$$p = q + 1.$$

Il s'ensuit que, lorsque $p = 5$ et $p = 7$, la vraie limite de α est 1. Ainsi, p étant > 3, G ne peut être primitif quand $\alpha = p - 3$.

Quand par les raisons qui viennent d'être exposées, ou par d'autres, on sait que le groupe G est non-primitif, la distribution des éléments en systèmes est une de celles qu'admet le groupe I_0. En particulier, si $\alpha > 0$, les systèmes sont formés par les éléments qui répondent à une même valeur du second indice.

Les groupes non-primitifs méritent une étude spéciale, non seulement parce que, dans certains cas, ils sont les seuls possibles, mais aussi parce qu'un groupe primitif peut en contenir un autre qui ne l'est pas, et que la connaissance de ce dernier peut être utile à l'étude du premier.

19. Supposons que G soit non-primitif, les éléments se groupant en p systèmes, $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$, où Σ_η contient les éléments pour lesquels le second indice est congru à η. Soit Γ le groupe contenant les substitutions de G qui ne déplacent pas les systèmes, et désignons de plus par γ_η le groupe partiel entre les éléments $u_{0,\eta}, u_{1,\eta}, \ldots, u_{p-1,\eta}$ qu'on obtient par les substitutions de Γ. Tous ces groupes γ_η sont du même ordre, et se déduisent de l'un d'entre eux, en le transformant par les substitutions de G. Nous désignerons l'ordre de γ_η par

$$p\pi_1(mp + 1),$$

π_1 étant le nombre des substitutions de la forme

$$|x \quad x\psi(\eta)|$$

contenues dans γ_η. Soit enfin γ'_η le groupe dérivé de $|x \quad x + 1|$ et de ses transformées par les substitutions de Γ; γ'_η sera contenu dans γ_η et permutable à ses substitutions; son ordre sera

$$p\pi'_1(mp + 1),$$

π'_1 étant un diviseur de π_1.

Γ contient la substitution ϑ_a, qui ne déplace que les éléments des $p - \alpha$ derniers systèmes; mais il ne contient pas de substitution de l'ordre p, qui en déplace moins. Il est même facile de démontrer, qu'aucune substitution de Γ, quel que soit son ordre, laisse immobiles les éléments

de plus de α systèmes. En effet, supposons que la substitution S ne déplace que les éléments de m systèmes, et faisons

$$S = s_a \cdot s_b \ldots s_f,$$

s_ι désignant une substitution entre les éléments du système Σ_ι. En transformant S successivement par toutes les substitutions de Γ, on a une série de substitutions:

$$\begin{aligned} S' &= s'_a \cdot s'_b \ldots s'_f, \\ S'' &= s''_a \cdot s''_b \ldots s''_f, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Or le groupe qui dérive des $s_a, s'_a, s''_a, \ldots$, étant permutable aux substitutions du groupe primitif γ_a, est nécessairement transitif; donc il contient une substitution de l'ordre p, et par suite le groupe γ'_a. En multipliant un certain nombre des substitutions $S, S', S'', \ldots$, on peut donc trouver une nouvelle substitution

$$S_1 = \sigma_a \cdot \sigma_b \ldots \sigma_f,$$

où l'ordre de σ_a est égal à p. En élevant S_1 à une puissance convenable, on a une substitution de l'ordre p, ne déplaçant que les éléments de m systèmes au plus, donc

$$m \geqq p - \alpha,$$

ce qui justifie notre assertion.

En faisant $S = \vartheta_a$, le groupe Δ_a dérivant de $S, S', S'', \ldots$ aura évidemment pour ordre $p\pi'_1(mp + 1)$. Si maintenant $\pi'_1 > 1$, ce groupe contient une substitution φ qui transforme ϑ_a en ϑ_a^r, r étant différent de l'unité. Or, en supposant $a > 0$, Γ contient la substitution

$$\vartheta_{a-1} = c_{a-1} \cdot c_a^{(a)_{a-1}} \cdot c_{a+1}^{(a+1)_{a-1}} \ldots c_{p-1}^{(p-1)_{a-1}},$$

et par conséquent celles-ci

$$\varphi^{-1} \vartheta_{a-1} \varphi = c_{a-1} \cdot c_a^{r(a)_{a-1}} \cdot c_{a+1}^{r(a+1)_{a-1}} \ldots c_{p-1}^{r(p-1)_{a-1}},$$

$$\varphi^{-1} \vartheta_{a-1}^{-1} \varphi \vartheta_{a-1}^r = c_{a-1}^{r-1},$$

dont la dernière ne déplace que les éléments de $\Sigma_{\alpha-1}$; donc il faut que $\alpha = p - 1$.

Il est donc démontré que pour $\alpha > 0$, $\alpha < p - 1$, on a nécessairement $\pi'_1 = 1$, et par suite, $m = 0$. Dans tous ces cas Γ ne peut donc contenir d'autres substitutions d'ordre p que les produits des c_i^r, c'est-à-dire les substitutions $\vartheta_0^{r_0}\vartheta_1^{r_1}\dots\vartheta_\alpha^{r_\alpha}$. Les substitutions de G sont évidemment permutables à Γ, et par suite au groupe $(\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_\alpha)$; or il a été démontré, au numéro 17, que si $\alpha > 0$, $\alpha < p - 2$, les seules substitutions de cette espèce qui puissent être contenues dans G, sont celles de H. Donc, si le groupe G est non-primitif, α étant > 0 et $< p - 2$, il se confond avec H, et par suite on a

$$O = p^{\alpha+2}\pi.$$

La même chose a encore lieu si $p = 3$, $\alpha = p - 2 = 1$, comme on le voit aisément.

Quand $p > 3$, $\alpha = p - 2$, les substitutions de G doivent avoir la forme

$$|\, x, y \quad ax + f(y), \psi(y) \,|;$$

il faut donc que le nombre n' de la formule du numéro 17 soit nul.

Si $\alpha = p - 1$, le groupe Δ_α se confond avec γ'_{p-1}. Le groupe Γ en contient un autre Γ' de l'ordre $[p\pi'_1(mp + 1)]^p$; or Γ ne contient évidemment pas d'autres substitutions de l'ordre p que celles de Γ'; par suite l'ordre de Γ sera

$$p^p \pi_1'^p \pi_1''(mp + 1)^p,$$

ou $\pi'_1\pi''_1 = \pi_1$ est le nombre des substitutions de la forme $|\, x, y \quad ax, y \,|$ contenues dans G. Donc enfin on a

$$O = p^{p+1}\pi_1'^p\pi_1''\pi_2(mp + 1)^p(m_1 p + 1),$$

π_2 étant le nombre des valeurs que prend la constante b dans l'expression $|\, x, y \quad ax, by \,|$ des substitutions de H. Chacun des nombres

$$p\pi'_1\pi''_1(mp + 1), \; p\pi'_1(mp + 1), \; p\pi_2(m_1 p + 1)$$

est l'ordre d'un groupe du degré p.

20. Reprenons maintenant les groupes primitifs où $\alpha > 0$, $\alpha < p - 3$. Nous désignons par I'_m le groupe intransitif de l'ordre $p^{\alpha+1}$ contenu dans I_m, et par $c_m, c'_m, c''_m, \ldots, c_m^{(p-1)}$ les cycles de la substitution $\vartheta_0^{(m)}$, qui est échangeable à toutes les substitutions de I_m. Ainsi chaque substitution de I'_m est un produit de puissances d'un certain nombre des $c_m^{(i)}$.

Commençons par les groupes de la première espèce, en recherchant si I_0 et I_1 peuvent contenir un même groupe K de l'ordre p^2. Si K était intransitif, il serait contenu dans I'_0 et I'_1. Or nous allons démontrer que, quelle que soit l'espèce de G, les groupes I'_0 et I'_1 ne peuvent avoir de substitution commune.

En effet, une substitution commune à I'_0 et à I'_1 est le produit d'un nombre de cycles au moins égal à $p - \alpha$. Donc parmi les cycles de I'_0 il y a certainement $p - \alpha$ qui se confondent avec $p - \alpha$ cycles de I'_1, et qui seront désignés par

$$c_0^{(\alpha)}, c_0^{(\alpha+1)}, \ldots, c_0^{(p-1)};$$

les lettres de ces cycles forment autant de systèmes communes à I_0 et I_1. D'autre part les systèmes de I_1 ne peuvent pas tous se confondre avec ceux de I_0. En effet, s'il en était ainsi, le groupe qui dérive des substitutions de I_0 et de I_1 serait de l'ordre $p^{\alpha+2}\pi'(mp + 1)$, m étant différent de zéro, et il serait non-primitif, ce qui est impossible (n° 19). On peut donc supposer que le cycle c_0 contienne les lettres

$$a_1, a_2, \ldots, a_p,$$

c_1 celles-ci

$$a_1, a_2, \ldots, a_{p-q}, \qquad b_1, b'_1, \ldots, b_1^{(q-1)},$$

où

$$p - q \geqq 2, \qquad q \geqq 1;$$

car évidemment c_1 contient plus d'une lettre de l'un au moins des systèmes de I_0. Le groupe I'_0 contient une substitution S_0 qui déplace les lettres de $p - \alpha$ systèmes choisis arbitrairement; on peut donc supposer que S_0 déplace $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et les lettres de $p - \alpha - 1$ des cycles $c_0^{(\alpha)}, c_0^{(\alpha+1)}, \ldots, c_0^{(p-1)}$. En désignant généralement par C_m un produit de puissances d'un certain nombre de ces derniers cycles, on a

$$S_0 = c_0 . C_0.$$

De même I_1' contient une substitution

$$S_1 = c_1 . C_1.$$

Si maintenant $q > 1$, soit c_1^r la puissance de c_1 qui remplace $b_1^{(q-2)}$ par $b_1^{(q-1)}$; la substitution

$$S_1' = S_1^{-r} S_0 S_1^r = c_1^{-r} c_0 c_1^r . C_0$$

ne déplace pas $b_1^{(q-1)}$, mais elle déplace nécessairement une au moins des lettres $b_1, b_1', \dots, b_1^{(q-2)}$. Si elle en déplace plus d'une, on déduit de la même manière une nouvelle substitution qui en déplace moins, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une substitution dont le premier cycle contient $p - 1$ des lettres a, par exemple $a_2, a_3, \dots, a_p$, avec une seule des $b_1^{(i)}$. Par conséquent il est permis de supposer $q = 1$.

Cela posé, soit T une substitution de I_0' qui, en laissant $a_1, a_2, \dots, a_p$ immobiles, permute b_1 circulairement avec $p - 1$ autres lettres $b_2, b_3, \dots, b_p$. En transformant S_1 successivement par les $p - 1$ puissances de T, on obtient les substitutions

$$S_2 = c_2 . C_1, \qquad S_3 = c_3 . C_1, \quad \dots, \quad S_p = c_p . C_1,$$

où c_i est une substitution circulaire des lettres $a_2, a_3, \dots, a_p, b_i$. Le groupe $(S_0, S_1, \dots, S_p)$ permute les lettres $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_p$ d'une manière $p + 1$ fois transitive; par conséquent il contient une substitution V qui échange entre eux a_2 et a_3, en laissant $a_1, a_4, \dots, a_p$ immobiles. Comme nous n'avons fait aucun usage de l'ordre des lettres a, il est permis de supposer

$$S_0 = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_p) C_0,$$

d'où

$$V^{-1} S_0 V = (a_1, a_3, a_2, a_4, \dots, a_p) C_0.$$

Donc le groupe G contient la substitution $V^{-1} S_0 V . S_0^{-1}$, qui se réduit à $(a_1 a_2 a_3)$, donc il est non-primitif, symétrique ou alterné. Cela étant contre l'hypothèse, I_0' et I_1' n'ont pas de substitution commune.

Le groupe K ne peut donc être intransitif. S'il est transitif, il dérive de deux substitutions échangeables entre elles:

$$\vartheta_0, \quad \vartheta_1^{m_1} \vartheta_2^{m_2} \dots \vartheta_\alpha^{m_\alpha} t.$$

Le groupe I_1 contient une substitution ϑ'_0 échangeable à toutes les autres; comme il n'existe pas de groupe du degré p^2 et de l'ordre p^3, contenant exclusivement des substitutions échangeables entre elles, ϑ'_0 est contenu dans K; donc on peut faire

$$\vartheta'_0 = \vartheta_0^{m_0}\vartheta_1^{m_1}\vartheta_2^{m_2}\ldots\vartheta_\alpha^{m_\alpha}t.$$

Le groupe I_1 est complètement déterminé par les substitutions ϑ'_0 et $t' = \vartheta_0$. En le transformant par la substitution

$$\theta = \vartheta_1^{a_1}\vartheta_2^{a_2}\ldots\vartheta_\alpha^{a_\alpha},$$

on a un nouveau groupe, déterminé par les substitutions

$$\theta^{-1}\vartheta'_0\theta = \vartheta_0^{m_0+a_1}\vartheta_1^{m_1+a_2}\ldots\vartheta_{\alpha-1}^{m_{\alpha-1}+a_\alpha}\vartheta_\alpha^{m_\alpha}t, \qquad \theta^{-1}t'\theta = \vartheta_0.$$

Parmi les groupes qu'on obtient de cette manière, ceux qui répondent à une même combinaison de valeurs de $a_2, a_3, \ldots, a_\alpha$ ont en commun avec I_0 un même groupe d'ordre p^2. Le nombre de ces derniers groupes est $hp^{\alpha-1}$, et le nombre des groupes $I_1, I_2, \ldots$ qui les contiennent est hp^α, h étant le nombre des valeurs que peut avoir m_α. Pour le déterminer, supposons que I_1 soit défini par les substitutions

$$\vartheta'_0 = \vartheta_\alpha^{m_\alpha}t = |x, y \quad x + m_\alpha(y)_\alpha, y + 1|, \qquad t' = |x, y \quad x + 1, y|,$$

et faisons

$$\xi = x - m_\alpha(y)_{\alpha+1};$$

on trouve

$$\vartheta_r = |\xi, y \quad \xi + (y)_r, y|, \qquad t = |\xi, y \quad \xi - m_\alpha(y)_\alpha, y + 1|,$$

$$\vartheta'_0 = |\xi, y \quad \xi, y + 1|, \qquad t' = |\xi, y \quad \xi + 1, y|.$$

Comme nous supposons $\alpha > 0$, les groupes I_0 et I_1 contiennent respectivement les deux substitutions

$$|\xi, y \quad \xi + y, y|, \qquad |\xi, y \quad \xi, y + \xi|,$$

donc G, contenant les deux, contient toutes les substitutions linéaires et

homogènes en ξ et y dont les déterminants sont congrus à 1 (mod p), entre autres la suivante

$$\left|\xi, y \quad r\xi, \frac{1}{r}y\right| \quad \text{ou} \quad \left|x, y \quad rx - m_a\left\{r(y)_{a+1} - \left(\frac{y}{r}\right)_{a+1}\right\}, \frac{1}{r}y\right|.$$

Or, cette substitution, étant permutable à I_0, appartient à H, donc le coefficient de y^{a+1} dans le développement de $m_a\left\{r(y)_{a+1} - \left(\frac{y}{r}\right)_{a+1}\right\}$, à savoir

$$\frac{m_a(r^{a+2} - 1)}{r^{a+1}.2.3\ldots(a+1)},$$

est divisible par p; comme r peut avoir toute valeur non congrue à zéro, on doit avoir $m_a \equiv 0 \pmod p$, à moins que a ne soit égal à $p - 3$.

Comme nous supposons $a < p - 3$, nous avons donc $h = 0$ ou $h = 1$, et dans le dernier cas nous savons que G contient les $p - 1$ substitutions $\left|x, y \quad rx, \frac{1}{r}y\right|$ et généralement toute substitution de la forme

$$\begin{vmatrix} x & ax + by + c \\ y & dx + ey + f \end{vmatrix}$$

où $ae - bd \equiv 1 \pmod p$; ces substitutions forment un groupe d'ordre $p^2(p^2 - 1)$.

On a vu, au commencement du numéro 17, que deux des groupes I ne peuvent contenir un même groupe transitif dont le degré surpasse p^2. En vertu de ce qui a été dit au numéro 6, on peut donc préciser comme il suit l'expression de l'ordre de G:

Quand $a > 0$, $a < p - 3$, et G est de la première espèce, son ordre est exprimé par l'une des formules suivantes:

$$O = p^{a+2}\pi(n'p^{a+1} + 1),$$

$$O = p^{a+2}\pi(n'p^{a+1} + p^a + 1).$$

Dans le cas de la première formule, G ne contient d'autres substitutions linéaires que celles de H; c'est ce qu'on voit de la même manière que pour $a = 1$ (n° 15). Dans la seconde formule le nombre $n'p^{a+1} + p^a + 1$ est divisible par $p + 1$; en effet, on voit facilement que le nombre des

groupes d'ordre p^2, contenus chacun dans $p + 1$ des groupes I_r, est égal à $\frac{(n'p^{\alpha+1} + p^\alpha + 1)p^{\alpha-1}}{p + 1}$.

Quand G est de la seconde espèce, deux quelconques des groupes I_r ne peuvent avoir d'autre substitution commune que l'identique; car s'ils en avaient, ils contiendraient une même substitution de l'ordre p, laquelle appartiendrait à I'_0 et à I'_1; mais on a vu, au commencement de ce numéro, que cela est impossible. Donc si G est de la seconde espèce, α étant > 1, et $< p - 3$, on a comme pour $\alpha = 1$,

$$O = p^{\alpha+2}\pi(n'p^{\alpha+2} + 1).$$

§ 5.

21. Recherchons de quelle manière un groupe primitif du degré p^2 peut être composé. Nous désignerons par H le groupe que nous avons plus haut appelé H', en gardant du reste les notations précédentes. Le groupe primitif dont il est question dérive des substitutions des groupes $I_0, I_1, \ldots, I_{np}$ et H, ce que nous exprimerons en écrivant

$$G = (I_0, I_1, \ldots, I_{np}, H);$$

son ordre est

$$O = p^{\alpha+2}\pi(np + 1).$$

Supposons que G contienne un groupe G', permutable à ses substitutions et, par suite, transitif. Dénotons les groupes contenus dans G', ainsi que leurs ordres, en accentuant les lettres relatives aux groupes correspondants contenus dans G; on a

$$G' = (I'_0, I'_1, \ldots, I'_{n'p}, H'),$$

$$O' = p^{\alpha'+2}\pi'(n'p + 1).$$

On sait que chacun des groupes I'_r est contenu dans un des I_r; nous allons démontrer que I'_r est permutable aux substitutions de chaque groupe I_r qui le contient. En transformant les I'_r successivement par toutes les substitutions de I_0, on obtient un groupe entre les I'_r, dont l'ordre est une puissance de p; comme leur nombre est $n'p + 1$, l'un

au moins d'entre eux, par exemple I'_0, est invariable par ces transformations. Par conséquent I'_0 est contenu dans I_0, car autrement le groupe (I_0, I'_0) serait de l'ordre $p^{\alpha+2+m}$, ce qui est absurde. De plus on a $\alpha=\alpha'$ ou $\alpha=\alpha'+1$; en effet, si $\alpha>\alpha'+1$, on aurait

$$I'_0 = (\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{\alpha'}, \vartheta^a_{\alpha'+1}\vartheta^b_{\alpha'+2}\dots\vartheta^f_{\alpha-1}\vartheta^g_\alpha t);$$

en transformant ce groupe par ϑ_α, on aurait le suivant

$$(\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{\alpha'}, \vartheta^a_{\alpha'+1}\vartheta^b_{\alpha'+2}\dots\vartheta^{f+1}_{\alpha-1}\vartheta^g_\alpha t),$$

qui diffère de I'_0, ce qui est impossible. Il faut donc que $\alpha=\alpha'$ ou $\alpha=\alpha'+1$, et dans les deux cas I'_0 est évidemment permutable aux substitutions de chacun des groupes I_r qui le contient.

Premier cas, $\alpha=\alpha'$. Comme I'_r est identique au groupe I_r qui le contient, on a évidemment $n'=n$,

$$O' = p^{\alpha+2}\pi'(np+1).$$

Le groupe H' est contenu dans H et permutable à ses substitutions, car le groupe transformé de H' par une substitution de H est contenu dans H et G', et par conséquent il ne peut être que H'.

Inversement, si G', ayant pour ordre $p^{\alpha+2}\pi'(np+1)$, est contenu dans G, et si, en outre, H' est permutable aux substitutions de H, G' est permutable à celles de G; c'est ce qu'on voit presque immédiatement en remarquant qu'on a $G=(G', H)$. Si l'on excepte les groupes de la première espèce où $\alpha=0$, la condition relative au groupe H' peut être omise, puisque les substitutions de H sont échangeables entre elles. D'ailleurs, si G' n'est pas nécessairement permutable aux substitutions de G, le groupe $(I'_0, I'_1, \dots, I'_{np})$, contenu dans G', l'est toujours.

Les facteurs de composition de G sont donc: 1°, les facteurs de composition du groupe $\frac{G}{G'}$, 2°, ceux de G' (voir, pour la notation, le Mémoire de M. JORDAN: *Sur la limite de transitivité*, § 2, Bulletin de la Société Mathématique, t. 1). Si l'on excepte le cas où, α étant égal à zéro, H est icosaédrique, les facteurs qui naissent du groupe $\frac{G}{G'}$ sont des nombres premiers. Quand H est icosaédrique, H' peut l'être aussi, et dans ce cas les facteurs de composition qui précèdent ceux de G'

sont encore des nombres premiers; si non, H' ne contient que des substitutions de la forme $|x, y \quad ax, ay|$.

Second cas, $\alpha = \alpha' + 1$. Chacun des groupes I_r ne peut contenir qu'un seul des groupes I'_r. En effet si I'_0 et I'_1 étaient contenus dans I_0, on aurait

$$I'_0 = (\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{\alpha-1}, \vartheta_\alpha^m t),$$

$$I'_1 = (\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{\alpha-1}, \vartheta_\alpha^{m'} t);$$

donc G' contiendrait $\vartheta_\alpha^m t$ et $\vartheta_\alpha^{m'} t$, et par suite $\vartheta_\alpha^{m-m'}$, ce qui est contre l'hypothèse. Or, on a vu que deux des groupes I_r ne peuvent contenir un même groupe transitif de l'ordre $p^{\alpha+1}$ que dans le seul cas où $\alpha = 1$, G est de la première espèce et où l'on a

$$O = p^3\pi(p + 1)(n_1 p^2 + 1).$$

Donc, si l'on fait abstraction de ce cas, il faut que $n = n'$,

$$O' = p^{\alpha+1}\pi'(np + 1).$$

Comme G' est permutable aux substitutions de I_0, le groupe G en contient un autre G'' de l'ordre $p^{\alpha+2}\pi'(np + 1)$; d'après ce qui précède G'' est permutable aux substitutions de G, et évidemment G' est permutable à celles de G''; donc les facteurs de composition de G sont: 1°, les diviseurs premiers de $\frac{\pi}{\pi'}$, 2°, le nombre p, 3°, les facteurs de composition de G'.

Si le groupe G' est lui-même composé, la série des décompositions est arrêtée, au plus tard, quand on est parvenu à un groupe de l'ordre $p^2\pi_r(np + 1)$, où π_r est un nombre premier. En effet on ne rencontrera pas le cas qui a été excepté, comme le font voir les expressions de O trouvées au numéro précédent. Donc, à part l'exception signalée, le nombre n a la propriété de se conserver dans le cours des décompositions. Un groupe dont l'ordre est exprimé par la formule

$$O = p^{\alpha+2}\pi(n'p^{\alpha+1} + p^\alpha + 1),$$

α étant supérieur à 1, n'entre jamais dans ce cas. On aurait en effet $O' = p^{\alpha+1}\pi'(n'p^{\alpha+1} + p^\alpha + 1)$, et par conséquent G' ne contiendrait d'autres

substitutions linéaires que celles de H'; mais d'autre côté il contiendrait nécessairement la substitution $|x, y \quad x, y + x|$ (n° 20), ce qui est une contradiction.

Considérons enfin le cas d'exception. On a

$$O = p^3\pi(p + 1)(n_1 p^2 + 1), \qquad O' = p^2\pi'(n'p + 1).$$

Désignons par Γ le groupe d'ordre $p^3\pi(p + 1)$ formé des substitutions linéaires de G, et soient $I_0, I_1, \ldots, I_p$ les groupes d'ordre p^3 contenus dans Γ. On a vu que l'un des groupes $I'_0, I'_1, \ldots, I'_{n'p}$ est contenu dans I_0, et que, par suite, il a la forme $(\vartheta_0, \vartheta_1^m t)$; donc G' contient la substitution ϑ_0. Dans un autre des groupes I_r les substitutions échangeables à toutes les autres sont les t^m; on peut donc conclure que G' contient t. Donc parmi les groupes I'_r se trouve le suivant: $(\vartheta_0, t) = I'_0$, qui est contenu dans les $p + 1$ groupes $I_0, I_1, \ldots, I_p$. D'autre part I'_0, étant permutable aux substitutions de tout groupe I_r qui le contient, ne peut être contenu dans aucun des groupes $I_{p+1} \ldots I_{np}$. Il s'ensuit que chacun des I'_r est contenu dans $p + 1$ des I_r. Donc on a

$$O' = p^2\pi'(n_1 p^2 + 1).$$

Quand $p = 3$, il n'existe d'autres groupes du genre que nous considérons, que ceux où $n_1 = 0$, c'est-à-dire ceux qui sont contenus dans le groupe linéaire. Pour les autres valeurs de p, le groupe Δ qui renferme les substitutions linéaires et homogènes dont le déterminant est congru à $1 \pmod p$, et qui est contenu dans G, a pour facteurs de composition $\frac{p(p^2 - 1)}{2}$ et 2. Les substitutions de Δ sont permutables à I'_0 et par suite à H'. On en peut conclure que H' ne contient que des substitutions de la forme $|x, y \quad ax, ay|$. En effet toute substitution de H' peut être écrite sous la forme ST, où S appartient à Δ, et où T a la forme $|x, y \quad ax, y|$. Or comme Δ contient la substitution

$$\varphi = \left| x, y \quad rx, \frac{1}{r}y \right|,$$

H' contiendra $\varphi^{-1}S\varphi T$ et par suite $\varphi^{-1}S\varphi \,.\, S^{-1}$; cette substitution, faisant partie d'un groupe contenu dans Δ et permutable à ses substitutions, ne peut être que 1 ou $|x, y \quad -x, -y|$. Mais la dernière alternative

ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs de r, comme on le voit aisement; pour les autres il faut donc que $\varphi^{-1}S\varphi = S$; mais alors S est canonique en x et y, donc

$$S = \left| x\,,\, y \quad ax\,,\, \frac{1}{a}y \right|.$$

Par conséquent les substitutions de H' sont de la forme

$$U = |\, x\,,\, y \quad ax\,,\, by\,|;$$

mais, puisque $\varDelta$ contient la substitution ϑ_1, H' contient la suivante

$$\vartheta_1^{-1}U\vartheta_1\,.\,U^{-1} = \left| x\,,\, y \quad x + \frac{b-a}{a}y\,,\, y \right|,$$

ce qui exige que $b \equiv a \pmod{p}$.

Les premiers groupes composants de G sont ceux de $\frac{G}{G'}$; or ce groupe est isomorphe au groupe contenant les substitutions linéaires et homogènes de G. Donc, si l'on suppose que H contienne des substitutions dont le déterminant est non résidu quadratique de p, et qu'on désigne par $\pi'\pi''$ le nombre des substitutions de H qui ont la forme $|\,x, y \quad ax, ay\,|$ les facteurs de composition de G seront: 2, $\frac{p(p^2-1)}{2}$, les facteurs premiers de π'', les facteurs de composition de G', et l'on aura

$$\pi = 2\pi'\pi''(p-1).$$

Si au contraire H ne contient que des substitutions dont les déterminants sont résidus, le premier facteur (2) doit être omis, et l'on aura $\pi = \pi'\pi''(p-1)$. Le nombre n n'a pas ici la propriété d'être conservé en passant du groupe G au groupe G'; mais cette propriété appartient toujours au nombre N, défini par l'équation

$$O = p^m P(Np + 1),$$

P désignant l'ordre du groupe formé de celles des substitutions de G qui sont linéaires en x et y ou en $\xi \pmod{p^2}$, suivant l'espèce du groupe.

22. Voici une autre conséquence de ce qui précède, qui sans avoir beaucoup d'importance, présentera peut-être quelque intérêt, vu qu'on ne

connaît qu'un très petit nombre de cas où l'on peut reconnaître la résolubilité d'un groupe de son ordre seul:

Tout groupe dont l'ordre est p^2q ou p^2q^2, p et q étant des nombres premiers inégaux, est résoluble.

Soit G un groupe de l'ordre p^2q; il en contient un autre H, de l'ordre q. Désignons par y_0 une fonction rationnelle des éléments, invariable par les substitutions de H, mais variable par toute autre substitution; cette fonction prend, par les substitutions de G, un nombre p^2 de valeurs différentes, $y_0, y_1, \ldots, y_{p^2-1}$. En opérant dans ces fonctions les substitutions de G, on a un groupe G' entre les y, lequel est transitif et isomorphe à G. L'ordre de G' est p^2 ou p^2q. Dans le premier cas H est permutable aux substitutions de G; comme les facteurs de composition de G' sont p, p, ceux de G sont p, p, q. Si l'ordre de G' est p^2q, ce groupe en contient un autre I' de l'ordre p^2; en désignant par $p^2\pi$ l'ordre du groupe qui contient les substitutions de G' permutables à I', on a une équation de la forme

$$p^2q = p^2\pi(np + 1).$$

Or, on ne peut avoir $\pi = 1$, puisque alors n serait nul, donc il faut que $\pi = q$, $n = 0$; c'est-à-dire que les substitutions de G' sont toutes permutables à I'; par conséquent les facteurs de composition de G' qui sont en même temps ceux de G, sont q, p, p. Dans les deux cas G est donc résoluble.

Si l'ordre de G est p^2q^2, on obtient comme plus haut un groupe G' du degré p^2 isomorphe à G; son ordre est p^2, p^2q ou p^2q^2. Dans les deux premiers cas G' est résoluble, et par suite aussi G. Dans le troisième on a, comme ci-dessus, une équation de la forme

$$p^2q^2 = p^2\pi(np + 1),$$

et l'on peut supposer $q > p$. Or on ne peut avoir $\pi = 1$, donc il faudrait que q divisât π; mais π est un diviseur de $(p - 1)^2(p + 1)$, nombre dont aucun diviseur premier ne surpasse p, à moins que p ne soit égal à 2. Mais cette supposition est inadmissible, puisque l'ordre d'un groupe du quatrième degré est un diviseur de 24. Ainsi le troisième cas peut être évité. Le théorème est donc démontré.

22. La détermination du groupe que nous avons désigné par H permet de resserrer un peu, dans quelques cas spéciaux, la limite de transitivité des groupes, assignée par M. JORDAN dans son Mémoire sur ce sujet, inséré au Bulletin de la Société Mathématique, t. **1.** En effet, si dans le théorème III du Mémoire cité, on fait $m = 2$, $n = 0$, on démontre, en suivant le raisonnement de M. JORDAN, que si un groupe du degré $p^2q + k$, où $q < p$, $q < k$, est plus de k fois transitif sans contenir le groupe alterné, k ne pourra surpasser 5, si le nombre premier p est de l'une des formes $10h \pm 1$; il ne pourra surpasser 4, si p est égal à 5 ou qu'il soit de l'une des formes $10h \pm 3$. Les mêmes règles sont encore valables, quand le degré est $pq + k$, où $q < k$, $q < p^2$. Si l'on fait $q = 1$, et qu'on suppose en même temps que l'ordre du groupe partiel qui laisse $k + 1$ éléments immobiles, soit divisible par p, k ne peut même dépasser 2. C'est là une proposition analogue à l'élégant théorème I du Mémoire de M. JORDAN, et elle se démontre de la même manière.

SUR UN MODE DE TRANSFORMATION DES SURFACES MINIMA.

(Second Mémoire)

PAR

E. GOURSAT

À PARIS.

1. Le problème traité dans le travail précédent[1] conduit à examiner une question plus générale. Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = f(x, y, z; x_0, y_0, z_0), \\ y_1 = \varphi(x, y, z; x_0, y_0, z_0), \\ z_1 = \psi(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

trois fonctions de six variables indépendantes x, y, z, x_0, y_0, z_0. Supposons que x, y, z désignent les coordonnées d'un point d'une surface minima *quelconque* S, et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point correspondant de la surface adjointe S_0. Le point de coordonnées x_1, y_1, z_1 décrira une certaine surface S_1. *Quelles sont les fonctions* f, φ, ψ *les plus générales, telles que la surface* S_1 *soit aussi une surface minima, quelle que soit la surface minima* S?

On a vu dans le travail précédent qu'on peut satisfaire à cette condition en prenant pour f, φ, ψ des fonctions linéaires convenablement choisies de x, y, z, x_0, y_0, z_0. Les propriétés connues des surfaces minima conduisent sans difficulté à la forme générale des fonctions f, φ, ψ.

2. Soit m un point quelconque de l'espace de coordonnées a, b, c, m_0 un autre point de coordonnées a_0, b_0, c_0, P et P_0 deux plans paral-

[1] Voir Acta mathematica, t. **11**, p. 135.

lèles passant par ces deux points, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à ce plan. Considérons une surface minima S passant au point m et tangente en ce point au plan P; comme on peut déplacer la surface adjointe S_0 parallèlement à elle-même, nous pouvons supposer que le point correspondant à m sur S_0 est précisément le point m_0. Les formules (1) feront correspondre au point m un point m_1 dont les coordonnées a_1, b_1, c_1 ne dépendront que des coordonnées des deux points m et m_0. Des formules (1) on déduit

$$(2)\qquad \begin{cases} dx_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \dfrac{\partial f}{\partial x_0}dx_0 + \dfrac{\partial f}{\partial y_0}dy_0 + \dfrac{\partial f}{\partial z_0}dz_0, \\ dy_1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}dx_0 + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0}dy_0 + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_0}dz_0, \\ dz_1 = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial \psi}{\partial z}dz + \dfrac{\partial \psi}{\partial x_0}dx_0 + \dfrac{\partial \psi}{\partial y_0}dy_0 + \dfrac{\partial \psi}{\partial z_0}dz_0; \end{cases}$$

or on a[1]

$$dx_0 = \beta dz - \gamma dy, \qquad dy_0 = \gamma dx - \alpha dz, \qquad dz_0 = \alpha dy - \beta dx,$$

et, si on remplace dx_0, dy_0, dz_0 dans les formules précédentes, on voit que les cosinus directeurs de la normale à la surface décrite par le point x_1, y_1, z_1 ne dépendent que de $x, y, z, x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$. Par conséquent, si l'on considère toutes les surfaces minima S tangentes à un plan P en un point déterminé m, telles que le point correspondant au point m sur la surface adjointe S_0 soit un point déterminé m_0, toutes les surfaces S_1 définies par les formules (1) sont tangentes à un plan déterminé P_1 en un point fixe m_1.

Cela posé, soit Γ une courbe minima quelconque représentée par les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} X = A(t), \\ Y = B(t), \\ Z = C(t), \end{cases}$$

[1] Schwarz, *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen* (Journal für Mathematik, t. **80**, p. 280; 1875).

où $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ désignent trois fonctions d'une même variable t vérifiant la relation

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0;$$

soit Γ_0 une seconde courbe minima représentée par les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} X_0 = iA(t) + \lambda, \\ Y_0 = iB(t) + \mu, \\ Z_0 = iC(t) + \nu, \end{cases}$$

où λ, μ, ν sont trois constantes quelconques. Par la courbe Γ faisons passer une surface minima quelconque S et soit Δ la développable circonscrite à S le long de Γ; cette développable se réduit, comme on sait, à un cône ayant son sommet en un point du cercle de l'infini. La surface adjointe S_0 n'est pas complètement définie de position; on peut la transporter parallèlement à elle-même ou la remplacer par sa symétrique relativement à un point de l'espace. On reconnaît aisément qu'on peut, sans restreindre la généralité, la faire passer par la courbe Γ_0, de façon que les points des deux courbes Γ, Γ_0, qui correspondent à une même valeur de t, se correspondent aussi sur les surfaces S, S_0.

A la surface S les formules (1) font correspondre une surface S_1 qui, par hypothèse, doit être une surface minima. A la courbe Γ, ces formules font correspondre une certaine courbe C représentée par les équations

$$(5)\qquad \begin{cases} X_1 = f[A(t), B(t), C(t); iA(t) + \lambda, iB(t) + \mu, iC(t) + \nu] = F(X, Y, Z), \\ Y_1 = \varphi[A(t), B(t), C(t); iA(t) + \lambda, iB(t) + \mu, iC(t) + \nu] = \Phi(X, Y, Z), \\ Z_1 = \psi[A(t), B(t), C(t); iA(t) + \lambda, iB(t) + \mu, iC(t) + \nu] = \Psi(X, Y, Z); \end{cases}$$

soit Δ_1 la développable circonscrite à S_1 le long de la courbe C. La courbe C et la développable Δ_1 resteront les mêmes, on vient de le voir, si les courbes Γ, Γ_0 et la développable Δ restent les mêmes. Or il existe une infinité de surfaces minima S inscrites dans la développable Δ le long de la courbe C, et on peut toujours supposer que les surfaces adjointes passent par la courbe Γ_0. On voit donc qu'il doit exister une infinité de surfaces minima S_1 inscrites dans la développable

Δ_1 le long de la courbe C. Or cela ne peut avoir lieu que si cette courbe C est elle-même une courbe minima.[1] Si on remarque maintenant qu'on peut répéter le raisonnement qui précède en partant d'une surface minima quelconque et d'une courbe minima quelconque située sur cette surface, ou est conduit aux conclusions suivantes. Si les formules (1) font correspondre à une surface minima quelconque S une nouvelle surface minima S_1;

1° *toute courbe minima Γ de S a pour transformée une courbe minima Γ_1 de S_1;* 2° *on peut déduire la courbe Γ_1 de la courbe Γ par des formules de transformation* (5), *qui font correspondre un point à un point et qui changent toute courbe minima en une nouvelle courbe minima.*

3. D'après cela, voici comment on obtiendra la transformation la plus générale satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Soit S une surface minima quelconque, S_1 une surface minima qui lui correspond par une transformation de cette nature. La surface S peut être considérée comme le lieu du milieu d'une corde joignant un point d'une courbe minima Γ à un point d'une autre courbe minima Γ'. La surface S_1 peut être engendrée de la même façon au moyen de deux courbes minima Γ_1, Γ_1'. Soit γ une courbe minima de S homothétique à Γ et γ_1 la courbe minima qui lui correspond sur S_1; cette courbe γ_1 sera homothétique à l'une des courbes Γ_1, Γ_1', à la courbe Γ_1 par exemple. Il résulte alors de ce qui précède que l'on pourra passer de la courbe Γ à la courbe Γ_1 au moyen d'une transformation qui fait correspondre un point à un point et à toute courbe minima une nouvelle courbe minima. La courbe Γ_1' se déduira de Γ' par une transformation de même nature.

Prenons, par conséquent, deux courbes minima quelconques Γ, Γ', représentées par les équations

$$\Gamma \begin{cases} X = A(t), \\ Y = B(t), \\ Z = C(t), \end{cases} \qquad \Gamma' \begin{cases} X' = A'(\tau), \\ Y' = B'(\tau), \\ Z' = C'(\tau), \end{cases}$$

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. **1**, p. 396.

et soient S, S_0 les deux surfaces minima, adjointes l'une de l'autre, données par les équations

$$S \begin{cases} 2x = A(t) + A'(\tau), \\ 2y = B(t) + B'(\tau), \\ 2z = C(t) + C'(\tau), \end{cases}$$

$$S_0 \begin{cases} 2x_0 = i[A(t) - A'(\tau)], \\ 2y_0 = i[B(t) - B'(\tau)], \\ 2z_0 = i[C(t) - C'(\tau)], \end{cases}$$

d'où l'on tire inversement

$$\begin{aligned} A(t) &= x - ix_0, & A'(\tau) &= x + ix_0, \\ B(t) &= y - iy_0, & B'(\tau) &= y + iy_0, \\ C(t) &= z - iz_0, & C'(\tau) &= z + iz_0. \end{aligned}$$

Appliquons à chacune des courbes Γ, Γ' une de ces transformations dont il vient d'être question, qui font correspondre un point à un point et qui changent les courbes minima en courbes minima. On obtient deux autres courbes minima Γ_1, Γ_1':

$$\Gamma_1 \begin{cases} X_1 = F[A(t), B(t), C(t)], \\ Y_1 = \Phi[A(t), B(t), C(t)], \\ Z_1 = \Psi[A(t), B(t), C(t)], \end{cases}$$

$$\Gamma_1' \begin{cases} X_1' = F'[A'(\tau), B'(\tau), C'(\tau)], \\ Y_1' = \Phi'[A'(\tau), B'(\tau), C'(\tau)], \\ Z_1' = \Psi'[A'(\tau), B'(\tau), C'(\tau)], \end{cases}$$

et une surface minima S_1

$$S_1 \begin{cases} 2x_1 = X_1 + X_1', \\ 2y_1 = Y_1 + Y_1', \\ 2z_1 = Z_1 + Z_1'. \end{cases}$$

Si on remplace dans ces formules $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$; $A'(\tau)$, $B'(\tau)$, $C'(\tau)$ par leurs valeurs en fonction de $x, y, z; x_0, y_0, z_0$ et si on divise par 2 les coordonnées x_1, y_1, z_1, on aboutit aux formules suivantes pour représenter la surface S_1

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = F[x - ix_0, y - iy_0, z - iz_0] + F'[x + ix_0, y + iy_0, z + iz_0], \\ y_1 = \Phi[x - ix_0, y - iy_0, z - iz_0] + \Phi'[x + ix_0, y + iy_0, z + iz_0], \\ z_1 = \Psi[x - ix_0, y - iy_0, z - iz_0] + \Psi'[x + ix_0, y + iy_0, z + iz_0]. \end{cases}$$

Ces formules sont bien de la forme (1) et, d'après ce qu'on vient de voir, ce sont les plus générales qui satisfassent aux conditions du problème proposé.

4. Nous sommes donc amenés à rechercher les transformations de l'espace qui font correspondre un point à un point et qui changent toute courbe minima en une nouvelle courbe minima. Soient

$$(7) \quad \begin{cases} X_1 = F(X, Y, Z), \\ Y_1 = \Phi(X, Y, Z), \\ Z_1 = \Psi(X, Y, Z) \end{cases}$$

les formules qui définissent une transformation de cette espèce; la somme $dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2$ est égale à une forme quadratique homogène de dX, dY, dZ dont les coefficients ne dépendent que de X, Y, Z. Mais, puisqu'on doit avoir

$$dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = 0$$

toutes les fois que l'on a

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0,$$

il faut évidemment que l'on ait identiquement

$$(8) \quad dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = \lambda(dX^2 + dY^2 + dZ^2),$$

λ ne dépendant que de X, Y, Z. On connaît toutes les transforma-

tions de la forme (7) qui satisfont à cette condition.[1] Elles résultent de la combinaison de transformations par rayons vecteurs réciproques avec un déplacement, et dépendent de dix paramètres arbitraires. Ces transformations peuvent être définies d'une manière élégante, si l'on emploie les coordonnées pentasphériques; elles résultent alors d'une substitution orthogonale à cinq variables effectuée sur ces coordonnées. Il n'y a aucune difficulté à déduire de là l'expression générale des fonctions $F, F', \Phi, \Phi', \Psi, \Psi'$ qui figurent dans les formules (6) et par suite des fonctions f, φ, ψ des formules (1). Il est à remarquer que, si la surface primitive S est réelle, les formules (1) donneront une infinité de nouvelles surfaces qui seront toutes réelles, pourvu qu'on applique aux deux courbes Γ, Γ' des transformations imaginaires conjuguées.

5. Supposons que les transformations appliquées aux deux courbes minima Γ, Γ' se réduisent à une inversion par rapport à une sphère de rayon R ayant pour centre l'origine des coordonnées. Les formules (7) deviennent ici

$$(9)\qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{R^2X}{X^2+Y^2+Z^2}, \\[2ex] Y_1 = \dfrac{R^2Y}{X^2+Y^2+Z^2}, \\[2ex] Z_1 = \dfrac{R^2Z}{X^2+Y^2+Z^2}; \end{cases}$$

et les formules (6) nous donnent

$$(10)\qquad \begin{cases} x_1 = Ux + Vx_0, \\ y_1 = Uy + Vy_0, \\ z_1 = Uz + Vz_0, \end{cases}$$

[1] Liouville, *Journal de Mathématiques pures et appliquées.* 1ère série, t. **13**, p. 220 et t. **15**, p. 103.

Darboux, *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux.* Annales de l'Ecole Normale, t. **7**; 1878.

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$(11)\quad \begin{cases} U = \dfrac{R^2(x^2+y^2+z^2-x_0^2-y_0^2-z_0^2)}{(x^2+y^2+z^2-x_0^2-y_0^2-z_0^2)^2+4(xx_0+yy_0+zz_0)^2}, \\[2ex] V = \dfrac{2R^2(xx_0+yy_0+zz_0)}{(x^2+y^2+z^2-x_0^2-y_0^2-z_0^2)^2+4(xx_0+yy_0+zz_0)^2}. \end{cases}$$

Ces formules mettent en évidence la propriété suivante: les trois points de coordonnées (x, y, z), (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) sont dans un même plan passant par l'origine. La transformation qui précède a déjà été employée par M. Lie.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE NORMEN KOMPLEXER ZAHLEN

VON

K. SCHWERING
in COESFELD.

Wenn $\alpha^\lambda = 1$, λ Primzahl und α nicht reell ist, so heisst der Ausdruck

$$a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$

wo $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{\lambda-1}$ reelle ganze Zahlen bedeuten, *eine aus λ^{ten} Einheitswurzeln gebildete komplexe Zahl.* Unter der *Norm* einer solchen komplexen Zahl versteht man das Produkt

$$\prod_r (a_1\alpha^r + a_2\alpha^{2r} + a_3\alpha^{3r} + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{r(\lambda-1)}). \qquad (r=1,2,3,\ldots,\lambda-1)$$

Die Berechnung einer solchen Norm ist bei zahlentheoretischen Untersuchungen insofern eine Sache von grundlegender Bedeutung, als die Norm allein Auskunft über die wesentlichen Eigenschaften einer komplexen Zahl geben kann. Es war daher unbedingt geboten, in erheblichem Umfange Normenberechnungen durchzuführen und die Ergebnisse in Tafeln zusammen zu stellen. Solche Tafeln hat Herr C. G. Reuschle mit grosser Sorgfalt berechnet, und die Akademie der Wissenschaften in Berlin hat den Druck auf ihre Kosten herstellen lassen. Ist hiermit dem praktischen Bedürfnisse abgeholfen, so bleibt gleichwohl für die Theorie die ebenso interessante als schwierige Aufgabe zu lösen, den wirklichen Ausdruck der Norm näher zu untersuchen. Schon Herr Reuschle selbst hat in dieser Richtung Wege gezeigt. In einer kleinen Gelegenheitsschrift *Entwicklung von Produkten konjugirter Faktoren,* Stuttgart 1874, finden sich beachtenswerte Angaben über die Bildung der Norm. Insbesondere bildet er die von ihm sogenannte *kubische Normform* und ver-

wendet sie für Primzahlen des ersten Tausend. Wenn nun meine eigenen Untersuchungen einen ganz anderen, und wie ich glaube, zweckentsprechenderen Gang genommen haben, so verdanke ich dies dem glücklichen Umstande, dass mir die Aufgabe der Normenberechnung bei einem besonders geeigneten Ausgangspunkte entgegentrat. Ich wurde nämlich durch eine von Herrn KRONECKER gestellte Frage veranlasst, die Normen *trinomischer* komplexer Zahlen zu untersuchen und kam so zu dem Bd. **10** S. 79 (diese Zeitschrift) stehenden Ausdrucke. So blieben meine Rechnungen in ziemlich weitem Umfange wirklich ausführbar und ich sah mich in den Stand gesetzt, für die von wir gewählte Form alle Fragen nach Anzahl und Bildung der auftretenden Glieder vollständig beantworten zu können.

1. Fangen wir mit einem Beispiele an. Wir suchen die Norm

$$N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}); \qquad \alpha^{\lambda} = 1.$$

Zu diesem Zwecke bilden wir

$$(1) \qquad P(z) = (z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}).$$

Dann hat die Gleichung $P(z) = 0$ die λ Wurzeln:

$$z_r = -(a\alpha^r + b\alpha^{\delta r} + c\alpha^{\varepsilon r}). \qquad {\scriptstyle (r=0,1,2,\ldots,\lambda-1)}$$

Suchen wir zunächst die Potenzsummen dieser Wurzeln zu bestimmen. Für jede komplexe Zahl

$$\varphi(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$$

erhält man

$$(2) \qquad \varphi(1) + \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha^2) + \ldots + \varphi(\alpha^{\lambda-1}) = \lambda a_0.$$

Dies soll künftig durch

$$(3) \qquad \Sigma\varphi(\alpha) = \lambda a_0$$

kurz ausgedrückt werden. Bezeichnen wir nun die Summe der h^{ten} Potenzen kurz durch s_h, so ist:

$$(4) \qquad s_h = z_0^h + z_1^h + \ldots + z_{\lambda-1}^h = \Sigma(-1)^h(a\alpha^r + b\alpha^{\delta r} + c\alpha^{\varepsilon r})^h.$$

Entwickeln wir nun rechts nach dem *polynomischen* Lehrsatze, so haben wir nur diejenigen Glieder zu berücksichtigen, welche wir oben mit a_0 bezeichneten, also die Glieder von der Form

$$(-1)^h \cdot \frac{|\underline{h}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{m}} a^k b^l c^m \cdot \alpha^{k+\delta l+\varepsilon m},$$

wo k, l, m den Bedingungen genügen müssen:

$$(5) \qquad \begin{cases} k + \delta l + \varepsilon m \equiv 0 \pmod{\lambda}, \\ h = k + l + m \overline{\overline{<}} \lambda. \end{cases}$$

Wir sehen hier die verallgemeinerte Form derjenigen Kongruenzen vor uns, welche zuerst E. Kummer bei Zerlegung der ψ-Funktionen in Faktoren bemerkt hat. Ganz allgemein können wir diese Kongruenzen so erklären:

$$(6) \qquad \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m \equiv 0 \pmod{\lambda}, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m \overline{\overline{<}} \lambda. \end{cases}$$

Die $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sind *gegebene* positive oder negative ganze Zahlen, die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dürfen nur *positive* ganze Zahlen sein. Diese Kongruenzen bilden einen Hauptgegenstand unserer Untersuchungen und mögen kurz als Kummersche Kongruenzen m^{ter} Ordnung bezeichnet werden.

Für alle durch die Kummersche Kongruenz 3^{ter} Ordnung (5) bestimmten Wertegruppen k, l, m finden wir

$$(7) \qquad s_h = \lambda \sum_{k,l,m} (-1)^h \cdot \frac{|\underline{h}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{m}} a^k b^l c^m.$$

Aus diesen s_h sind die Koefficienten p_h durch die Waringsche Formel zu gewinnen. Obwohl diese Formel in der erwähnten Abhandlung S. 62 bereits von uns abgeleitet worden ist, können wir nicht umhin, diese Ableitung hier noch einmal in gedrängter Kürze zu wiederholen. Es soll nämlich eine, wie es scheint, *nicht unwesentliche Erweiterung* dieser bekannten algebraischen Formel angeschlossen werden.

Es ist

$$\log(z - z_r) = \log z - \frac{1}{z} \cdot z_r - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot z_r^2 - \ldots - \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{z^h} \cdot z_r^h - \ldots .$$

Daher

$$\log P = \lambda \log z - \frac{1}{z} \cdot s_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot s_2 - \ldots - \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{z^h} \cdot s_h - \ldots.$$

Nun erscheinen aber unsere s_h, wie Gleichung (7) zeigt, wieder als *Summen* und zwar aus Summanden von der obigen Form. Demnach wird

$$P = z^\lambda \prod e^{\lambda(-1)^{h+1} \cdot \frac{\underline{|h-1}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|m}} \frac{a^k b^l c^m}{z^h}}. \tag{8}$$

Für jede Wertgruppe k, l, m, welche der Kummerschen Kongruenz (5) genügt, hat man also die Reihe zu bilden:

$$1 + \ldots + \frac{1}{\underline{|t}} (-1)^{th+t} \left\{ \lambda \frac{\underline{|h-1}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|m}} \frac{a^k b^l c^m}{z^h} \right\}^t. \qquad {\scriptstyle (t=1,2,3,\ldots)}$$

Die so entstehenden Reihen sind zu multipliziren und das Produkt noch mit z^λ zu vervielfachen. Alle Potenzen mit negativem Exponenten von z fallen weg. *Bei dieser Entwicklung spielen also die Wertverbindungen, welche den Kummerschen Kongruenzen genügen, dieselbe Rolle, welche bei der gewöhnlichen Waringschen Entwicklung den Potenzsummen zufällt.* Hierin besteht die oben angekündigte Erweiterung der Waringschen Formel. Man ist nun imstande, eine Reihe wichtiger Bemerkungen zu unserer Entwicklung zu machen.

1.) Eine Auflösung der Kummerschen Kongruenz lautet

$$k = 0, \quad l = 0, \quad m = \lambda.$$

Für diese Wertverbindung erhält P laut Formel (8) den Beitrag c^λ. Ebenso entstehen aus $k = 0$, $l = \lambda$, $m = 0$ und $k = \lambda$, $l = 0$, $m = 0$ die Beiträge b^λ und a^λ. $k = 0$, $l = 0$, $m = 0$ liefert z^λ.

2.) Ausser den vier Gliedern $z^\lambda, a^\lambda, b^\lambda, c^\lambda$ haben alle in P auftretenden Summanden den Faktor λ.

3.) Man kann die in (5) auftretende Ungleichung ersetzen durch

$$k + l + m < \lambda.$$

Denn für $k + l + m = \lambda$ erhalten wir in P die von z freien Glieder,

$$(a + b + c) N(a\alpha + b\alpha^\delta + c\alpha^\varepsilon),$$

welche als Norm einer *trinomischen* Zahl (einer Zahl niedrigerer Ordnung) für erledigt gelten können.

Die vorstehenden Untersuchungen sind zwar nur für die *viergliedrige* Zahl $z + a\alpha + b\alpha^\delta + c\alpha^\varepsilon$ durchgeführt. Allein es ist klar, dass die gezogenen Schlüsse mit geringer Änderung *allgemeine Geltung* erhalten.

Wir verzichten also darauf, die Faktoren unserer Norm nach *Perioden* zusammenzufassen. Anders wird der praktische Rechner verfahren. Er wird mit Reuschle z. B. für $\lambda = 3m + 1$ zunächst m Faktoren zu einem Produkte $A_0\eta_0 + A_1\eta_1 + A_2\eta_2$ vereinigen und dann die Norm dieser Zahl nehmen. Leider scheinen aber die Gesetze, nach denen sich die Zahlen A_0, A_1, A_2 bilden, durchaus nicht einfach zu sein. Ja, es ist sogar von grossem Vorteil, den Faktor $z + a + b + c$ zur Norm hinzuzufügen. Ist so in P der mit λ multiplicirte Teil berechnet, so weiss man, dass derselbe für jede komplexe *Einheit* von der Form $z + a\alpha + b\alpha^\delta + c\alpha^\varepsilon$ *verschwinden* muss, wenn $a = b = c = z = \pm 1$ ist. *Und statt der Gleichung*

$$\alpha^{\lambda-1} + \alpha^{\lambda-2} + \ldots + \alpha + 1 = 0$$

haben wir die einfachere

$$\alpha^\lambda = 1.$$

2. Wir stellen uns jetzt die Frage: *Wieviel Glieder enthält der entwickelte Ausdruck:*

$$(9) \qquad (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) N(a_1\alpha + a_2\alpha^\delta + \ldots + a_m\alpha^\mu)?$$

Wir werden diese Frage wieder für die viergliedrige Zahl in (1) beantworten. Die Antwort wird in einer Form gegeben werden, welche sich alsbald verallgemeinern lässt. In dem entwickelten Produkte

$$(z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^\delta + c\alpha^\varepsilon)$$

kommen soviel wesentlich verschiedene Glieder vor als die Kummersche Kongruenz (5) Lösungen enthält. Darunter befinden sich aber die sämtlichen Glieder des Produkts nächstniedrigerer Ordnung, nämlich diejenigen, für welche $z = 0$, also $k + l + m = \lambda$ ist. Daher finden wir die Zahl, um welche die Gliederzahl des Produkts aus *vier* Elementen

die Gliederzahl des Produkts nächstniedrigerer Ordnung übertrifft, wenn wir die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

(10) $$k + \delta l + \varepsilon m \equiv 0 \pmod{\lambda}$$

bestimmen, für welche ist
$$k + l + m < \lambda.$$

Wir betrachten die Funktion $\varphi(z, x)$ von der Form:

(11) $$\varphi(z, x) = \frac{1}{1 - xz} \cdot \frac{1}{1 - x^{\delta} z} \cdot \frac{1}{1 - x^{\varepsilon} z}.$$

Dann ist
$$\varphi(z, x) = \sum_{k, l, m} x^{k + \delta l + \varepsilon m} . z^{k + l + m}. \qquad (k, l, m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Die Reihe ist konvergent, wenn die drei Grössen xz, $x^{\delta} z$, $x^{\varepsilon} z$ ihrem absoluten Betrage nach jede kleiner als Eins sind. Ersetzen wir x durch $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{\lambda}$ und addiren die so entstandenen Reihen, so wird rechts jede Potenz von x in Wegfall kommen, für welche die Kongruenz (10) nicht erfüllt ist. Jede Lösung k, l, m derselben liefert dagegen den Beitrag λ. So erhält man

(12) $$\sum_{\alpha} \varphi(z, \alpha) = \lambda \sum a_h . z^h.$$

Hier bezeichnet a_h *die Anzahl der Lösungen der Kongruenz* (10), *welche die Eigenschaft haben, dass ihre Summe h ist;*

(13) $$k + l + m = h.$$

Setzen wir andererseits

(14) $$\psi(u) = (u - x)(u - x^{\delta})(u - x^{\varepsilon}),$$

so ist

(15) $$\varphi(z, x) = \frac{x^2}{\psi'(x)} \cdot \frac{1}{1 - xz} + \frac{x^{2\delta}}{\psi'(x^{\delta})} \cdot \frac{1}{1 - x^{\delta} z} + \frac{x^{2\varepsilon}}{\psi'(x^{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{1 - x^{\varepsilon} z}.$$

Als Koefficient von z^h erscheint daher jetzt:

(16) $$\frac{x^{h+2}}{\psi'(x)} + \frac{x^{(h+2)\delta}}{\psi'(x^{\delta})} + \frac{x^{(h+2)\varepsilon}}{\psi'(x^{\varepsilon})}.$$

Wenn wir nun h alle Werte von Null bis $\lambda - 1$ durchlaufen lassen und dann über alle Werte $x = \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^\lambda$ summiren, endlich das Resultat durch λ dividiren, so erhalten wir zufolge (12) die Anzahl der Lösungen der Kongruenz (10). Schliessen wir zunächst den Betrag der Summe für $x = \alpha^\lambda = 1$ aus. Dann sind zwei Zahlen h' und h'' immer so wählbar, dass man erhält

$$(h' + 2)\delta \equiv (h'' + 2)\varepsilon \equiv (h + 2) \pmod{\lambda}.$$

Hierdurch aber verwandelt sich der Ausdruck (16) in

$$\alpha^{h+2}\left\{\frac{1}{\psi'(\alpha)} + \frac{1}{\psi'(\alpha^\delta)} + \frac{1}{\psi'(\alpha^\varepsilon)}\right\}.$$

Der Klammerausdruck ist, wie die Entwicklung von $\frac{1}{\psi(u)}$ nach fallenden Potenzen von u zeigt, identisch *Null*. Mithin liefert die Summirung über die *komplexen* α zur *Summe der Koefficienten* a_h keinen Beitrag. Es bleibt also noch der Beitrag, den $x = 1$ liefert, zu bestimmen. Dieser ist zusammengesetzt aus sämtlichen Koefficienten von z^h in $\varphi(z, 1)$. Nun ist

$$\varphi(z, 1) = \frac{1}{(1 - z)^3} = \sum \frac{(h + 2)(h + 1)}{1 \cdot 2} z^h$$

und die Summe aller Zahlen $\frac{(h + 2)(h + 1)}{1 \cdot 2}$ von $h = 0$ bis $h = \lambda - 1$ beträgt $\frac{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Trennen wir λ ab, so ist die gesuchte Zahl $\frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2 \cdot 3}$. Um soviel *übertrifft* die Anzahl der Glieder des entwickelten Produkts P aus *vier* Elementen die Anzahl der Glieder des Produkts nächstniedrigerer Ordnung. Durch ganz analoge Schlüsse findet man, dass das Produkt P für *fünf* Elemente dasjenige für *vier* um

$$\frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

übertrifft u. s. w. Hiernach erhalten wir das Endergebnis:

Das aus m Elementen zusammengesetzte Produkt

$$P = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) N(a_1\alpha + a_2\alpha^\delta + \ldots + a_m\alpha^\mu)$$

enthält

$$(17)\qquad g = 2 + \frac{\lambda + 1}{2} + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2) \ldots (\lambda + m - 2)}{2 \cdot 3 \ldots (m - 1)}$$

verschiedene Glieder.

So ist für $\lambda = 11$

$$m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$$

$$g = 2, 8, 34, 125, 398, 1126, 2894, 6872, 15270.$$

3. Im vorhergehenden Paragraphen haben wir die *Anzahl* der verschiedenen Glieder des entwickelten Produkts P kennen gelernt. Wir suchen jetzt die *Beschaffenheit* dieser Glieder näher zu bestimmen. Wenn die komplexe Zahl, deren P gesucht wird, aus *vier* Elementen besteht, also

$$z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon},$$

so kann man fragen: *Wieviel Glieder $a^k b^l c^m z^n$ kommen in P vor, bei denen die Zahlen k, l, m, n sämtlich von Null verschieden sind?* Diese Frage ist nicht ohne Bedeutung. Denn ihre Beantwortung gibt zu erkennen, wieviel Koefficienten in P wirklich neu zu berechnen sind; ist nämlich eine der 4 Zahlen k, l, m, n Null, so kann man den betreffenden Koefficienten durch die Berechnung des P einer trinomischen Zahl finden. Und Gleiches gilt allgemein. Für die Berechnung des P einer aus m Elementen bestehenden Zahl sind nur diejenigen Lösungen der Kummerschen Kongruenz von Bedeutung, welche von Null verschieden sind.

Wir lösen die Aufgabe zunächst für $m = 4$ und dehnen dann die Lösung durch ein Verfahren weiter aus, welches dem im vorigen Paragraphen analog ist.

Für das P einer vierelementigen komplexen Zahl haben wir die 4 Glieder $z^\lambda + a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda$. Verschwindet eins der Elemente, so entsteht eine trinomische Zahl, es erscheinen also $\frac{\lambda - 1}{2}$ Glieder von der Form $a^k b^l z^n$. Im ganzen zeigen also $4 \cdot \frac{\lambda - 1}{2}$ Glieder diese Form. Endlich

bleiben die Glieder von dem gesuchten Typus, x an der Zahl. Daher mit Rücksicht auf (17)

$$x + 4 \cdot \frac{\lambda - 1}{2} + 4 = 2 + \frac{\lambda + 1}{2} + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2 \cdot 3}.$$

Hieraus folgt durch leichte Rechnung:

$$x = \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{2 \cdot 3} - \frac{\lambda - 1}{2}.$$

Zur Verallgemeinerung unseres Ergebnisses greifen wir auf die Funktion $\varphi(z, x)$ zurück. Für das entwickelte Produkt P der fünfelementigen komplexen Zahl

$$z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon} + d\alpha^{\vartheta}$$

fällt die Frage: »Wie gross ist die Anzahl der Glieder vom Typus $a^k b^l c^m d^n z^p$?» genau zusammen mit der folgenden: »Wie gross ist die Anzahl der Lösungen der KUMMERschen Kongruenz

$$k + \delta l + \varepsilon m + \vartheta n \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$k + l + m + n < \lambda,$$

wenn keine der Zahlen k, l, m, n verschwinden darf?»

Bilden wir die Funktion:

$$\frac{xz}{1 - xz} \cdot \frac{x^{\delta} z}{1 - x^{\delta} z} \cdot \frac{x^{\varepsilon} z}{1 - x^{\varepsilon} z} \cdot \frac{x^{\vartheta} z}{1 - x^{\vartheta} z} = \sum x^{k + \delta l + \varepsilon m + \vartheta n} \cdot z^{k + l + m + n},$$

so wird jetzt der Koefficient von z^h, wenn

$$\psi(u) = (u - x)(u - x^{\delta})(u - x^{\varepsilon})(u - x^{\vartheta}),$$

$$x^{1 + \delta + \varepsilon + \vartheta} \left\{ \frac{x^{h-1}}{\psi'(x)} + \frac{x^{(h-1)\delta}}{\psi'(x^{\delta})} + \frac{x^{(h-1)\varepsilon}}{\psi'(x^{\varepsilon})} + \frac{x^{(h-1)\vartheta}}{\psi'(x^{\vartheta})} \right\}.$$

Für $h = 1, 2, 3$ wird der Klammerausdruck identisch *Null*. Lassen wir auch $h = \lambda$ zu, so durchlaufen die Exponenten von x wieder völlige Restsysteme mod λ, können also zur Summe Null zusammengefasst werden, wie früher. Bestimmt man den Beitrag für $x = 1$, so findet man ihn aus

$$\frac{z^4}{(1 - z)^4} = \sum \frac{(h - 1)(h - 2)(h - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^h.$$

analog wie früher zu $\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{2.3.4}$. Aber diese Zahl ist noch um diejenige zu vermindern, welche der anfangs ausgeschlossenen Annahme $h=\lambda$ entspricht. Diese Annahme besagt aber, dass a, b, c, d einen von Null verschiedenen, z den Exponenten Null haben soll. Die Anzahl dieser Fälle haben wir oben bestimmt; es ist die Anzahl der *analogen* Glieder in *dem* P, welches ein Element weniger enthält. Die fünfelementige Zahl liefert also in dem entwickelten Produkte eine Anzahl Glieder

$$f=\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{2.3.4}-\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2.3}+\frac{\lambda-1}{2},$$

welche alle 5 Elemente enthalten. So findet man allgemein:

In dem entwickelten Produkte

$$P=(a_1+a_2+\ldots+a_m)N(a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_m\alpha^m)$$

kommen f_m Glieder vor, welche alle m Elemente enthalten, wo

$$(18)\qquad f_m=\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-m+2)}{2.3\ldots(m-1)}-\frac{(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+3)}{2\ldots(m-2)}+\ldots\pm\frac{\lambda-1}{2}.$$

Für das Produkt aus $\lambda-1$ Elementen

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{\lambda-1})N(a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1})$$

erhält man daher die bemerkenswerten Beziehungen:

$$f_{\lambda-1}=\frac{\lambda-1}{2}-\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2.3}+\ldots-\frac{\lambda-1}{2}=0.$$

Ebenso findet man

$$f_{\lambda-2}=\frac{\lambda-1}{2}$$

und allgemein

$$(19)\qquad f_{\lambda-\nu}=f_{\nu+1}.$$

Nun sind wir imstande, in einem gegebenen P_m die *Anzahl* und die *Form* der Glieder genauer anzugeben. In P_m finden sich f_m Glieder, in denen kein Element fehlt, $m.f_{m-1}$ Glieder, in denen *ein* Element fehlt,

$$\frac{m(m-1)}{1.2}.f_{m-2}$$

Glieder, in denen *zwei* Elemente fehlen, u. s. w.

So hat man für $\lambda = 7$ in dem Produkte P_6

6.3	Glieder,	welche	5	Elemente	enthalten,	=	18
15.2	»	»	4	»	»		30
20.3	»	»	3	»	»		60
6	»	»	1	»	»		6
					Im Ganzen		114

Diese Zahl liefert auch Formel (17).

Für $\lambda = 11$ hat man in dem vollständigen Produkte

$$P_{10} = (a_1 + \ldots + a_{10}) N(a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{10}\alpha^{10})$$

10. 5	Glieder,	welche	9	Elemente	enthalten,	=	50
45.10	»	»	8	»	»		450
120.20	»	»	7	»	»		2400
210.22	»	»	6	»	»		4620
252.20	»	»	5	»	»		5040
210.10	»	»	4	»	»		2100
120. 5	»	»	3	»	»		600
10. 1	»	»	1	»	»		10
					Im Ganzen		15270 Glieder.

Stellen wir nun noch die *Lehrsätze* zusammen, welche für die Kummerschen Kongruenzen im vorstehenden als richtig gefunden worden sind.

1.) Sei

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \overline{\overline{<}} \lambda,$$

eine Kummersche Kongruenz m^{ter} Ordnung, so erhält man, wenn alle positiven ganzzahligen Lösungen einschliesslich 0 und λ zugelassen werden,

$$g = 2 + \frac{\lambda + 1}{2} + \ldots + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)\ldots(\lambda + m - 1)}{2 \cdot 3 \ldots m}$$

Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

2.) Werden aber 0 und λ *nicht* zugelassen und soll sein

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m < \lambda,$$

so erhält man nur

$$f = \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)\dots(\lambda - m + 1)}{2 \cdot 3 \dots m} - \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)\dots(\lambda - m + 2)}{2 \cdot 3 \dots (m - 1)} + \dots \pm \frac{\lambda - 1}{2}$$

Wertsysteme.

3.) Werden Lösungen $x_r = 0$ zugelassen, wird aber die Bedingung gestellt

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m < \lambda,$$

so beträgt die Anzahl der Lösungen

$$\frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)\dots(\lambda + m - 1)}{2 \cdot 3 \dots m}.$$

4.) Werden Lösungen $x_r = 0$ *ausgeschlossen,* aber die Summe gleich λ *zugelassen,* so beträgt die Anzahl der Lösungen

$$\frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)\dots(\lambda - m + 1)}{2 \cdot 3 \dots m}.$$

5.) Sind zwei KUMMERsche Kongruenzen gegeben

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m < \lambda,$$

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_n y_n \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n < \lambda,$$

unter Ausschluss der Lösungen $x_r = 0, y_s = 0$, so ist die Anzahl der Wertgruppen der x genau gleich derjenigen der y, wenn $m + n = \lambda - 1$.

Beispiel, $\lambda = 7$.

$$x_1 + 2x_2 \equiv 0 \pmod 7; \qquad y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 \equiv 0 \pmod 7$$

$$x_1 + x_2 < 7 \qquad\qquad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 < 7$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 5, 3, 1 & y_1 = 1, 2, 1 \\ x_2 = 1, 2, 3 & y_2 = 1, 1, 3 \\ & y_3 = 1, 2, 1 \\ & y_4 = 2, 1, 1 \end{array}$$

Die vertikal unter einander stehenden Zahlen gehören zusammen. Lassen wir aber die Nulllösungen und die Summe $= \lambda = 7$ zu, so hat die zweite Kongruenz noch folgende Wertsysteme:

$$y_1 = 1, 3, 5, 0, 2, 4, 1, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 0, 0, 1,$$
$$y_2 = 3, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0,$$
$$y_3 = 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 0, 0, 1, 1, 3, 5, 0, 2, 4, 1, 3, 1, 0,$$
$$y_4 = 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 4, 3, 4, 5,$$

$$y_1 = 0, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 1, 2, 1,$$
$$y_2 = 4, 2, 1, 0, 0, 0, 2, 4, 2, 1, 0, 0, 0, 2, 5, 3, 1, 5, 3, 1, 3, 1, 1,$$
$$y_3 = 2, 3, 4, 4, 3, 2, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 1, 2, 1,$$
$$y_4 = 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 1, 1, 2.$$

Dies sind 43 Lösungen, zu denen noch die 5 selbstverständlichen mit 4 bez. 3 Unbekannten $= 0$ treten. Im ganzen 48. Es ist

$$2 + \frac{8}{2} + \frac{8 \cdot 9}{2 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 2 + 4 + 12 + 30 = 48.$$

Lassen wir dagegen Nulllösung zu, die Summe $= 7 = \lambda$ aber nicht, so zählen wir 29 und die selbstverständliche $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$, im ganzen $30 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Verbieten wir endlich Nulllösungen, lassen aber die Summe 7 zu, so erhalten wir $5 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$. Diese 5 Lösungen sind

$$y_1 = 1, 3, 1, 2, 1,$$
$$y_2 = 1, 2, 3, 1, 1,$$
$$y_3 = 2, 1, 1, 2, 1,$$
$$y_4 = 3, 1, 1, 1, 2.$$

Unsere Sätze werden also sämtlich bestätigt.

Da KUMMER die Kongruenzen mit *zwei* Unbekannten, welche wir

vorhin allgemein untersucht haben (mit m Unbekannten), bei der Faktorenzerlegung der ψ-Funktionen bemerkte, so könnte der Gedanke entstehen, dass durch analoge Schlüsse sich aus der Verallgemeinerung der Kongruenzen eine Verallgemeinerung der ψ-Funktionen ergeben werde. Meine Bemühungen in dieser Richtung haben mich aber nur zu Produkten der ψ gelangen lassen, sind also nicht von Erfolg gewesen.

4. Bisher haben wir Untersuchungen über Form und Zahl der im entwickelten Produkt P auftretenden Glieder angestellt. Wir wenden uns jetzt der Koefficientenbestimmung zu. Wir geben dem Produkte, welches wir auch kurz *Normprodukt* nennen werden, die Form

$$
\begin{aligned}
(20)\qquad P &= (z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}) \\
&= z^{\lambda} + a^{\lambda} + b^{\lambda} + c^{\lambda} + \lambda \sum K a^k b^l c^m z^n .
\end{aligned}
$$

Wenn wir früher von *vierelementigen* Zahlen ausgingen, so verfolgten wir dabei wesentlich äussere Zwecke. Wir hätten mit einiger Einbusse an Durchsichtigkeit des Vortrags gleich die allgemeine Form mit m Elementen wählen können. Jetzt liegt die Sache anders. Die von jetzt ab vorzutragenden Entwicklungen können nur für *vierelementige* Normprodukte Geltung beanspruchen.

Die Zahlform $z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}$ kann im ganzen $\frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{2}$ verschiedene Gestalten aufweisen. Denn δ und ε dürfen alle verschiedenen Paare von 2 Zahlen aus der Reihe $2, 3, \ldots, \lambda - 2$ sein. Aber diese verschiedenen Paare führen nicht immer zu verschiedenen Normen. Bezeichnen wir nach dem Vorgange vieler Mathematiker den *numerus socius* von δ oder diejenige ganze Zahl δ', welche die Eigenschaft hat, dass $\delta\delta' \equiv 1 \pmod{\lambda}$ wird, kurz durch $\frac{1}{\delta}$, so ist:

$$
N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}) = N(z + a\alpha^{\frac{1}{\delta}} + b\alpha + c\alpha^{\frac{\varepsilon}{\delta}}) = N(z + a\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} + b\alpha^{\frac{\delta}{\varepsilon}} + c\alpha).
$$

Kennt man also die zum Paare δ, ε gehörige Norm, so erhält man durch Vertauschung von b mit a, a mit b die zum Paare $\frac{1}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\delta}$ gehörende Norm u. s. w.

Es ist aber auch

$$N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}) = N(z\alpha^{-1} + a + b\alpha^{\delta-1} + c\alpha^{\varepsilon-1})$$
$$= N(a + z\alpha + b\alpha^{1-\delta} + c\alpha^{1-\varepsilon}).$$

So sind wir zum Paare $1 - \delta,\ 1 - \varepsilon$ gelangt. Es gelingt, durch Anwendung derselben Schlüsse, im ganzen 12 Paare anzugeben, welche zu 12 Normen führen, die durch die Berechnung einer einzigen aus ihnen gewonnen werden und, wie wir sagen werden, eine *Periode* bilden.

Diese 12 Paare sind die folgenden:

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{c} (\delta, \varepsilon);\ \left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{\delta}{\varepsilon}\right);\ \left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right); \\ \left(\frac{1}{1-\varepsilon}, \frac{1-\delta}{1-\varepsilon}\right);\ \left(\frac{1-\varepsilon}{1-\delta}, \frac{1}{1-\delta}\right);\ (1-\delta, 1-\varepsilon); \\ \left(\frac{1-\varepsilon}{\delta-\varepsilon}, \frac{-\varepsilon}{\delta-\varepsilon}\right);\ \left(\frac{\varepsilon-\delta}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right);\ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}, \frac{\varepsilon-\delta}{\varepsilon-1}\right); \\ \left(1-\frac{\varepsilon}{\delta}, 1-\frac{1}{\delta}\right);\ \left(\frac{\delta}{\delta-1}, \frac{\delta-\varepsilon}{\delta-1}\right);\ \left(\frac{\delta-1}{\delta-\varepsilon}, \frac{\delta}{\delta-\varepsilon}\right). \end{array}\right.$$

Die Art dieser Zusammenstellung erhellt aus Folgendem. Wir nennen diejenige *Substitution,* welche das Paar (δ, ε) in $\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{\delta}{\varepsilon}\right)$ überführt ω, ebenso diejenige, welche (δ, ε) in $\left(\frac{1}{1-\varepsilon}, \frac{1-\delta}{1-\varepsilon}\right)$ überführt χ; dann gewinnt das Schema (21) die folgende Gestalt:

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} 1,\ \omega,\ \omega^2, \\ \chi,\ \chi\omega,\ \chi\omega^2, \\ \chi^2, \chi^2\omega, \chi^2\omega^2, \\ \chi^3, \chi^3\omega, \chi^3\omega^2. \end{array}\right.$$

Die Zusammenstellung $\chi\omega$ bezeichnet, dass zuerst die Substitution χ und dann ω vorgenommen werden soll. Wir bemerken die Gleichungen:

$$(23)\qquad \omega^3 = 1, \qquad \chi^4 = 1.$$

Ferner bemerken wir, dass durch die Substitution $\omega\chi\omega\chi^2\omega^2$ das Paar (δ, ε) in (ε, δ) umgewandelt wird. Daher sehen wir, dass im ganzen 24 Wertepaare erhalten werden und *mehr können nicht vorhanden sein.* Denn die Zahlform $z + a\alpha + b\alpha^\delta + c\alpha^\varepsilon$ liefert durch Vertauschung der 4 Elemente z, a, b, c überhaupt 24 verschiedene Darstellungen und jede dieser Darstellungen können wir durch Division mit einer geeigneten Potenz von α und nachfolgende Vertauschung von α gegen eine andere geeignete Potenz von α in die Form $z + a\alpha + b\alpha^\delta + c\alpha^\varepsilon$ setzen.

Aber die Perioden der Paare (δ, ε) brauchen nicht 12-gliedrig zu sein. Sie können weniger Glieder enthalten.

1.) Wenden wir uns zunächst der Substitution χ zu und nehmen an, dass sie keine Veränderung bewirkt. Dann erhalten wir zur Bestimmung derjenigen (δ, ε), welche solche Perioden liefern, die Kongruenzen:

$$\delta \equiv \frac{1}{1-\varepsilon}, \qquad \varepsilon \equiv \frac{1-\delta}{1-\varepsilon} \pmod{\lambda}.$$

Hieraus folgt sofort $(1-\varepsilon)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}$, und wenn wir setzen

$$\vartheta^2 + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}, \tag{24}$$

dann erhalten wir die *dreigliedrige* Periode:

$$(-\vartheta, 1-\vartheta);\ \left(\frac{1+\vartheta}{2}, \frac{1-\vartheta}{2}\right);\ (1+\vartheta, \vartheta). \tag{25}$$

Wir bemerken, dass die *Summe* der Argumente bei dem zweiten Paare, die *Differenz* bei dem ersten und dritten der Einheit kongruent ist. Also ist die *Differenz* der Argumente bei *zwei* Paaren der Einheit kongruent.

2.) Nehmen wir an, χ bewirke Veränderung, aber χ^2 *nicht.* Dann gelangen wir zu den Kongruenzen

$$\delta \equiv \frac{1-\varepsilon}{\delta-\varepsilon}, \qquad \varepsilon \equiv \frac{-\varepsilon}{\delta-\varepsilon} \pmod{\lambda},$$

woraus folgt

$$\varepsilon - \delta \equiv 1 \pmod{\lambda}. \tag{26}$$

Hieraus folgt die *sechsgliedrige* Periode:

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{c} (\varepsilon - 1, \varepsilon); \left(\frac{1}{\varepsilon}, 1 - \frac{1}{\varepsilon}\right), \left(1 + \frac{1}{\varepsilon - 1}, \frac{1}{\varepsilon - 1}\right); \\ \left(\frac{1}{1-\varepsilon}, 1 + \frac{1}{1-\varepsilon}\right); \left(1 - \frac{1}{2-\varepsilon}, \frac{1}{2-\varepsilon}\right); (2 - \varepsilon, 1 - \varepsilon). \end{array}\right.$$

Auch hier haben wir, und zwar genau *viermal,* den Fall vor uns, dass die *Differenz* der Argumente die *Einheit* ergibt. Nur *viermal,* denn bei den andern ist die *Summe* der *Einheit* kongruent.

3.) Es bleibt die Annahme zu erledigen, dass ω keine Veränderung bewirken soll. Dann folgt

$$(28)\qquad \delta \equiv \varepsilon^2, \qquad \varepsilon^3 \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Es ergibt sich eine *viergliedrige* Periode, nämlich

$$(29)\qquad \begin{array}{c} (\varepsilon, \varepsilon^2); \\ \left(\frac{1}{1-\varepsilon}, -\varepsilon^2\right); \left(-\varepsilon, \frac{1}{1-\varepsilon^2}\right); (1 - \varepsilon^2, 1 - \varepsilon). \end{array}$$

Oben fanden wir, dass bei der *dreigliedrigen* Periode stets zwei Argumentenpaare, bei der *sechsgliedrigen* stets *vier* Paare entstehen, deren Differenz die Einheit ist. Umgekehrt lässt sich zeigen, dass aus der Annahme $\varepsilon = \delta + 1$ immer ein *dreigliedriger* oder ein *sechsgliedriger* Cyklus sich ergeben muss. Mithin kommt weder in einem *zwölfgliedrigen* noch in einem *viergliedrigen* Cyklus ein Argumentenpaar von der Form $(\delta, \delta + 1)$ vor.

Nun ist es leicht, die Anzahl der Perioden, d. h. *die Anzahl der wesentlich verschiedenen vierelementigen Normen* anzugeben.

1.) Sei $\lambda = 12n + 1$. Die Kongruenzen $\vartheta^2 + 1 \equiv 0$ und $\varepsilon^3 \equiv 1 \pmod{\lambda}$ können beide erfüllt werden. Die Zahlenpaare $(\delta, \delta + 1)$, deren $\lambda - 3$ vorhanden sind, verteilen sich in den einen *dreigliedrigen* und $3n - 1$ *sechsgliedrige* Cyklen. Da $\frac{(\lambda - 2)(\lambda - 3)}{2} = (6n - 1)(12n - 1)$ Zahlenpaare vorhanden sind, so müssen $3n(2n - 1)$ *zwölfgliedrige* Perioden vorhanden sein. Im ganzen sind $6n^2 + 1$ verschiedene Normen zu berechnen.

2.) Sei $\lambda = 12n + 5$. Der *viergliedrige* Cyklus fehlt, der *dreigliedrige* ist vorhanden. Wir erhalten $n(6n + 1)$ *zwölfgliedrige*, $3n$ *sechsgliedrige* Cyklen, im ganzen $6n^2 + 4n + 1$ *verschiedene Normen.*

3.) $\lambda = 12n + 7$. Der *viergliedrige* Cyklus ist vorhanden, der *dreigliedrige* fehlt. Es existiren $3n(2n+1)$ *zwölfgliedrige*, $3n+1$ *sechsgliedrige* Cyklen, $6n^2 + 6n + 2$ *verschiedene Normen.*

4.) $\lambda = 12n + 11$. Die Ausnahmecyklen fehlen, man hat nur $6n^2 + 7n + 2$ *zwölfgliedrige*, $3n + 2$ *sechsgliedrige* Cyklen, im ganzen $6n^2 + 10n + 4$ *verschiedene Normen.*

Versteht man unter $E(a)$ diejenige ganze Zahl, welche nicht grösser als a ist, so ist in den *drei* ersten Fällen die Anzahl der *verschiedenen Normen* $1 + E\frac{(\lambda-1)^2}{24}$, im Falle $12n + 11$ aber $E\frac{(\lambda-1)^2}{24}$.

Zahlenbeispiele.

1.) $\lambda = 5$.

Es entsteht nur *ein* Cyklus, der dreigliedrige

$$(2, 3), (2, 4), (4, 3).$$

Es ist nur *eine* Norm zu berechnen.

2.) $\lambda = 7$.

Es entstehen *zwei* Cyklen, darunter noch kein zwölfgliedriger.

1. (2, 4);	2. (2, 3); (5, 3); (5, 4);
(2, 5); (3, 6); (6, 4).	(3, 4); (2, 6); (6, 5).

Es sind also *zwei* Normen zu berechnen:

$$N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^4) \quad \text{und} \quad N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3).$$

3.) $\lambda = 11$.

Es entstehen 4 Cyklen, 2 sechsgliedrige, 2 zwölfgliedrige.

1. (2, 3); (4, 8); (7, 6);	2. (3, 4); (3, 9); (5, 4);
(5, 6); (2, 10); (10, 9).	(7, 8); (7, 5); (9, 8).
3. (2, 4); (3, 6); (2, 6);	4. (2, 8); (7, 3); (4, 6);
(7, 4); (3, 10); (10, 8);	(3, 8); (7, 10); (10, 4);
(7, 2); (6, 9); (5, 8);	(3, 5); (9, 5); (9, 4);
(10, 6); (2, 9); (5, 10);	(8, 6); (2, 5); (9, 7).

Es sind 4 Normen zu berechnen. Wir wählen für dieselben die kleinstmöglichen Zahlenpaare, also

$$N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3), \quad N(z + a\alpha + b\alpha^3 + c\alpha^4),$$
$$N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^4), \quad N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^5).$$

4.) $\lambda = 13$.

Hier erhalten wir 7 verschiedene Normen, deren δ, ε wir angeben

$$\delta = 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2,$$
$$\varepsilon = 3, 4, 9, 11, 4, 5, 6.$$

$(2, 3)$ und $(3, 4)$ haben sechsgliedrige, $(3, 9)$ einen viergliedrigen, $(3, 11)$ einen dreigliedrigen, die übrigen haben zwölfgliedrige Cyklen.

5.) $\lambda = 17$.

Wir finden 11 verschiedene Normen, deren δ, ε wir angeben

$$\delta = 2, 3, 5, 4, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4,$$
$$\varepsilon = 3, 4, 6, 5, 4, 5, 6, 7, 5, 7, 6.$$

Die drei ersten geben sechsgliedrige Cyklen, $(4, 5)$ den dreigliedrigen, die andern zwölfgliedrige Cyklen.

5. Schreiten wir jetzt zur Bestimmung der Koefficienten selbst. Betrachten wir zunächst *das Normprodukt mit dreigliedrigem Cyklus.*

Wir haben dem Normprodukte die Form erteilt:

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^\vartheta + c\alpha^{\vartheta+1})$$
$$= z^\lambda + a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda + \lambda\sum K a^k b^l c^m z^n; \qquad \vartheta^2 + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Ausser dem Faktor $z + a\alpha + b\alpha^\vartheta + c\alpha^{\vartheta+1}$ ist vorhanden

$$z + a\alpha^\vartheta + b\alpha^{\vartheta^2} + c\alpha^{\vartheta^2+\vartheta} = z + a\alpha^\vartheta + b\alpha^{-1} + c\alpha^{\vartheta-1},$$

oder nach Multiplikation mit α $b + z\alpha + c\alpha^\vartheta + a\alpha^{\vartheta+1}$. Daher erleidet unsere Norm keine Veränderung, wenn man die Vertauschung anwendet und wiederholt, welche z in b, a in z, b in c und c in a überführt.

Daher haben die Glieder $b^n z^k c^l a^m$ und $a^k b^l c^m z^n$ u. s. w. gleichen Koefficienten. Man kann dies symbolisch so schreiben:

$$\left.\begin{array}{cccc} k & l & m & n \\ m & n & l & k \\ l & k & n & m \\ n & m & k & l \end{array}\right\} . K,$$

wo der an erster Stelle geschriebene Exponent dem a, der zweite dem b, der dritte dem c, der vierte dem z zukommt.

Es ist

$$k + \vartheta l + (\vartheta + 1)m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$k + l + m \overline{\overline{<}} \lambda.$$

k, l, m können nicht gleich sein, da $\vartheta + 1 \equiv 0$ folgen würde; also sind die aufgeschriebenen Exponentengruppen *wesentlich verschieden.* Die im allgemeinen vorhandenen

$$2 + \frac{\lambda + 1}{2} + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2 \cdot 3} - 4 = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 7)}{6}$$

Koefficienten schränken sich auf den 4^{ten} Teil ein, auf $\frac{(\lambda - 1)(\lambda + 7)}{24}$ wesentlich verschiedene.

Beispiel $\lambda = 13$; $\vartheta = 5$, $\varepsilon = 6$.

$k =$	3,	2,	1,	5,	3,	8,	7,	6,	4,	2,
$l =$	2,	1,	0,	3,	1,	1,	0,	4,	2,	0,
$m =$	0,	1,	2,	1,	3,	0,	1,	0,	2,	4,
$n =$	8,	9,	10,	4,	6,	4,	5,	3,	5,	7,
$K =$	+2,	−3,	+1,	−22,	−19,	+1,	−1,	+5,	+32,	+4.

Zum besseren Verständnis wollen wir das zugehörige Normprodukt kurz andeuten:

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^5 + c\alpha^6)$$
$$= z^{13} + a^{13} + b^{13} + c^{13} + 13\{2(a^3b^2z^8 + b^8c^2z^3 + a^2b^3c^8 + a^8c^3z^2)$$
$$- 3(a^2bcz^9 + ab^9cz^2 + ab^2c^9z + a^9bc^2z) + \ldots\}.$$

Wenden wir uns jetzt zu den *Normen mit viergliedrigem Cyklus.* Hier haben wir die Form erteilt:

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\delta^2}).$$

$$= z^{\lambda} + a^{\lambda} + b^{\lambda} + c^{\lambda} + \lambda \sum K z^{n} a^{k} b^{l} c^{m}; \qquad \delta^{3} \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Ausser dem Faktor $z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\delta^2}$ ist auch vorhanden

$$z + a\alpha^{\delta} + b\alpha^{\delta^2} + c\alpha.$$

Unsere Norm erleidet keine Veränderung, wenn man a, b, c *cyklisch* vertauscht. Oder in unserer symbolischen Schreibweise

$$\left.\begin{matrix} k & l & m & n \\ l & m & k & n \\ m & k & l & n \end{matrix}\right\} K,$$

wo

$$k + \delta l + \delta^2 m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$k + l + m \overline{\overline{<}} \lambda.$$

k, l, m können *gleich* sein, da $1 + \delta + \delta^2 \equiv 0$ zutrifft. Scheiden wir die zugehörigen Exponentengruppen aus

$$\begin{aligned} k &= 1, \quad 2, \quad \ldots, \frac{\lambda - 1}{3}, \\ l &= 1, \quad 2, \quad \ldots, \frac{\lambda - 1}{3}, \\ m &= 1, \quad 2, \quad \ldots, \frac{\lambda - 1}{3}, \\ n &= \lambda - 3, \lambda - 6, \ldots, \quad 1, \end{aligned}$$

so verteilen sich die übrigen in Gruppen von je drei, welche denselben Koefficienten K aufweisen. Im ganzen sind $\frac{(\lambda - 1)(\lambda + 11)}{18}$ verschiedene K zu berechnen.

Beispiel: $\lambda = 19$; $\delta = 7$.

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
12	1	0	6		3	5	0	11		0	6	10	3	
1	0	12	6	1	5	0	3	11	−7	6	10	0	3	22
0	12	1	6		0	3	5	11		10	0	6	3	
8	0	1	10		13	2	1	3		6	3	1	9	
0	1	8	10	1	2	1	13	3	−10	3	1	6	9	30
1	8	0	10		1	13	2	3		1	6	3	9	
16	0	2	1		9	8	1	1		8	7	0	4	
0	2	16	1	1	8	1	9	1	−9	7	0	8	4	30
2	16	0	1		1	9	8	1		0	8	7	4	
1	7	11	0		10	4	0	5		10	2	3	4	
7	11	1	0	−1	4	0	10	5	14	2	3	10	4	−50
11	1	7	0		0	10	4	5		3	10	2	4	
14	3	2	0		6	4	9	0		6	1	4	8	
3	2	14	0	2	4	9	6	0	17	1	4	6	8	−56
2	14	3	0		9	6	4	0		4	6	1	8	
0	5	2	12		9	1	2	7		5	7	2	5	
5	2	0	12	3	1	2	9	7	−17	7	2	5	5	−56
2	0	5	12		2	9	1	7		2	5	7	5	
3	4	11	1		8	3	6	2		8	5	3	3	
4	11	3	1	3	3	6	8	2	21	5	3	8	3	61
11	3	4	1		6	8	3	2		3	8	5	3	
13	0	4	2		1	11	5	2		4	2	7	6	
0	4	13	2	7	11	5	1	2	−21	2	7	4	6	99
4	13	0	2		5	1	11	2		7	4	2	6	
1	1	1	16	2	2	2	2	13	23	3	3	3	10	98
4	4	4	7	86	5	5	5	4	−101	6	6	6	1	−83

Zum Verständnis:

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^7 + c\alpha^{11})$$

$$= z^{19} + a^{19} + b^{19} + c^{19} + 19\{61(a^8b^5c^3z^3 + a^5b^3c^8z^3 + a^3b^8c^5z^3) + \ldots\}.$$

Für $a = b = c = z = 1$ finden wir, übereinstimmend mit der Reuschleschen Tafel $N(1 + \alpha + \alpha^7 + \alpha^{11}) = 11^3$.

Untersuchen wir jetzt die Normen mit *sechsgliedrigem Cyklus*. Hier haben wir die Form erteilt:

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\delta+1}) = z^{\lambda} + a^{\lambda} + b^{\lambda} + c^{\lambda} + \lambda\Sigma K a^k b^l c^m z^n,$$

$$k + \delta l + (\delta + 1)m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$k + l + m \overline{\overline{<}} \lambda.$$

Statt der obigen Kongruenz können wir setzen

$$(30) \qquad k + m + \delta(l + m) \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Aus dieser Kongruenz folgt aber, da $k + l + m + n = \lambda$,

$$(31) \qquad l + n + \delta(k + n) \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Jeder Exponentengruppe k, l, m, n entspricht also eine andere l, k, n, m oder $a^k b^l c^m z^n$ und $a^l b^k c^n z^m$ haben *gleichen* Koefficienten. Man braucht also nur $\frac{(\lambda - 1)(\lambda + 7)}{12}$ verschiedene K wirklich zu berechnen.

Wenn wir in unserer Norm setzen $z = 1$, $c = ab$, so verwandelt sich das *Normprodukt* in

$$(1 + a)(1 + b)N(1 + a\alpha)(1 + b\alpha^{\delta}) = 1 + a^{\lambda} + b^{\lambda} + a^{\lambda}b^{\lambda}.$$

Die übrigen Glieder fallen fort. Hieraus folgen beachtenswerte Gleichungen. Denn es ist $\Sigma K a^{k+m} b^{l+m} = 0$. Da zu jedem $k + m$ die Kongruenz (30) das zugehörige $l + m$ eindeutig bestimmt, so haben wir den *Lehrsatz:*

Die Summe der K, für welche k + m einen festen Wert hat, ist Null.

Sind die K unmittelbar auszurechnen, so haben sie den Wert:

$$(-1)^n \frac{\underline{|k + m + l - 1}}{\underline{|k}\,\underline{|m}\,\underline{|l}}.$$

Daher die für beliebige p, q gültige Formel:

$$(32) \qquad \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+q-1)}{\underline{|q}} - \frac{p(p+1)\ldots(p+q-2)}{\underline{|q-1}\,\underline{|1}}$$

$$+ \frac{(p-1)p\ldots(p+q-3)}{\underline{|q-2}\,\underline{|2}} - \ldots \pm \frac{(p-q+1)(p-q+2)\ldots(p-1)}{\underline{|q}} = 0.$$

z. B. $p = 10, q = 4$:

$$\frac{11.12.13}{1.2.3.4} - \frac{10.11.12}{1.2.3.1} + \frac{9.10.11}{1.2.1.2} - \frac{8.9.10}{1.1.2.3} + \frac{7.8.9}{1.2.3.4} = 0.$$

Beispiel eines *Normprodukts.* $\lambda = 13, \delta = 3, \varepsilon = 4$.

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
0 3	3 0	1 9	9 1	− 1	4 3	3 4	0 6	6 0	+ 5	10 1	1 10	0 2	2 0	+ 1	3 5	5 3	2 3	3 2	− 44
1 0	0 1	3 9	9 3	− 1	5 0	0 5	2 6	6 2	+ 3	0 6	6 0	2 5	5 2	+ 3	4 6	6 4	1 2	2 1	+ 15
1 4	4 1	0 8	8 0	+ 1	6 1	1 6	1 5	5 1	− 7	1 3	3 1	4 5	5 4	− 22	7 5	5 7	1 0	0 1	− 1
2 1	1 2	2 8	8 2	+ 6	7 2	2 7	0 4	4 0	+ 4	1 7	7 1	1 4	4 1	− 5	8 2	2 8	3 0	0 3	+ 2
3 2	2 3	1 7	7 1	− 10	9 0	0 9	1 3	3 1	− 1	2 4	4 2	3 4	4 3	+ 49	0 2	2 0	5 6	6 5	+ 3

Zur Bestätigung unseres *Lehrsatzes* haben wir:

$$\begin{array}{rl} k + m = 10, & \sum K = 1 - 1 = 0, \\ 7, & 4 - 7 + 3 = 0, \\ 4, & 5 - 10 + 6 - 1 = 0, \\ 1, & 1 - 1 = 0, \\ 11, & 3 + 2 - 5 = 0, \\ 8, & 49 - 22 + 3 - 1 + 15 - 44 = 0. \end{array}$$

Endlich betrachten wir die *Normen mit zwölfgliedrigem Cyklus.*

Hier müssen wir die allgemeine Form bestehen lassen, dürfen aber annehmen, dass $\varepsilon > \delta$. Die Kummersche Kongruenz

$$k + \delta l + \varepsilon m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$k + l + m \overline{\overline{<}} \lambda,$$

können wir in eine Reihe *Gleichungen* verwandeln. Diese Gleichungen bilden *zwei* Systeme, wie folgt.

I. System.	II. System.
$k + \delta l + \varepsilon m = \lambda,$	$(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n = (\varepsilon - 1)\lambda,$
$k + \delta l + \varepsilon m = 2\lambda,$	$(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n = (\varepsilon - 2)\lambda,$
. . . .	. . . .
$k + \delta l + \varepsilon m = (\varepsilon - 1)\lambda,$	$(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n = \lambda.$

Diejenigen k, l, m, welche der *ersten* Gleichung des *ersten* Systems angehören, liefern K, welche direkt berechnet werden können. Man findet

$$K = (-1)^{k+l+m-1} \frac{\lfloor k + l + m - 1}{\lfloor k \lfloor l \lfloor m}. \tag{33}$$

Ebenso die k, l, n, welche der *letzten* Gleichung des *zweiten* Systems angehören. Man findet

$$K = (-1)^{k+l+n-1} \frac{\lfloor k + l + n - 1}{\lfloor k \lfloor l \lfloor n}. \tag{33a}$$

Ist ε im Verhältniss zu δ gross, so wird man sich mit Vorteil des *zweiten* Systems bedienen. Denn die letzte Zeile desselben sagt aus, da

$$\varepsilon - \delta \leqq \varepsilon - 1 < \varepsilon, \quad \text{dass}$$

$$(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n > (k + l + n)(\varepsilon - \delta),$$

also

$$k + l + n < \frac{\lambda}{\varepsilon - \delta}.$$

Mithin gibt eine Gruppe k_r, l_r, m_r der r^{ten} Zeile (von unten) des zweiten Systems mit einer Gruppe der s^{ten} Zeile zusammen $k_r + k_s, l_r + l_s, m_r + m_s$ eine Gruppe der $r + s^{\text{ten}}$ Zeile, weil

$$k_r + k_s + l_r + l_s + m_r + m_s < \frac{(r + s)\lambda}{\varepsilon - \delta} < \lambda,$$

so lange $r + s$ *kleiner als* $\varepsilon - \delta$ *ist.*

Im ganzen hat man 4 Kongruenzen, von denen man ausgehen kann, nämlich

$$(34)\quad \left.\begin{aligned} k + \delta l + \varepsilon m &\equiv 0 \\ (\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n &\equiv 0 \\ (\delta - 1)l + (\varepsilon - 1)m + (\lambda - 1)n &\equiv 0 \\ (\lambda - \delta + 1)k + (\varepsilon - \delta)m + (\lambda - \delta)n &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{\lambda}.$$

Jede derselben kann man mit einer willkürlichen ganzen Zahl multipliciren. Durch diese Operation wird die Anzahl der Gleichungen vermehrt oder vermindert, welche die Kongruenz ersetzen. Eine Vermehrung derselben lässt die Art der Gruppenzusammensetzung aus kleineren k, l, m deutlicher hervortreten, schädigt aber die Übersichtlichkeit. Es ist zweckmässig, zunächst alle 4 Kongruenzen zu bilden und als Gleichungen mit den rechten Seiten λ, 2λ, 3λ bezüglich ihrer nicht zusammengesetzten Lösungen zu untersuchen.

Man kann fragen, in wieviel *Normprodukten*, zur Primzahl λ, die Exponentengruppe k, l, m, n auftritt. Fassen wir in der Kongruenz

$$k + \delta l + \varepsilon m \equiv 0 \pmod{\lambda}$$

die Zahlen k, l, m als gegeben, δ, ε als gesucht auf; zu jedem

$$\delta = 2, 3, \ldots, \lambda - 1$$

gehört ein festbestimmtes ε und nur $\varepsilon = 1$ ist unter diesen zu verwerfen. Also kann man im ganzen $\lambda - 3$ Zahlenpaare ε, δ angeben, welche *Normprodukte* der gesuchten Art liefern. Bilden wir nun alle diese Normprodukte, bilden wir ferner die 24 Vertauschungen der k, l, m, n und berechnen in allen $24(\lambda - 3)$ Normprodukten die zugehörigen K, so können wir den Satz aussprechen:

Alle eben besprochenen K sind mod λ *kongruent.*

Die Zahlen K bestehen gemäss Gleichung (8) aus einem unmittelbar zu berechnenden Teile und aus Teilen, welche dadurch entstehen, dass drei der k, l, m, n aus kleineren Gruppenzahlen durch Addition zusammengesetzt sind. Findet keine Zusammensetzung statt, so fehlen diese

Teile gänzlich. Für unsern Satz sind diese Teile auch völlig gleichgültig. Denn sie haben den Faktor λ mindestens in erster Potenz. Unser Satz ist also bewiesen, wenn die Teile, welche unmittelbar berechnet werden können, kongruent sind. Dies zeigen wir für die Vertauschung k, l, n, m. Die betreffenden Ausdrücke stehen (33) und (33a). Es muss also sein, $(k + l + m + n = \lambda)$,

$$(35) \qquad (-1)^n \cdot \frac{\underline{|\lambda - n - 1}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|m}} \equiv (-1)^m \frac{\underline{|\lambda - m - 1}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|n}} \pmod{\lambda}.$$

Nun ist:

$$\left.\begin{aligned} (-1)^n \cdot \underline{|n} &\equiv (\lambda - 1)(\lambda - 2) \ldots (\lambda - n) \\ (-1)^m \cdot \underline{|m} &\equiv (\lambda - 1)(\lambda - 2) \ldots (\lambda - m) \end{aligned}\right\} \pmod{\lambda},$$

und daraus folgt die Richtigkeit der Kongruenz (35). Jedes berechnete Normprodukt liefert *Zahlenbeispiele* zu diesem bemerkenswerten Satze. Es ist auffallend, dass die *Kongruenz* oft zur *Gleichheit* wird. Diese Gleichheit ergab sich uns bei den nicht zwölfgliedrigen Cyklen für einige bestimmte Vertauschungen als notwendig.

6. Jetzt wollen wir in einigen besonderen Fällen die Berechnung von Normprodukten vollständig ausführen.

Als erstes Beispiel wählen wir

$$(z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3).$$

Hier gelten die Bestimmungen

$$k + 2l + 3m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$k + l + m \leqq \lambda.$$

Die Kongruenz ersetzen wir durch die beiden Gleichungen:

$$k + 2l + 3m = \lambda, \qquad k + 2l + 3m = 2\lambda.$$

Die letztere können wir wieder durch $l + 2k + 3n = \lambda$ ersetzen. Somit haben wir, wie bei den sechsgliedrigen Normen überhaupt, die zulässige Vertauschung k, l und m, n. Das Normprodukt kann ohne Rechnung niedergeschrieben werden. Sei

$$h = k + l + m, \qquad k = \lambda - 2l - 3m, \qquad n = l + 2m.$$

Dann ist:

$$(36)\qquad (z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3)$$

$$= z^\lambda + a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda + \lambda\sum(-1)^l \frac{|\underline{h-1}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{m}}(a^k b^l c^m z^n + a^l b^k c^n z^m).$$

Zahlenbeispiel: $\lambda = 13$, $\delta = 2$, $\varepsilon = 3$.

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
1	0	4	8	1	1	6	0	6	1	4	3	1	5	− 35	7	3	0	3	− 12
0	1	8	4		6	1	6	0		3	4	5	1		3	7	3	0	
0	2	3	8	2	2	4	1	6	15	5	1	2	5	− 21	8	1	1	3	− 9
2	0	8	3		4	2	6	1		1	5	5	2		1	8	3	1	
0	5	1	7	− 1	3	2	2	6	30	5	4	0	4	14	9	2	0	2	5
5	0	7	1		2	3	6	2		4	5	4	0		2	9	2	0	
1	3	2	7	− 10	4	0	3	6	5	6	2	1	4	28	10	0	1	2	1
3	1	7	2		0	4	6	3		2	6	4	1		0	10	2	1	
2	1	3	7	− 10	3	5	0	5	− 7	7	0	2	4	4	11	1	0	1	− 1
1	2	7	3		5	3	5	0		0	7	4	2		1	11	1	0	

Da $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$ eine *Einheit*, so ist die Summe der K Null. Im vorigen Normprodukte, Seite 288, hatten die Vertauschungen 3, 2, 1, 7 und 2, 3, 7, 1 *denselben* Koefficienten — 10 wie die hier auftretenden. Man erkennt darin eine Bestätigung unseres im vorigen Paragraphen bewiesenen *Lehrsatzes*.

Als zweites Beispiel wählen wir

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^4).$$

Hier wählen wir die drei Gleichungen:

$$k + 2l + 4m = \lambda,$$

$$3k + 2l + 4n = 2\lambda,$$

$$3k + 2l + 4n = \lambda.$$

Ferner bilden wir

$$A_1 = \lambda\sum(-1)^n \frac{|\underline{\lambda - n - 1}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{m}} z^n a^k b^l c^m$$

für alle k, l, m der ersten Gleichung;

$$A_2 = \lambda \sum (-1)^m \frac{|\underline{\lambda - m - 1}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{n}} z^n a^k b^l c^m$$

für alle k, l, n der zweiten Gleichung;

$$A_3 = \lambda \sum (-1)^m \frac{|\underline{\lambda - m - 1}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{n}} z^n a^k b^l c^m$$

für alle k, l, n der dritten Gleichung.

Dann ist:

$$(z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^4) \tag{37}$$

$$= z^\lambda + a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda + A_1 + A_2 + A_3 + \frac{1}{2} c^{-\lambda} A_3^2.$$

Für $\delta = 2$, $\varepsilon = 5$ bilden wir

$$A_1 = \lambda \sum (-1)^n \frac{|\underline{\lambda - n - 1}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{m}} a^k b^l c^m z^n$$

mit der Bedingung $k + 2l + 5m = \lambda$.

Ferner die drei Summen B_1, B_2, B_3 nach dem Schema

$$B_r = \lambda \sum (-1)^m \frac{|\underline{\lambda - m - 1}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{n}} a^k b^l c^m z^n$$

mit der Bedingung

$$4k + 3l + 5n = r\lambda.$$

Dann wird

$$(z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^3 + c\alpha^5) \tag{38}$$

$$= z^\lambda + a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda + A_1 + B_1 + B_2 + B_3 + \frac{1}{2} c^{-\lambda} B_1^2 + c^{-2\lambda} B_1 B_2 + \frac{1}{6} c^{-2\lambda} B_1^3.$$

Als Zahlenbeispiele nehmen wir

1.) $\lambda = 13, \delta = 2, \varepsilon = 4.$

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
11	1	0	1	−1	1	4	1	7	−5	0	7	3	3	−12	2	2	5	4	6
9	2	0	2	5	5	0	2	6	3	2	6	3	2	17	4	1	5	3	4
7	3	0	3	−12	3	1	2	7	−10	4	5	3	1	−9	6	0	5	2	3
5	4	0	4	14	1	2	2	8	6	6	4	3	0	5	2	0	6	5	3
3	5	0	5	−7	1	0	3	9	−1	0	5	4	4	14	0	1	6	6	1
1	6	0	6	1	0	11	1	1	−1	2	4	4	3	−16	1	5	7	0	−1
9	0	1	3	−1	2	10	1	0	1	4	3	4	2	10	3	2	8	0	2
7	1	1	4	8	0	9	2	2	5	6	2	4	1	2	3	0	9	1	−1
5	2	1	5	−21	2	8	2	1	−7	8	1	4	0	1	1	3	8	1	4
3	3	1	6	20	4	7	2	0	4	0	3	5	5	−7	1	1	9	2	−3

2.) $\lambda = 13, \delta = 2, \varepsilon = 5.$

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
1	6	0	6	1	8	0	1	4	1	3	4	3	3	−4	1	4	6	2	2
3	5	0	5	−7	1	1	2	9	−3	5	3	3	2	−5	3	3	6	1	7
5	4	0	4	14	3	0	2	8	2	7	2	3	1	3	5	2	6	0	3
7	3	0	3	−12	1	10	1	1	2	9	1	3	0	−1	0	2	7	4	4
9	2	0	2	5	3	9	1	0	−1	0	3	4	6	5	2	1	7	3	3
11	1	0	1	−1	0	8	2	3	2	4	1	4	4	−8	4	0	7	2	4
0	4	1	8	1	2	7	2	2	11	6	0	4	3	5	1	3	9	0	−1
2	3	1	7	−10	4	6	2	1	−11	1	0	5	7	−1	2	0	10	1	1
4	2	1	6	15	6	5	2	0	3	0	7	5	1	−1	0	1	10	2	1
6	1	1	5	−7	1	5	3	4	17	2	6	5	0	3	2	2	4	5	6

3.) $\lambda = 13, \delta = 2, \varepsilon = 6.$

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
1	6	0	6	1	1	0	2	10	1	4	0	8	1	1	1	2	10	0	1
3	5	0	5	−7	0	10	1	2	1	2	3	3	5	−18	3	3	5	2	8
5	4	0	4	14	2	9	1	1	−3	4	2	3	4	10	5	2	5	1	−8
7	3	0	3	−12	4	8	1	0	1	6	1	3	3	−6	7	1	5	0	−1
9	2	0	2	5	0	7	2	4	4	8	0	3	2	2	1	1	6	5	6
11	1	0	1	−1	2	6	2	3	−9	0	1	4	8	1	3	0	6	4	5
1	3	1	8	4	4	5	2	2	19	2	0	4	7	4	0	5	7	1	−1
3	2	1	7	−10	6	4	2	1	−11	1	7	4	1	−5	2	4	7	0	4
5	1	1	6	6	8	3	2	0	2	3	6	4	0	5	0	2	8	3	2
7	0	1	5	−1	0	4	3	6	5	1	4	5	3	−9	2	1	8	2	6
k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K

Der Vollständigkeit wegen mag noch das letzte der 7 selbständigen vierelementigen Normprodukte zur Primzahl 13 angegeben werden.

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
0	10	2	1		1	3	0	9		8	3	1	1	
1	4	8	0		3	9	0	1		3	1	1	8	
4	0	8	1	1	9	1	0	3	−1	1	8	1	3	4
0	1	8	4		0	5	1	7		0	7	4	2	
10	1	2	0		5	7	1	0		7	2	4	0	
1	0	2	10		7	0	1	5		2	0	4	7	
2	5	5	1		2	3	2	6		2	8	3	0	
5	1	5	2		3	6	2	2		8	0	3	2	2
1	2	5	5	5	6	2	2	3	17	0	2	3	8	
0	4	6	3		1	5	3	4		5	2	0	6	
4	3	6	0		5	4	3	1		2	6	0	5	3
3	0	6	4		4	1	3	5		6	5	0	2	
1	1	10	1	2	3	3	4	3	22					
2	2	7	2	11	4	4	1	4	18					

Hier ist $\lambda = 13$, $\vartheta = 4$, $\varepsilon = 6$. Bei weiterer Ausrechnung ergab sich:

$$N(1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6) = 3^6, \qquad N(1 - \alpha + \alpha^4 + \alpha^6) = 313,$$

$$N(-1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6) = N(1 + \alpha - \alpha^4 + \alpha^6) = 131,$$

$$N(1 + \alpha + \alpha^4 - \alpha^6) = 3^3.$$

Vergleicht man die K mit den bei $\lambda = 19$ berechneten, so scheinen dieselben noch manche andere Gesetzmässigkeiten zu befolgen; auf die wir jedoch nur mit dieser Hindeutung verweisen.[1]

Endlich mag der Ausdruck des vollständigen Normproduktes für $\lambda = 7$ hier Platz finden. Wir schreiben denselben in abgekürzter Form folgendermassen:

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) N(a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4 + a_5\alpha^5 + a_6\alpha^6)\\
= a_1^7 + 7\{a_1 a_2 a_3^3 a_4 a_5 + 5a_1 a_2^2 a_3 a_4^2 a_5 - 2a_1^2 a_2 a_3 a_4 a_5^2 - 3a_1^3 a_2^3 a_3 a_4 - 3a_2 a_3 a_4^2 a_5^3\\
- 3a_1 a_2 a_3^2 a_4^3 + 2a_1^4 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2^2 a_3^2 a_4^2 - a_1^3 a_2 a_3^3 - a_1^3 a_2^3 a_4 - a_1 a_2^5 a_3 - a_3 a_4^5 a_5\\
+ 2a_1^2 a_2^3 a_3^2 + 2a_3^2 a_4^3 a_5^2 + a_1^4 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_2^4 a_4 + a_1 a_3^4 a_4^2 + a_1^2 a_3 a_4^4\}.\end{aligned}$$

[1] Zahlreiche Bestätigungen unseres Lehrsatzes (Seite 290) zeigen die vorstehenden Beispiele auf den ersten Blick.

Jedes niedergeschriebene Glied vertritt 6 Glieder, welche aus demselben durch Multiplikation der Indices mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 hervorgehen. So vertritt $a_1 a_2^5 a_3$ die folgende Summe:

$$a_1 a_2^5 a_3 + a_2 a_4^5 a_6 + a_3 a_6^5 a_2 + a_4 a_1^5 a_5 + a_5 a_3^5 a_1 + a_6 a_5^5 a_4.$$

Dieses *vollständige Normprodukt* wurde berechnet aus einem fünfelementigen. Die Rechnung selbst war mit Hülfe unserer Sätze über Anzahl und Bau der Glieder eine überraschend einfache zu nennen.

Coesfeld im Februar 1888.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE GALOIS

DANS LA THÉORIE

DE LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS

PAR

J. T. SÖDERBERG

à UPSALA.

1. Dans les quelques pages suivantes je me propose de présenter une démonstration nouvelle et très simple de l'important théorème de Galois sur l'existence du groupe de substitutions appelé *groupe d'une équation algébrique*. Elle a été publiée en suédois dans ma thèse inaugurale *Deduktion af nödvändiga och tillräckliga vilkoret för möjligheten af algebraiska eqvationers solution med radikaler,* Upsala Universitets Årsskrift, 1886. Je la présente ici avec de légères modifications.

2. Avant d'en commencer l'exposition nous aurons à nous expliquer sur le sens particulier que nous attribuerons à certaines expressions. Nous conviendrons de regarder, avec Galois, comme *rationnelle* toute quantité qui peut s'exprimer par une fonction rationnelle aux coefficients commensurables à l'unité de certaines quantités données à priori et que nous regarderons comme *connues.* Pour qu'une *fonction* soit appelée *rationnelle* nous entendrons que tous les coefficients en soient rationnelles.

Si une fonction rationnelle des quantités

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$$

reste invariable par les substitutions d'un certain groupe, même en sup-

posant $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ des variables indépendantes, nous dirons que la *forme* de la fonction reste invariable par ces substitutions. Et nous distinguerons soigneusement ce cas de l'autre, où,

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$$

étant les racines d'une équation donnée

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

à coefficients rationnels, ce n'est que la *valeur* de la fonction qui reste invariable par certaines substitutions.

3. En partant des propositions établies par LAGRANGE dans son célèbre Mémoire *Réflexions sur la résolution algébrique des équations,* Section IV, il est facile d'établir le théorème suivant:

Si y et V sont deux fonctions rationnelles des racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ d'une équation algébrique donnée, et que la valeur de y reste invariable par toutes les substitutions qui ne changent pas la valeur de V, la fonction y peut s'exprimer en fonction rationnelle de V.

En effet, LAGRANGE a démontré la proposition suivante:

Si z et V sont deux fonctions rationnelles des racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ d'une équation algébrique, si $1, s_1, \ldots, s_{k-1}$ sont les substitutions qui ne changent pas la forme de la fonction V, si les mêmes substitutions laissent aussi invariable la forme de la fonction z, si enfin $1, \sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}$ sont des substitutions tellement choisies que le tableau

$$\begin{array}{lllll} 1, & s_1, & s_2, & \ldots, & s_{k-1}, \\ \sigma_1, & s_1\sigma_1, & s_2\sigma_1, & \ldots, & s_{k-1}\sigma_1, \\ \sigma_2, & s_1\sigma_2, & s_2\sigma_2, & \ldots, & s_{k-1}\sigma_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{i-1}, & s_1\sigma_{i-1}, & s_2\sigma_{i-1}, & \ldots, & s_{k-1}\sigma_{i-1} \end{array}$$

donne toutes les substitutions différentes qui ne changent pas la valeur de V,

la moyenne arithmétique des fonctions qui résultent de z en faisant les substitutions $1, \sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}$, *sera exprimable en fonction rationnelle de V.*

Or, il est facile de s'assurer que notre proposition est une conséquence immédiate de celle de Lagrange. D'abord, la moyenne arithmétique des fonctions qu'on obtient de y par les substitutions $1, s_1, \ldots, s_{k-1}$, est une fonction nouvelle z, dont la forme reste invariable par ces substitutions. De plus, si l'on forme la moyenne arithmétique des fonctions résultant de z par les substitutions $1, \sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}$, on aura le même résultat qu'en prenant la moyenne arithmétique de toutes les fonctions qui s'obtiennent de y en faisant les substitutions du tableau ci-dessus. Mais il suit de notre hypothèse que toutes ces fonctions, et par conséquent leur moyenne arithmétique, sont égales à y. Donc, en appliquant à la fonction z le théorème de Lagrange, on voit que y s'exprime en fonction rationnelle de V.

c. q. f. d.

4. Supposons que

$$V_0, V_1, \ldots, V_{i-1}$$

soient toutes les formes différentes dont la valeur est égale à la valeur donnée V_0 qu'on puisse faire acquérir à la fonction V en faisant toutes les substitutions possibles. Considérons toutes les substitutions dont l'effet est de remplacer le système des formes

$$V_0, V_1, \ldots, V_{i-1}$$

par un autre qui ne contient pas de forme nouvelle; il est évident que ces substitutions forment un groupe. Nous dirons que ce groupe appartient à la valeur V_0 de la fonction V. Les substitutions de ce groupe sont, par conséquent, celles qui laissent invariable la valeur de chacune des fonctions

$$V_0, V_1, \ldots, V_{i-1}.$$

Il est facile maintenant de modifier la proposition citée plus haut de la manière suivante:

Si y est une fonction rationnelle des racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ dont la valeur n'est pas changée par les substitutions du groupe appartenant à une

valeur donnée de la fonction V, on peut exprimer y en fonction rationnelle de V.

En effet, on peut choisir les quantités rationnelles

$$k_0, k_1, \ldots, k_{i-1}$$

de manière que la valeur de la fonction

$$Q = k_0 V_0 + k_1 V_1 + \ldots + k_{i-1} V_{i-1}$$

ne reste invariable que par les substitutions qui laissent invariable la valeur de chacune des fonctions $V_0, V_1, \ldots, V_{i-1}$. Donc y est fonction rationnelle de Q et, par conséquent, de V, puisque toutes les fonctions $V_0, V_1, \ldots, V_{i-1}$ ont la même valeur V.

5. Avant d'aborder la démonstration du théorème fondamental de Galois, nous établirons encore le point suivant. Admettons que U et V soient les valeurs données de deux fonctions rationnelles des racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ Il est facile alors de former une autre fonction rationnelle R des mêmes racines, telle que le groupe appartenant à une valeur donnée de R soit formé par les substitutions communes aux deux groupes qui appartiennent aux valeurs données des deux fonctions U et V. En effet, supposons que

$$U_0, U_1, \ldots, U_{i-1}$$

soient les différentes formes de la première fonction dont la valeur est U, et que

$$V_0, V_1, \ldots, V_{j-1}$$

aient une signification analogue pour la fonction V. Considérons une fonction rationnelle de la forme

$$R = h_0 U_0 + h_1 U_1 + \ldots + h_{i-1} U_{i-1} + k_0 V_0 + k_1 V_1 + \ldots + k_{j-1} V_{j-1},$$

où nous supposerons que les coefficients h et k soient des quantités rationnelles. Toutes les formes diverses que peut acquérir la fonction R par les substitutions, seront représentées par la formule

$$h_0 U_{\alpha_0} + h_1 U_{\alpha_1} + \ldots + h_{i-1} U_{\alpha_{i-1}} + k_0 V_{\beta_0} + k_1 V_{\beta_1} + \ldots + k_{j-1} V_{\beta_{j-1}},$$

où $U_{\alpha_0} \ldots U_{\alpha_{i-1}}$ et $V_{\beta_0} \ldots V_{\beta_{j-1}}$ sont des formes quelconques que peuvent acquérir les fonctions U et V par les substitutions. Il est clair que nous pouvons choisir les coefficients h et k, de manière que la valeur de chacune de ces formes soit différente de la valeur donnée, à moins que toutes les fonctions $U_{\alpha_0} \ldots U_{\alpha_{i-1}}$ n'aient la valeur U et les fonctions $V_{\beta_0} \ldots V_{\beta_{i-1}}$ la valeur V.

Mais alors R est une fonction comme celle dont nous avons annoncé l'existence. Les fonctions $U_{\alpha_0} \ldots U_{\alpha_{i-1}}$ ayant toutes la valeur U, et les fonctions $V_{\beta_0} \ldots V_{\beta_{i-1}}$ la valeur V, on a

$$R = (h_0 + \ldots + h_{i-1})\,U + (k_0 + \ldots + k_{j-1})\,V.$$

6. Il est facile à présent d'établir le théorème de Galois, dont voici l'énoncé:

Si une équation algébrique n'a pas de racines égales, il y a toujours un groupe de substitutions — et il n'y en a qu'un — qui jouit de la double propriété suivante:

1° *toute fonction rationnelle des racines dont la valeur est rationnelle, reste invariable par les substitutions du groupe;*

2° *réciproquement, toute fonction rationnelle des racines dont la valeur n'est pas changée par les substitutions du groupe, s'exprime rationnellement par les quantités connues.*

Ce groupe a été appelé par Galois *le groupe de l'équation.*

Considérons l'ensemble des groupes qui appartiennent à des valeurs données des fonctions rationnelles de $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ exprimables rationnellement par les quantités connues. Parmi ces groupes, il y en aura un dont l'ordre est moindre ou égal à celui de tout autre groupe. Soit G ce groupe; je dis qu'il jouit de la double propriété dont il s'agit.

En effet, soient Γ un quelconque des groupes considérés, I le groupe des substitutions communes à G et à Γ, ω et Ω les fonctions rationnelles des racines auxquelles correspondent les groupes G et Γ; il y aura (n° 5) une fonction rationnelle des racines, dont le groupe appartenant à une valeur donnée sera précisément I. De plus, cette fonction s'exprimant en fonction rationnelle et linéaire de ω et Ω, il faut que sa valeur soit rationnelle. L'ordre de I ne peut donc être inférieur à celui de G,

d'où il suit que ces deux groupes sont identiques, et que, par conséquent, les substitutions de G font toutes partie du groupe Γ.

La première partie du théorème de Galois se trouve donc établie.

La démonstration de la seconde partie est immédiate. En effet (n° 4) toute fonction rationnelle des racines dont la valeur reste invariable par les substitutions de G, s'exprime rationnellement par ω et, en conséquence, par les quantités connues.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer que le groupe d'une équation est unique. S'il n'en était pas ainsi, soit H un autre groupe jouissant comme G des propriétés du groupe de l'équation. Comme au n° 4, nous pouvons former une fonction rationnelle ω_1 dont la valeur reste invariable par les substitutions de G, mais est changée par toute autre substitution. Cette fonction s'exprimant rationnellement par les quantités connues, sa valeur reste invariable par les substitutions du groupe H, qui par conséquent est contenu dans G.

Mais d'un autre côté, les racines étant inégales, nous pouvons aussi, par un procédé bien connu (voir p. ex. Jordan, *Traité des substitutions*, pag. 255), trouver une fonction rationnelle ω_2 dont non seulement la valeur, mais la forme même reste invariable par les substitutions de H et dont la valeur est changée par toute autre substitution. Par suite de notre hypothèse cette fonction est une quantité rationnelle et par conséquent il faut que sa valeur soit invariable par les substitutions de G. Ces substitutions appartiennent donc aussi au groupe H, et par conséquent les groupes G et H sont identiques, ce qui achève la démonstration du théorème de Galois.

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS.

Published under the Auspices of the Johns Hopkins University.

The American Journal of Mathematics, founded under the auspices of the Johns Hopkins University, in 1878, was conducted by Professor Sylvester during the period of his connection with the University. It will be hereafter under the direction of SIMON NEWCOMB (Foreign Member of the Royal Society, and Corresponding Member of the Institute of France), Professor of Astronomy and Mathematics in the Johns Hopkins University and Director of the U. S. Nautical Almanac, as *Editor*, and of THOMAS CRAIG, Ph. D., Associate Professor of Applied Mathematics, as *Associate Editor*.

Nine volumes of about 400 pages each have been issued, and the tenth is now in progress. The journal appears quarterly in the quarto form.

The subscription price is dollars 5 a volume; single numbers dollars 1.50.

Communications in regard to subscriptions should be addressed to

PUBLICATION AGENCY of the Johns Hopkins University, BALTIMORE, Md., U. S. A.

Or to Messrs *MAYER & MÜLLER, BERLIN, PRUSSIA.*

Contents of Recent Volumes.

Vol. IX.

Vol. X *(in progress).*

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

herausgegeben von | rédigée par

G. ENESTRÖM.

I, 1884. [Preis 2,40 M. Prix 3 fr.] II, 1885. [Preis 2,40 M. Prix 3 fr.]
III, 1886. [Preis 4 M. Prix 5 fr.]

Vom Jahre 1887 an hat eine neue Folge dieser Zeitschrift begonnen, die ausschliesslich der Geschichte der Mathematik gewidmet ist. Sie erscheint jährlich in 4 Nummern von etwa 2 Druckbogen gross-8°; der Preis des Jahrgangs beträgt 4 Mark.

Der erste Jahrgang dieser neuen Folge ist vollständig erschienen.

Berlin. ***MAYER & MÜLLER.***

A partir de 1887 commence une nouvelle série pour ce journal, qui sera exclusivement consacrée à l'histoire des mathématiques. Elle contiendra par an 4 numéros d'environ 2 feuilles grand-in-8°. Le prix de l'abonnement annuel est de 5 francs.

La première année de cette nouvelle série a complètement paru.

Paris. ***A. HERMANN.***

Ausgegeben den 1. Juni 1888. — Paru le 1 juin 1888.

Inhaltsverzeichniss. Table des matières.

Durch die gesteigerten Herstellungskosten waren wir gezwungen, in dem Preise der Acta Mathematica eine Erhöhung eintreten zu lassen, wenn nicht die Ausstattung der Zeitschrift beeinträchtigt werden sollte.

Der Subscriptionspreis ist vom 11:ten Bande ab auf M. 15.— = Francs 18.75 festgesetzt.

Berlin. **MAYER & MÜLLER.**

Les frais de publication des Acta Mathematica ayant augmenté, nous nous voyons dans la nécessité d'élever le prix de l'abonnement, pour éviter des changements dans le Journal.

Le prix de l'abonnement sera donc, à partir du 11^me tome, fixé à 18.75 francs = 15 marcs.

Paris. **A. HERMANN.**

Preis des Bandes: 15 Mark. — Prix par volume: 18,75 francs.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON | JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

11:4

NB STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1888.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

Nous avons le douloureux devoir d'annoncer à nos lecteurs la mort de notre collaborateur

H.-TH. DAUG,

décédé à Upsala, le 23 mars dernier.

Daug était né le 24 avril 1828 à Gothembourg; en 1856 il devint docent pour les mathématiques à l'Université d'Upsala, docteur en philosophie en 1857, professeur extraordinaire en 1863, et professeur ordinaire en 1867. De 1858 à 1867 il avait presque sans interruption remplacé MALMSTEN. Il a été élu membre de la Société des Sciences d'Upsala en 1862, de l'Académie des Sciences de Stockholm en 1875, de la Société des Sciences et Lettres de Gothembourg en 1878.

Les travaux mathématiques de **Daug** se rapportent principalement aux applications de l'analyse à la géométrie. Ses nombreux élèves qui appartiennent à toute la Suède lui portaient la plus sincère affection et conserveront avec reconnaissance le souvenir de son enseignement.

MITTAG-LEFFLER.

ÜBER DIE BEWEGUNG EINES SCHWEREN PUNCTES AUF EINER ROTATIONSFLÄCHE

VON

OTTO STAUDE

in DORPAT.

Einleitung.

Für eine Gruppe von Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems materieller Puncte hat JACOBI[1] die Integrale in der allgemeinen Form:

$$\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial k}dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial k}dq_2\right) = \alpha,$$

$$\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial h}dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial h}dq_2\right) = \beta + t$$

angegeben. Hier bedeuten q_1, q_2 die beiden unabhängigen Variabeln, durch welche Ort und Lage des Punctsystems bestimmbar sein sollen, bedeuten h, k, α, β Integrationsconstanten, p_1, p_2 gewisse Functionen von q_1, q_2, h, k und endlich t die Zeit. Wenn mit der Auffindung dieser Gleichungen die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung als solche vollständig erledigt ist, so bleibt das *Umkehrproblem der Integrale* übrig, d. h. die Darstellung der Variabeln q_1, q_2, beziehungsweise gegebener Functionen derselben, durch die Zeit t. Diese Aufgabe scheint selbst für die einfachen Fälle noch nicht allgemein behandelt worden zu sein, wo die Integralgleichungen die Variabeln q_1, q_2 separirt enthalten, also α und $\beta + t$ je einer Summe zweier einfacher Integrale gleich werden.

[1] Vgl. *Vorlesungen über Dynamik*, herausgegeben von CLEBSCH, S. 175, S 515.

Auf Integralgleichungen, bei denen eine solche Vereinfachung eintritt, führt *die Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche mit verticaler Symmetrieaxe.* Das Umkehrproblem der Integrale der Bewegungsdifferentialgleichungen kann in diesem Falle nur bei einer beschränkten[1] Zahl von Rotationsflächen als Beispiel für die Anwendung der *elliptischen* Functionen behandelt werden;[2] für andere führt es zwar auf *hyperelliptische* Integrale,[3] aber nicht auf ein JACOBI'sches Umkehrproblem, welches mittels der hyperelliptischen Functionen lösbar wäre. Es darf daher die

---

[1] Es giebt 5 Rotationsflächen, darunter die Kugel, den Kegel und das Rotationsparaboloid, bei denen das Umkehrproblem nur *elliptische* Integrale enthält, nach KOBB, *Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution,* Acta mathematica, Bd. **10**, S. 89, 1887.

[2] Bei der *Kugel* hat das Problem wiederholt ausführliche Behandlung mittels der elliptischen Functionen erfahren, zuerst wohl durch TISSOT, *Mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère,* LIOUVILLE's Journal de mathématiques, 1. Serie, Bd. **17**, S. 88, 1852; vgl. die späteren Darstellungen bei SCHELLBACH, *Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen*, Berlin, 1864; DURÈGE, *Theorie der elliptischen Functionen,* Leipzig, 1878; GEELMUYDEN, *Den koniske Pendelbevægelse,* Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. **5**, S. 307, 1881; u. a. Die eine Coordinate (z in der Bezeichnung des § 3 des obigen Textes) des bewegten Punctes auf der Kugel wird unmittelbar eine elliptische Function der Zeit. Die Darstellung der anderen Coordinate (φ in der Bezeichnung d. a. O.) durch die Zeit kommt auf die Darstellung der elliptischen Integrale 3. Gattung durch Thetafunctionen zurück. Auf wesentlich anderem Wege als die genannten Autoren, nämlich unter Vermittlung der LAMÉ'schen Differentialgleichung, gelangt HERMITE, *Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques,* Comptes rendus, Bd. **93**, S. 922, Paris, 1881, zur Entwicklung der 2. Coordinate, bezüglich einer Exponentialfunction derselben. Die gleiche Vermittlung nimmt die Methode von DILLNER, *Sur l'intégration des équations différentielles du pendule conique,* Nova acta societatis scientiarum Upsaliensis, 3. Serie, Bd. **12**, 1883, in Anspruch.

Über *Kegel* und *Paraboloid* liegen verschiedene Bearbeitungen im Sinne der TISSOT'schen Entwicklungen auf Grund der Theorie der elliptischen Functionen vor, vgl. BERTRAM, *Beitrag zur Kenntniss von der Bewegung eines schweren Punctes auf Rotationsflächen mit verticaler Axe,* Archiv der Mathematik und Physik, Th. **59**, S. 193, 1876; E. VOSS, *Bewegung eines schweren Punctes auf der Fläche eines geraden Kegels und eines Rotationsparaboloids,* Schwerin, 1878 (1872); ZÜGE, *Bewegung eines schweren Punctes auf einem Rotationsparaboloid*, Archiv der Mathematik und Physik, Th. **70**, S. 58, 1884.

[3] Vom Geschlecht $p = 2$ für das *Rotationsellipsoid,* vgl. SCHLEIERMACHER, *Über die Bewegung eines schweren Punctes auf dem verlängerten Rotationsellipsoid*, Erlangen, o. J.; vom Geschlecht $p = 3$ für den *Kreisring,* vgl. § 10 des vorliegenden Textes.

Frage nach *der allgemeinen Lösung des Umkehrproblems für alle Rotationsflächen* gerechtfertigt erscheinen, zu welcher die vorliegende Abhandlung einen Beitrag zu geben beabsichtigt.

Die Untersuchung umfasst alle Rotationsflächen, die von einer Horizontalebene in nicht mehr als 2 Parallelkreisen geschnitten werden, unter näher angegebenen Voraussetzungen (§ 3, § 8) und führt zu zwei Hauptresultaten. Das erste derselben besteht in dem Nachweis *einer von der gegebenen Rotationsfläche unabhängigen Rotationsfläche* 3. *Ordnung* (§ 5), *welche in der Vertheilung ihrer Schnittcurven mit der gegebenen Rotationsfläche den Charakter der Bewegung eines schweren Punctes auf dieser bestimmt* und im Besonderen die Stabilität oder Instabilität der Bewegung entscheidet.[1] Dem anderen Hauptresultate zufolge *sind für die beiden Normalformen* (§ 4, § 9) *jeder stabilen Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche die Coordinaten des Punctes bedingt periodische Functionen der Zeit*, welche durch zweifach unendliche trigonometrische Reihen darstellbar sind. Hierbei ist noch hervorzuheben, dass eine durch ihre Differentialgleichungen 1. Ordnung definirte Bewegung der betrachteten Art, ähnlich wie eine algebraische Curve, *aus mehreren Zweigen* bestehen kann, von denen zwei benachbarte unter Vermittlung von *singulären Bewegungsformen* (§ 6) — etwa einer Curve mit Doppelpunct oder isolirtem Punct entsprechend — auch in einen einzigen Zweig verschmelzen können. Auf specielle Beispiele zur Erläuterung dieser allgemeinen Resultate ist nur in Kürze (§ 7, § 10) eingegangen worden.

Was die analytische Darstellung der Coordinaten des bewegten Punctes angeht, so ist dieselbe eine Anwendung einer allgemeinen, früher[2] von mir betrachteten Gattung von Umkehrfunctionen, auf welche ich hier nur verweise, um bei einer anderen Gelegenheit den analytischen Charakter dieser bedingt periodischen Functionen für alle reellen und auch für einen beschränkten Bereich complexer Werthe der Zeit t darzuthun. Die Hauptsätze über jene Umkehrfunctionen sind in einer für den vorliegenden Zweck erforderlichen Form ihren Anwendungen vorausgeschickt (§ 1, § 2).

---

[1] Vgl. die hiermit verwandten Gesichtspuncte der Untersuchungen von BOHLIN, *Über die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme,* Acta mathematica, Bd. 10, S. 109, 1887.

[2] Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 29, S. 468.

§ 1. *Über eine Gattung bedingt periodischer Functionen.*

Die anzuwendenden Sätze beziehen sich alle auf das Umkehrproblem:

$$(1)\quad \begin{cases} \int\limits_{a_1}^{x_1}\frac{g_{11}(x_1)dx_1}{\sqrt{F_{11}(x_1)}}+\int\limits_{a_2}^{x_2}\frac{g_{12}(x_2)dx_2}{\sqrt{F_{12}(x_2)}}=0\\ \int\limits_{a_1}^{x_1}\frac{g_{21}(x_1)dx_1}{\sqrt{F_{21}(x_1)}}+\int\limits_{a_2}^{x_2}\frac{g_{22}(x_2)dx_2}{\sqrt{F_{22}(x_2)}}=t \end{cases}$$

unter verschiedenen Voraussetzungen über die darin auftretenden Functionen.

I. Unter $F_{\alpha\beta}(x_\beta)$, $(\alpha, \beta = 1, 2)$, sind zuerst gegebene Functionen von x_β zu verstehen, welche für je zwei Werthe $x_\beta = a_\beta$ und $x_\beta = b_\beta$ verschwinden. Setzt man mit Rücksicht darauf:

$$(2)\qquad F_{\alpha\beta}(x_\beta) = (x_\beta - a_\beta)(b_\beta - x_\beta)f_{\alpha\beta}(x_\beta),$$

so sollen $f_{\alpha\beta}(x_\beta)$ in den Intervallen

$$(3)\qquad a_\beta \leqq x_\beta \leqq b_\beta$$

eindeutige und stetige Functionen von x_β (eventuell von x_β und

$$w_\beta = \sqrt{\frac{x_\beta - a_\beta}{b_\beta - x_\beta}})$$

sein, daselbst einen beständig positiven reellen Werth besitzen und weder 0 noch ∞ werden. Ferner sollen die Functionen $g_{\alpha\beta}(x_\beta)$ in den Intervallen (3) eindeutige und stetige Functionen von x_β (ev. von x_β und $w_\beta = \sqrt{\frac{x_\beta - a_\beta}{b_\beta - x_\beta}}$) sein, die daselbst ihr Vorzeichen niemals wechseln und niemals ∞ werden. Endlich soll die Determinante:

$$(4)\qquad D(x_1, x_2) = \frac{g_{11}(x_1)}{\sqrt{f_{11}(x_1)}}\,\frac{g_{22}(x_2)}{\sqrt{f_{22}(x_2)}} - \frac{g_{21}(x_1)}{\sqrt{f_{21}(x_1)}}\,\frac{g_{12}(x_2)}{\sqrt{f_{12}(x_2)}}$$

für alle den Ungleichungen (3) genügenden Werthepaare x_β beständig po-

sitiv und von o verschieden sein. Die doppeltgestrichenen Wurzelzeichen bedeuten die positiven Werthe der Quadratwurzeln.

Alsdann ist eine gegebene eindeutige Function $E(x_1, x_2)$ der oberen Integralgrenzen x_1, x_2 und der Wurzelfunctionen $\sqrt{x_\beta - a_\beta}$, $\sqrt{b_\beta - x_\beta}$, welche für alle den Ungleichungen (3) genügenden Werthepaare x_1, x_2 endlich und stetig ist, eine für alle reellen Werthe von t eindeutige, endliche und stetige, sowie bedingt periodische Function von t. Dieselbe kann durch eine für alle reellen Werthe t gleichmässig convergente Reihe, die zweifach unendliche FOURIER'sche Reihe, dargestellt werden.

Die Periodicitätseigenschaft bezieht sich auf die Constanten:

$$\omega_{\alpha\beta} = \int_{a_\beta}^{b_\beta} \frac{g_{\alpha\beta}(x_\beta)\, dx_\beta}{\sqrt{F_{\alpha\beta}(x_\beta)}} \tag{5}$$

$$\left(\text{ev. } \omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int_{a_\beta}^{b_\beta} \frac{g_{\alpha\beta}(x_\beta, \sqrt{w_\beta^2})\, dx_\beta}{\sqrt{F_{\alpha\beta}(x_\beta, \sqrt{w_\beta^2})}} + \frac{1}{2}\int_{a_\beta}^{b_\beta} \frac{g_{\alpha\beta}(x_\beta, -\sqrt{w_\beta^2})\, dx_\beta}{\sqrt{F_{\alpha\beta}(x_\beta, -\sqrt{w_\beta^2})}}\right).$$

Während nämlich die Function $E(x_1, x_2)$ im Allgemeinen nicht periodisch ist, wird sie,[1] falls mit irgend zwei positiven oder negativen, von o verschiedenen ganzen Zahlen m_1, m_2 die Bedingung

$$0 = 4m_1\omega_{11} + 4m_2\omega_{12} \tag{6}$$

erfüllt ist, eine periodische Function von t mit der Periode

$$T = 4m_1\omega_{21} + 4m_2\omega_{22}. \tag{7}$$

Enthält $E(x_1, x_2)$ die Wurzelfunctionen $\sqrt{x_\beta - a_\beta}$, $\sqrt{b_\beta - x_\beta}$ nur theilweise oder nur in gewissen Verbindungen oder gar nicht, so tritt in (6) und (7) $2m_1$ an Stelle von $4m_1$ oder $2m_2$ an Stelle von $4m_2$ oder beides zugleich.

Der Beweis dieses Satzes ist a. a. O. von mir gegeben worden; der

---

[1] Auf die *bedingte Periodicität der hyperelliptischen Functionen zweier Variabler, wenn beide Variable lineare Functionen einer dritten sind*, hat C. NEUMANN aufmerksam gemacht, *De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur*, Journal für Mathematik, Bd. 56, S. 46.

Satz kommt im Folgenden zur Anwendung ohne die in Klammern beigefügten Eventualitäten, welche nur zur Ableitung des unter II folgenden Resultates dienen sollen.

II. Über die Functionen $F_{a1}(x_1)$, $g_{a1}(x_1)$ bleiben die Voraussetzungen unter I bestehen; dagegen sollen die Functionen $F_{a2}(x_2)$ nicht, wie dort, 2 Nullpuncte haben, sondern vielmehr für keinen reellen Werth von x_2 verschwinden. Setzt man im Besonderen:

$$(8) \qquad F_{a2}(x_2) = \left(\frac{1 + x_2^2}{2}\right)^2 f_{a2}(x_2),$$

so sollen $f_{a2}(x_2)$ für alle reellen Werthe von x_2, einschliesslich $x_2 = \pm\infty$, eindeutige und stetige Functionen von x_2 sein, einen beständig positiven reellen Werth besitzen und weder 0 noch ∞ werden. Ferner sollen in gleichem Umfange die Functionen $g_{a2}(x_2)$ eindeutig und stetig sein, niemals ihr Vorzeichen wechseln und niemals ∞ werden. Die Voraussetzung über $D(x_1, x_2)$ in (4) bleibt entsprechend beibehalten. Die untere Grenze a_2 in dem Ansatz (1) soll jetzt durch 0 ersetzt werden.

Unter diesen Voraussetzungen ist ebenfalls eine gegebene eindeutige Function $E(x_1, x_2)$ der oberen Integralgrenzen x_1, x_2 in (1) und der Wurzelfunctionen $\sqrt{x_1 - a_1}$, $\sqrt{b_1 - x_1}$, welche für alle den Ungleichungen $a_1 \leqq x_1 \leqq b_1$, $-\infty \leqq x_2 \leqq +\infty$ genügende Werthepaare x_1, x_2 endlich und stetig ist, eine für alle reellen Werthe von t eindeutige, endliche und stetige, sowie bedingt periodische Function von t, die wie oben dargestellt werden kann.

Auch die Periodicitätseigenschaften drücken sich wieder durch die Formeln (6) und (7) aus, nur hat ω_{a2} jetzt den Werth:

$$(9) \qquad \omega_{a2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{a2}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{a2}(x_2)}}.$$

Der Beweis dieses Satzes II, der a. a. O. noch nicht angegeben wurde, kann dadurch geführt werden, dass man die Voraussetzungen des Satzes auf die dem Satze I zu Grunde liegenden reducirt. Dies geschieht durch die Substitution:

$$x_2^2 = \frac{y_2 - a_2}{b_2 - y_2}, \qquad y_2 = \frac{a_2 + b_2 x_2^2}{1 + x_2^2}, \qquad a_2 < b_2.$$

Es wird dann:

$$\int_0^{x_2} \frac{g_{a2}(x_2)dx_2}{\sqrt{F_{a2}(x_2)}} = \int_0^{x_2} \frac{2g_{a2}(x_2)dx_2}{(1+x_2^2)\sqrt{f_{a2}(x_2)}} = \int_{a_2}^{y_2} \frac{g_{a2}(x_2)dy_2}{\sqrt{(y_2-a_2)(b_2-y_2)}\sqrt{f_{a2}(x_2)}},$$

wo das Vorzeichen der Wurzel aus $f_{a2}(x_2)$ ohne Beschränkung positiv genommen werden kann. Da nun, während x_2 alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, y_2 immer zwischen a_2 und b_2 oscillirt, und da somit nach den Voraussetzungen unter II die Functionen $g_{a2}(x_2)$ und $f_{a2}(x_2)$ mit $x_2 = \sqrt{\frac{y_2-a_2}{b_2-y_2}}$ für alle der Ungleichung $a_2 \leqq y_2 \leqq b_2$ entsprechenden Werthe von y_2 eindeutige, endliche und stetige Functionen von $\sqrt{\frac{y_2-a_2}{b_2-y_2}}$ sind, die letztere überdies positiv und von 0 verschieden, die erstere von einerlei Vorzeichen bleiben, so liegt nach der geschehenen Substitution wieder der Fall I mit y_2 für x_2 vor, und zwar treten hierbei die dort in Klammern beigefügten Eventualitäten ein.

III. Die beiden Sätze I und II gelten auch dann noch, wenn identisch $g_{21}(x_1) = 0$ ist, unter den entsprechend specialisirten Bedingungen ihrer allgemeinen Formen. Jedoch ist dann die Function $E(x_2)$, wenn sie von x_2 allein abhängt, eine unbedingt periodische Function von t mit der Periode

$$T = 2\omega_{22}, \tag{10}$$

die durch eine einfach unendliche trigonometrische Reihe von gleichmässiger Convergenz dargestellt wird.[1]

§ 2. *Über Grenzfälle bedingt periodischer Functionen.*

IV. Ist unter sonst gleichen Voraussetzungen, wie unter I, $a_2 = b_2$, so ergiebt eine einfache Grenzbetrachtung mit Benutzung der eben ci-

[1] Nach Weierstrass, *Über eine Gattung reell periodischer Functionen,* Monatsberichte der Berliner Akademie, 1866.

tirten Untersuchung von WEIERSTRASS, dass $x_2 = a_2$, und $E(x_1, a_2)$ eine unbedingt periodische Function von t wird, mit der Periode:

$$(11) \qquad 2\omega = 2\,\frac{A_1\omega_{21} - A_2\omega_{11}}{A_1};$$

bezüglich 4ω, wenn in $E(x_1, a_2)$ auch die Wurzelfunctionen $\sqrt{x_1 - a_1}$, $\sqrt{b_1 - x_1}$ vorkommen; hierin ist:

$$(12) \qquad A_1 = \frac{g_{12}(a_2)}{\sqrt{f_{12}(a_2)}}, \qquad A_2 = \frac{g_{22}(a_2)}{\sqrt{f_{22}(a_2)}}.$$

V. Wenn die Function $F_{a2}(x_2)$ nicht nur ein, sondern zwei Paare aufeinander folgender Nullpuncte $x_2 = a_2, b_2$ und $x_2 = a_2', b_2'$ besitzt ($a_2 < b_2 < a_2' < b_2'$), so können die Bedingungen des Satzes I für die beiden Intervalle $a_2 \leqq x_2 \leqq b_2$ und $a_2' \leqq x_2 \leqq b_2'$ unabhängig von einander erfüllt sein. Wenn man daher die untere Grenze a_2 in den Integralen (1) einmal belässt und einmal durch a_2' ersetzt, erhält man entsprechend 2 verschiedene Gruppen bedingt periodischer Functionen $E(x_1, x_2)$.

VI. Wird nun aber unter den Voraussetzungen des Satzes V: $b_2 = a_2'$, so nehmen die Umkehrfunctionen einen wesentlich neuen Charakter an, da die Integrale mit der Variablen x_2 in (1) für $x_2 = b_2$ logarithmisch ∞ werden. Dann bleiben zwar die Functionen $E(x_1, x_2)$ für alle reellen Werthe von t eindeutige, endliche und stetige Functionen von t, verlieren aber ihre früheren Periodicitätseigenschaften. Im Besonderen kann die Function x_2 den Werth b_2 für keinen endlichen Werth von t erreichen. Unter der ferneren Voraussetzung $g_{21}(x_1) = 0$ (wie unter III) nähert sich x_2 dem Werthe b_2 mit unbegrenzt wachsendem t asymptotisch.

§ 3. *Gleichungen der Bewegung auf einer Rotationsfläche mit einfachen Horizontalschnitten.*

Die Gleichung einer Rotationsfläche, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit vertical abwärts laufender z-Axe sei:

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = f^2(z).$$

Die Function $f(z)$ soll innerhalb eines gewissen Intervalles

$$(2) \qquad A < z < B$$

mit näher zu bestimmenden Grenzen A, B eine eindeutige und stetige Function der reellen Variabeln z, sowie von positivem reellen, von 0 und ∞ verschiedenen Werthe sein; sie soll ferner innerhalb desselben Umfanges einen bestimmten, nicht ∞ werdenden 1. Differentialquotienten $f'(z)$ besitzen.

Indem mit φ der Winkel zwischen der Meridianebene eines Punctes der Rotationsfläche und der zx-Ebene des Coordinatensystems bezeichnet wird, können die Coordinaten x, y, z des Punctes durch die Formeln:

$$(3) \qquad x = f(z).\cos\varphi, \qquad y = f(z).\sin\varphi, \qquad z = z$$

als Functionen von z und φ dargestellt werden. Da der Winkel φ in seiner Veränderlichkeit unbeschränkt bleibt, brauchen nur positive Werthe von $f(z)$ in Betracht gezogen zu werden. Durch die Formeln (3) wird die Lage des Punctes x, y, z der Fläche innerhalb des Raumes zwischen den beiden Horizontalebenen $z = A$ und $z = B$ eindeutig bestimmt. In demselben Raume wird die Rotationsfläche von jeder Horizontalebene in einem und nur einem Parallelkreise geschnitten (*einfache Horizontalschnitte*) und hat sie auch mit der z-Axe keinen Punct gemein; in den Grenzen $z = A$ und $z = B$ können die über $f(z)$ und $f'(z)$ gemachten Voraussetzungen durchbrochen werden; es kann hier auch $f(z) = 0$ sowie $f'(z) = \infty$ sein, also die Fläche sich um die z-Axe in einer Spitze oder mit horizontaler Tangentialebene zusammenschliessen.

An Stelle von φ wird fernerhin noch die Variable

$$(4) \qquad v = \sin^2\varphi$$

eingeführt.

Die Differentialgleichungen 1. Ordnung der Bewegung eines schweren Punctes m von der Masse 1 auf der Rotationsfläche lauten bekanntlich:

$$(5) \qquad d\varphi = \frac{k\sqrt{1 + f'^2(z)}.dz}{f(z)\sqrt{2(gz + h)f^2(z) - k^2}}, \qquad dt = \frac{f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)}.dz}{\sqrt{2(gz + h)f^2(z) - k^2}}.$$

Dabei ist g die Beschleunigung der Schwere, h die Constante der le-

bendigen Kraft und k die doppelte Flächengeschwindigkeit der auf die Horizontalebene projicirten Bewegung; k wird von o verschieden vorausgesetzt und kann ohne Beschränkung als positiv angenommen werden.

Die Abhängigkeit der Coordinaten x, y, z des Punctes m von der Zeit t findet hiernach ihren Ausdruck in den 5 Gleichungen:

$$(6) \qquad x = f(z)\cdot\sqrt{1-v}, \qquad y = f(z)\cdot\sqrt{v}, \qquad z = z,$$

$$(7) \qquad \begin{cases} -\displaystyle\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{z_0}^z \frac{k\sqrt{1+f'^2(z)}\,.\,dz}{f(z)\sqrt{2(gz+h)f^2(z)-k^2}} = 0, \\[2ex] \displaystyle\int_{z_0}^z \frac{f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}\,.\,dz}{\sqrt{2(gz+h)f^2(z)-k^2}} = t, \end{cases}$$

welche nur eine andere Form der Gleichungen (3) und (5) sind und die Form des allgemeinen Umkehrproblems der obigen Einleitung haben. Bei der über $f'(z)$ gemachten Voraussetzung ist es, so lange z in dem Intervalle (2) bleibt, keine Beschränkung, wenn die Quadratwurzel aus $1 + f'^2(z)$ positiv angenommen wird, was durch die doppelten Striche bezeichnet ist. Die Werthe $z = z_0$ und $v = 0$, $\sqrt{1-v} = 1$ sollen die dem Zeitpunct $t = 0$ entsprechenden Anfangswerthe sein (vgl. § 5).

§ 4. *Normalform der stabilen Bewegung auf einer Rotationsfläche mit einfachen Horizontalschnitten.*

Innerhalb des in (2) bezeichneten Intervalles sind die Functionen

$$g_{12} = \frac{k\sqrt{1+f'^2(z)}}{f(z)}, \qquad g_{22} = f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}$$

eindeutig und stetig, positiv und von o und ∞ verschieden. Setzt man daher voraus — eine Voraussetzung, die in § 5 näher zu erörtern ist —, dass die Function:

$$(8) \qquad R(z) = 2(gz+h)f^2(z) - k^2$$

die Form habe:

$$(9) \qquad R(z) = (z - z_0)(z_1 - z)r(z),$$

wo mit Ausschluss der Gleichheit:

$$(10) \qquad A < z_0 < z_1 < B,$$

und wo $r(z)$ für das Intervall:

$$(11) \qquad z_0 \leqq z \leqq z_1$$

positiv und von 0 verschieden ist, so erfüllen die Gleichungen (6) und (7) alle Bedingungen des Satzes § 2, I in der besonderen Form § 2, III. Man hat in die allgemeinen Sätze des § 2 neben den bereits angegebenen Functionen g_{12} und g_{22} die Functionen:

$$g_{11} = -\frac{1}{2}, \quad g_{21} = 0, \quad F_{11} = F_{21} = v(1 - v), \quad F_{12} = F_{22} = R(z)$$

$$E(x_1, x_2) = f(z) . \sqrt{1 - v}; \quad f(z) . \sqrt{v}; \quad z$$

und die Constanten:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = z_0, \quad b_2 = z_1$$

einzuführen. Die Periodicitätsconstanten erhalten die Werthe:

$$(12) \quad \begin{cases} \omega_{11} = -\displaystyle\int_0^1 \frac{dv}{2\sqrt{v(1 - v)}} = \frac{\pi}{2}, & \omega_{12} = \displaystyle\int_{z_0}^{z_1} \frac{k\sqrt{1 + f'^2(z)} . dz}{f(z)\sqrt{R(z)}}, \\ \omega_{21} = 0, & \omega_{22} = \displaystyle\int_{z_0}^{z_1} \frac{f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)}dz}{\sqrt{R(z)}}. \end{cases}$$

Während daher z eine eindeutige, unbedingt periodische Function von t ist mit der Periode:

$$T = 2\omega_{22},$$

sind x, y eindeutige, bedingt periodische Functionen von t, welche unter der Bedingung:[1]

$$4m_1\frac{\pi}{2} + 2m_2\omega_{12} = 0$$

die Periode

$$T = 2m_2\omega_{22}$$

erhalten. Die Function z ist durch eine einfach, die Functionen x, y durch zweifach unendliche trigonometrische Reihen darzustellen, die für alle reellen Werthe von t gleichmässig convergiren.

Die Bewegung des Punctes m ist auf die zwischen den beiden Parallelkreisen $z = z_0$ und $z = z_1$ gelegene Zone beschränkt und schreitet in der Längsdimension derselben immer in gleichem Sinne fort, indem die Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}k$ der auf die Horizontalebene projicirten Bewegung constant bleibt. Dabei berührt die Bahncurve des Punctes m periodisch abwechselnd den obern und untern die Zone begrenzenden Parallelkreis, weshalb diese letzteren *Wendekreise* der betrachteten Bewegung genannt werden mögen.

Die Wendekreise $z = z_0$ und $z = z_1$ sind durch die beiden in (9) vorausgesetzten Nullpuncte der Function $R(z)$ bestimmt, über deren Existenzfrage der § 5 weiteren Aufschluss geben soll.

§ 5. *Die Rotationsfläche der Wendekreise der Bewegung.*

Denkt man sich die Constanten h und $\frac{1}{2}k$ der lebendigen Kraft und der Flächengeschwindigkeit in der Horizontalebene gegeben, so bleibt, für die durch die Differentialgleichungen (5) definirte Bewegung, noch der Anfangsort $z = z_0$, $\varphi = \varphi_0$ des bewegten Punctes m willkürlich. Bei der Symmetrie der Rotationsfläche kann, wie in (7) geschehen, ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\varphi_0 = 0$ gesetzt werden, während für z_0

[1] Vgl. die Untersuchungen von DARBOUX über die Bedingung geschlossener Bahnen eines Punctes auf einer Rotationsfläche in der Abhandlung: *Etude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution,* Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 5, S. 100, 1877.

entweder, wie in (7) mit Rücksicht auf (9), ein Nullpunct von $R(z)$ oder auch ein anderer Werth gesetzt werden darf, der einem von der Bewegung überhaupt getroffenen Parallelkreis entspricht.

Da nämlich nach (5) von den Coordinaten des Anfangsortes z_0, φ_0 und den Constanten h, k die Coordinaten $z' = z'_0$, $\varphi' = \varphi'_0$ der Anfangsgeschwindigkeit mittels der Gleichungen:

$$(13) \qquad z_0'^2 = \frac{R(z_0)}{[1 + f'^2(z_0)]f^2(z_0)}, \qquad \varphi'_0 = \frac{k}{f^2(z_0)}$$

abhängen, so muss $z = z_0$ der Bedingung:

$$(14) \qquad R(z) \geqq 0$$

genügen. Diese Bedingung bestimmt innerhalb der Grenzen $A < z < B$ die bei gegebenem h und k für den Punct m erreichbaren Parallelkreise der Rotationsfläche, während alle der Bedingung nicht entsprechende Stellen unerreichbar bleiben.

In einer Halbmeridianebene nehme man ein Coordinatensystem mit den Axen r, z an, wo z die bereits eingeführte, der Richtung der Schwere folgende z-Axe und r die Durchschnittslinie der Halbmeridianebene mit der horizontalen xy-Ebene des bisherigen Coordinatensystems sei. Die Gleichung der Durchschnittslinie der Rotationsfläche mit der Halbmeridianebene ist:

$$(15) \qquad r = f(z),$$

wo r nur positive Werthe annimmt. Man kann nun die Gleichung:

$$(16) \qquad R(z) = 0,$$

auf deren Wurzeln es ankommt, als Resultat der Elimination von r aus der Gleichung (15) und der Gleichung

$$(17) \qquad r = \frac{k}{\sqrt{2(gz + h)}}$$

ansehen, wo nach Voraussetzung $k > 0$ ist. Demnach sind die Nullpuncte der Function $R(z)$ die z-Coordinaten der Durchschnittspuncte der beiden Curven (15) und (17). Dies von der Halbmeridianebene mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ auf den Raum übertragen, giebt den Satz:

Die Wendekreise der Bewegung des Punctes m auf der Rotationsfläche § 3, 1 sind die Schnittkreise der letzteren mit der Rotationsfläche 3. Ordnung:

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{2(gz + h)}. \tag{18}$$

Zur Discussion dieser Rotationsfläche (h, k), welche durch die Parameter h, k charakterisirt ist, bedarf es nur der Betrachtung der Halbmeridiancurve (17), die einen Zweig einer Curve 3. Ordnung darstellt. Der andere, den negativen Werthen der Quadratwurzel entsprechend, ist für den vorliegenden Zweck ersichtlich ohne Belang. Die Curve (17) befindet sich in der Halbebene r, z ganz unterhalb der horizontalen Geraden $z = -\frac{h}{g}$, welche eine Asymptote der Curve ist. Eine zweite Asymptote der Curve ist die verticale z-Axe. Die Curve besteht aus einem einzigen, horizontal vom Unendlichen her und vertical in's Unendliche hinablaufenden Zuge, der jede unterhalb des Niveau's $z = -\frac{h}{g}$ die Halbebene r, z durchziehende horizontale oder verticale Gerade einmal und nur einmal trifft. Da ferner in dem betrachteten Umfange $\frac{dr}{dz} < 0$ und $\frac{d^2r}{dz^2} > 0$, so nimmt bei wachsendem z die horizontale Coordinate der Curve von ∞ bis 0 beständig ab, und bewegt sich der Winkel α der abwärts laufenden Curventangente gegen die horizontale r-Axe (vgl. Fig. 1) beständig abnehmend von π bis $\frac{\pi}{2}$. Es ist überdies für alle unterhalb der Curve (auf der concaven Seite derselben) gelegenen Puncte r, z der Halbmeridianebene:

$$r > \frac{k}{\sqrt{2(gz + h)}},$$

für alle oberhalb der Curve und unterhalb der Geraden $z = -\frac{h}{g}$ gelegenen umgekehrt.

Die Systeme von Curven, welche bei veränderlichem k und constantem h oder bei veränderlichem h und constantem k entstehen, sind leicht zu übersehen. Denn der Veränderung von h bei festem k entspricht eine blose Verschiebung der Curve in der Richtung der z-Axe. Will man

dagegen aus der Curve (h, k) die Curve (h, k') erhalten, so braucht man nur die horizontalen Coordinaten r der ersteren mit $k':k$ zu multipliciren (Systeme der letzteren Art vgl. Fig. 2 und Fig. 3).

Lässt man jetzt die Curve (h, k) um die z-Axe rotiren, so beschreibt sie die Rotationsfläche (h, k), welche sich trichterförmig nach oben gegen die Ebene $z = -\frac{h}{g}$ öffnet und nach unten immer enger um die z-Axe zusammenschliesst. Für alle Puncte unterhalb dieser Fläche ist

$$2(gz + h)(x^2 + y^2) - k^2 > 0$$

und für alle Puncte oberhalb derselben diesseits und jenseits der Ebene $z = -\frac{h}{g}$ umgekehrt. Daraus folgt aber weiter:

Für einen Parallelkreis der gegebenen Rotationsfläche

$$x^2 + y^2 = f^2(z)$$

ist

$$R(z) > 0, = 0 \quad \text{oder} \quad < 0,$$

jenachdem derselbe unterhalb, auf oder oberhalb der Rotationsfläche (h, k) liegt.

Die Rotationsfläche (h, k), welche, unabhängig von der gegebenen Rotationsfläche, nur von den Constanten der Schwerkraft (g), der lebendigen Kraft (h) und der horizontalen Flächengeschwindigkeit $\left(\frac{1}{2}k\right)$ abhängt, trennt also einerseits die für die Bewegung erreichbaren und unerreichbaren Puncte der gegebenen Rotationsfläche und bestimmt andererseits in ihren innerhalb des Raumes $A < z < B$ gelegenen Schnittcurven mit dieser die möglichen Wendekreise der Bewegung.

Mit $g = 0$ geht sie in einen verticalen Kreiscylinder, verbunden mit der Ebene $z = \infty$ über; mit $k = 0$ in die z-Axe und die Ebene $z = -\frac{h}{g}$.

§ 6. *Formen der Bewegung auf einer Rotationsfläche mit einfachen Horizontalschnitten.*

Verbindet man dieses Resultat mit der in § 4 über $R(z)$ gemachten Voraussetzung (9), so übersieht man, wenn dieselbe mit ihren Folgen

besteht und wenn nicht. Soll nämlich eine den Differentialgleichungen (5) entsprechende Bewegung innerhalb des Intervalles (2) überhaupt möglich sein, so darf die gegebene Rotationsfläche in dem letzteren nicht ganz oberhalb der Rotationsfläche (h, k) liegen, ohne dieselbe zu treffen. Dagegen:

I. *Ragt die gegebene Rotationsfläche innerhalb des Intervalles* $A < z < B$ *mit einer Zone in den Raum unterhalb der Rotationsfläche* (h, k) *hinein, und ist diese Zone von 2 Parallelkreisen,* $z = z_0$ *nach oben und* $z = z_1$ *nach unten, begrenzt, in denen sich beide Rotationsflächen schneiden, ohne sich zu berühren, so findet in dieser Zone eine den Differentialgleichungen* (5) *entsprechende, bedingt periodische Bewegung des Punctes m mit den Wendekreisen* $z = z_0$ *und* $z = z_1$ *statt.*

Es liegt die in § 4 behandelte Normalform der Bewegung vor; denn den einfachen Schnittkreisen der beiden Flächen entsprechen einfache Nullpuncte $z = z_0, z_1$ der Function $R(z)$, zwischen denen nach § 5 die Function $R(z)$ positiv und von 0 verschieden ist, während $r(z)$ (vgl. § 4, 9) zwischen und in den Grenzen $z = z_0, z_1$ diese Eigenschaften besitzt.

II. *Reicht die gegebene Rotationsfläche innerhalb der Grenzen* $A < z < B$ *mit mehreren solchen Zonen unter die Rotationsfläche* (h, k) *herab, so besteht die den Differentialgleichungen* (5) *entsprechende Bewegung aus mehreren bedingt periodischen Zweigen.*

Jeder dieser Zweige ist von der erwähnten Normalform des § 4, wie aus § 2, V unmittelbar hervorgeht.

III. *Fallen die beiden Wendekreise eines solchen bedingt periodischen Zweiges der Bewegung zusammen, so geht die entsprechende bedingt periodische Bewegung in eine unbedingt periodische Bewegung über.*

Dieselbe erfolgt dem Satze § 2, IV entsprechend, auf einem Parallelkreise $z = z_0$ der Rotationsfläche mit constanter Geschwindigkeit. Diese periodische Bewegung ist *stabil*, da ihre Bahn beiderseits von unerreichbaren Theilen der Rotationsfläche begrenzt ist. Für die Periode der Bewegung ergiebt die allgemeine Formel § 2, 11:

$$T = \frac{2\pi}{k} f^2(z_0). \tag{19}$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch anders darstellen. Denn die Annahme $z = z_0$, $z' = 0$ reducirt die Gleichungen § 5, 13 auf:

$$(20) \qquad R(z_0) = 0, \qquad k = f^2(z_0) \cdot \varphi_0'.$$

Da aber bei dem Zusammenfall der beiden Wendekreise z_0 und z_1 nach § 4, 9 auch

$$(20) \qquad R'(z_0) = 0,$$

so können mittels dieser 3 Gleichungen (20) h, k und φ_0' durch z_0 ausgedrückt werden. Man erhält dabei für k den Werth:

$$k = f(z_0)\sqrt{-g\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}}.$$

Es wird daher nach (19) *die Umlaufszeit der längs des Parallelkreises $z = z_0$ stattfindenden periodischen Bewegung:*

$$(21) \qquad T = 2\pi\sqrt{-\frac{f(z_0)f'(z_0)}{g}}.$$

Mit $f(z) = \sqrt{a^2 - z^2}$ und $f(z) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - z^2}$ liefert diese Formel die bekannten Perioden der Bewegung längs eines Parallelkreises $z = z_0$ der Kugel und des Rotationsellipsoides:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}},\text{[1]} \qquad T = 2\pi\frac{b}{a}\sqrt{\frac{z_0}{g}}.\text{[2]}$$

IV. *Fallen zwei nächstfolgende Wendekreise zweier verschiedener bedingt periodischer Zweige der Bewegung zusammen, so entsteht durch das Zusammenfliessen der letzteren eine asymptotische Bewegung.*

Die Bahncurve des Punctes m flacht sich nach § 2, VI bei Annäherung an den kritischen Parallelkreis, der aus dem Zusammenfall der beiden Wendekreise hervorgeht, derart ab, dass sie, während sie der

[1] Vgl. SCHELL, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, Bd. 1, S. 425. (2. Aufl.)

[2] Vgl. FOUCAULT, *Remarques concernant le mouvement d'un point oscillant circulairement sur une surface de révolution du second ordre*, Comptes rendus, Bd. 61, S. 515, Paris 1865; und *Sur une modification du modérateur de* WATT, ebd. S. 278.

Richtung des letzteren folgend, in immer neuen Windungen die Rotationsfläche umkreist, sich dem kritischen Parallelkreis asymptotisch nähert. Auf diese Weise wird die im kritischen Parallelkreis mögliche Verzweigung der Bahncurve umgangen.[1] Bringt man aber den Punct m zu Anfang der Bewegung in diesen Parallelkreis hinein, so wird er ihn umgekehrt nach keiner endlichen Zeit verlassen können, sondern ihn mit constanter Geschwindigkeit umkreisen. Die so entstehende unbedingt periodische Bewegung unterscheidet sich aber von der vorhin als stabil bezeichneten dadurch, dass sie nur im *labilen* Gleichgewicht steht. Ihre Periode ist dieselbe, wie die vorhin unter (21) angegebene. Die Grenzfälle III und IV der bedingt periodischen Bewegung setzen eine *Berührung zwischen der gegebenen Rotationsfläche und der Rotationsfläche* (h, k) *längs eines Parallelkreises* voraus. Solche Berührungen können, da die Fläche (h, k) sich nach unten zu beständig gegen die z-Axe *verengt,* nur auf solchen Zonen der gegebenen Fläche auftreten, wo das gleiche stattfindet; dem entsprechend giebt die Formel (21), da $f(z)$ allgemein positiv vorausgesetzt wurde, nur *für negatives* $f'(z_0)$ einen reellen Werth. Ist längs einer solchen Zone mit negativem $f'(z)$ die gegebene Rotationsfläche positiv gekrümmt, so kann sie die Rotationsfläche (h, k) niemals von unten berühren, also nur der Grenzfall der stabil periodischen Bewegung eintreten. Ist sie dagegen negativ gekrümmt, wie die Rotationsfläche (h, k) selbst, so sind beide Grenzfälle, die stabil und die labil periodische Bewegung möglich (vgl. § 10).

V. Analoge Grenzfälle bedingt periodischer Bewegungen, wie die eben unter III und IV beschriebenen, finden sich bei der Coincidenz von mehr als zwei Schnittkreisen der gegebenen Rotationsfläche mit der Rotationsfläche (h, k) ein, deren Discussion kein weiteres Interesse beanspruchen dürfte. Jedoch soll noch des *vollständigen Zusammenfalles der beiden Rotationsflächen,* also der Voraussetzung

$$f(z) = \frac{k}{\sqrt{2(gz + h)}} \tag{22}$$

gedacht werden. Wenn der Punct m an einer beliebigen Stelle dieser

[1] Denn nach Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik,* 1. Vorl., § 2, sind die Coordinaten x, y, z des bewegten Punctes für die Dauer der Bewegung einwerthige Functionen der Zeit.

Rotationsfläche in horizontaler Richtung mit der Flächengeschwindigkeit k seine Bewegung beginnt, so verbleibt er immer in dem anfänglichen Parallelkreis. Es liegt eine periodische Bewegung vor, deren Gleichgewichtszustand ein indifferenter ist.

Diese Eigenschaft führt auf folgende *mechanische Definition* des einem gegebenen h und einem veränderlichen k entsprechenden Systems von Rotationsflächen (h, k), wie es bereits im § 5 erwähnt wurde:

Wenn von einer beliebigen Stelle irgend eines Parallelkreises $z = z_0$ einer Rotationsfläche des Systems ein schwerer Punct in der Richtung der Tangente des Parallelkreises mit derjenigen Geschwindigkeit ausgeht, die er durch den freien Fall vom Niveau $z = -\frac{h}{g}$ bis zum Niveau des Parallelkreises $z = z_0$ erhalten haben würde, so bewegt er sich beständig in diesem Parallelkreis.

Denn die Differentialgleichung der in die yz-Ebene fallenden Meridiancurve einer Rotationsfläche, auf welcher ein schwerer Punct immer einen Parallelkreis beschreibt, wenn er in einem beliebigen Niveau z von einer beliebigen Stelle der Fläche mit der als Function von z gegebenen und in die Richtung des Parallelkreises z fallenden Geschwindigkeit $\nu = \nu(z)$ ausgeht, ist:[1]

$$gy + \nu^2(z) \cdot \frac{dy}{dz} = 0.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung mit $\nu^2(z) = 2(gz + h)$, giebt aber, unter k die Integrationsconstante verstanden, das in Rede stehende System:

$$y = \frac{k}{\sqrt{2(gz + h)}}.$$

VI. Neben den unter I—V betrachteten und in verschiedenem Sinne stabilen Bewegungszweigen können auch *instabile Zweige* vorhanden sein, wenn nämlich eine Zone der gegebenen Rotationsfläche, die unter die

[1] Vgl. JULLIEN, *Problèmes de mécanique rationnelle,* Bd. 1, S. 401, Paris 1855; über die Tendenz dieser Frage auch DE ST.-GERMAIN, *Des surfaces sur lesquelles un point peut se mouvoir suivant une certaine loi,* LIOUVILLE's Journal de mathématiques, 3. Serie, Bd. 2, S. 325, 1876.

Fläche (h, k) herabreicht, innerhalb des Intervalles $A < z < B$ nur einseitig begrenzt ist. Auf diese Zweige soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

Mit $g = 0$ ergeben sich aus den Sätzen I—VI *die verschiedenen Formen der geodätischen Bewegung* eines Punctes auf einer Rotationsfläche, mit Ausschluss der Bewegung in einem Meridiane.

Wie die Bestimmung des Intervalles $A < z < B$ für eine gegebene Rotationsfläche gedacht ist, wird aus den folgenden Beispielen leicht ersichtlich sein.

§ 7. *Beispiele von Bewegungen auf Rotationsflächen mit einfachen Horizontalschnitten.*

Um die bekannten Beispiele von Bewegungen eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche unter die allgemeine Theorie unterzuordnen, mag zuerst die *Kugelfläche* erwähnt werden. Es ist hier:

$$f(z) = \sqrt{a^2 - z^2},$$

wo unter a der Radius der Kugel verstanden wird. Die Grenzen A und B des § 3, 2 können $A = -a$ und $B = +a$ genommen werden, worauf $f(z)$ allen Bedingungen des § 3 entspricht. Die Rotationsfläche (h, k) schneidet, wenn überhaupt eine Bewegung stattfindet, die Kugel in 2 Parallelkreisen $z = z_0, z_1$ (vgl. Fig. 1), die auch zu einer Berührungscurve beider Flächen zusammenrücken können, jedoch nach § 6 nur auf der unteren Halbkugel. Während daher im Allgemeinen die Bewegung aus einem einzigen bedingt periodischen Zweige besteht, wird sie im Grenzfalle stabil periodisch.

Im Wesentlichen dieselben Verhältnisse wiederholen sich bei allen *geschlossenen Rotationsflächen mit einfachen Horizontalschnitten,* wenn sie zwischen ihren beiden Schnittpuncten mit der Rotationsaxe überall den Bedingungen des § 3 entsprechen und, in der verticalen Halbebene yz, der Winkel der absteigenden Tangente der Halbmeridiancurve der Rotationsfläche gegen die Richtung der Halbaxe y, beständig wachsend von 0 bis π sich bewegt. Da nämlich der Winkel der absteigenden Tangente der Halbmeridiancurve der Rotationsfläche (h, k) gegen die Richtung der

Halbaxe y beständig abnehmend von π bis $\frac{\pi}{2}$ sich bewegt (nach § 5), so können die beiden Meridiancurven sich nicht mehr als zweimal schneiden; sie müssen sich aber, wenn überhaupt, auch wenigstens in 2 getrennten oder zusammenfallenden Puncten treffen.

Bei dem *Rotationskegel* mit verticaler Axe ist für den oberen Halbkegel, dessen aufsteigende Seitenlinie mit der z-Axe den stumpfen Winkel γ bildet:

$$f(z) = \operatorname{tg}\gamma . z .$$

Man kann $A = -\frac{h}{g}$, $B = 0$ nehmen, indem man h als positiv voraussetzt. Kleinere Werthe von z sind unerreichbar, sodass die Annahme $A = -\frac{h}{g}$ keine Beschränkung enthält. Der obere Halbkegel wird von der Rotationsfläche (h, k), wenn überhaupt, in 2 Parallelkreisen $z = z_0', z_1'$ (vgl. Fig. 1) geschnitten, die eventuell auch zusammenfallen. Auf den unteren Halbkegel übergehend, hätte man

$$f(z) = -\operatorname{tg}\gamma . z$$

und $A = 0$, $B = \infty$ zu nehmen. Es findet sich dann nur ein Schnittkreis $z = z_2'$ zwischen Halbkegel und Rotationsfläche (h, k) und liegt daher ein instabiler Zweig der Bewegung vor (vgl. § 6, VI).

Im Wesentlichen ebenso, wie der nach oben offene Halbkegel, verhalten sich alle *unten geschlossenen und oben offenen Rotationsflächen mit einfachen Horizontalschnitten,* wenn sie zwischen dem Niveau $z = -\frac{h}{g}$ und ihrem tiefer liegenden Schnittpunct mit der Rotationsaxe überall den Bedingungen des § 3 genügen und der Winkel der absteigenden Tangente der Halbmeridiancurve gegen die Richtung der Halbaxe y beständig wachsend von einem zwischen 0 und π gelegenen Anfangswerthe bis π sich bewegt. Sie werden, wenn überhaupt, von der Rotationsfläche (h, k) unterhalb des Niveau's $z = -\frac{h}{g}$ in zwei getrennten oder zusammenfallenden Puncten geschnitten.

Ein Beispiel für den Fall, wo *zwei bedingt periodische Zweige* der Bewegung möglich sind, bietet die durch Rotation der Fusspunctcurve einer Ellipse

$$(y^2 + z^2)^2 - (a^2y^2 + b^2z^2) = 0$$

entstehende Fläche unter der Voraussetzung:

$$2a^2 < b^2.$$

Die Gleichung der Halbmeridiancurve ist:

$$y = f(z) = \sqrt{(a^2 - 2z^2) + \sqrt{a^4 + 4(b^2 - a^2)z^2}}.$$

Die Function erfüllt innerhalb der Grenzen $A = -b$ und $A = +b$ alle Bedingungen des § 3. Bei geeigneter Wahl der Constanten h werden dann mit stetiger Abnahme der Constanten k der Reihe nach folgende Formen der Bewegung auftreten.

Solange die Fläche (h, k) die gegebene Fläche in 2 Parallelkreisen $z = z_0$ und $z = z_3$ schneidet, die respective in der Nähe von $z = -b$ und $z = +b$ liegen (vgl. Fig. 2, 1) besteht die Bewegung aus einem einzigen bedingt periodischen Zweige (Normalform des § 4). Sobald zu den beiden Schnittkreisen $z = z_0$ und $z = z_3$ noch eine Berührung beider Flächen in einem zwischen jenen liegenden Parallelkreis $z = z_1 = z_2$ tritt, liegt die in § 6, IV betrachtete asymptotische Bewegung vor, die auch als labil periodische Bewegung längs des letztgenannten Parallelkreises betrachtet werden kann. Indem weiterhin die beiden Flächen in 4 Parallelkreisen $z = z_0$, $z = z_1$, $z = z_2$, $z = z_3$ sich schneiden (vgl. Fig. 2, 2) zerfällt die Bewegung in 2 bedingt periodische Zweige auf den Zonen $z_0 < z < z_1$ und $z_2 < z < z_3$. Beim Zusammenfall von z_0 und z_1 wird sodann der obere Zweig stabil periodisch. Weiterhin verschwindet er ganz, und es bleibt (vgl. Fig. 2, 3) nur mehr ein bedingt periodischer Zweig mit den Wendekreisen $z = z_2$ und $z = z_3$ übrig, der seinerseits in eine stabil periodische Bewegung übergeht, wenn die beiden Wendekreise zusammenrücken.

§ 8. *Gleichungen der Bewegung auf einer Rotationsfläche mit zweifachen Horizontalschnitten.*

Die Gleichung einer Rotationsfläche sei mit Bezug auf dasselbe Coordinatensystem, wie in § 3, wiederum:

$$x^2 + y^2 = f^2(z), \tag{1}$$

jedoch soll die Function $f(z)$ die Form haben:

$$(23) \qquad f(z) = p(z) + \sqrt{q(z)},$$

und soll für jeden Werth von z in dem Intervalle

$$(24) \qquad a \leqq z \leqq b$$

2 im Allgemeinen verschiedene positive reelle Werthe haben, die nur an den beiden Grenzen $z = a$ und $z = b$ des Intervalles zusammenfallen. Diese Eigenschaft von $f(z)$ soll dadurch bedingt sein, dass die Function $q(z)$ die Form hat:

$$(25) \qquad q(z) = (z - a)(b - z)r(z),$$

und dass die Functionen $p(z)$ und $r(z)$ für alle der Ungleichung (24) entsprechenden Werthe von z eindeutige und stetige Functionen der reellen Variabeln z sind und einen positiven reellen, von 0 und ∞ verschiedenen Werth besitzen. Auch sollen diese Functionen in demselben Umfange einen bestimmten, nicht ∞ werdenden 1. Differentialquotienten $p'(z)$ und $q'(z)$ besitzen. Endlich soll in dem betrachteten Intervalle:

$$(26) \qquad p(z) > \sqrt{q(z)}$$

sein. Die Rotationsfläche ist dann eine *geschlossene Ringfläche*, welche von jeder Horizontalebene zwischen $z = a$ und $z = b$ in 2 getrennten Parallelkreisen geschnitten und von den Ebenen $z = a$ und $z = b$ selbst längs eines solchen berührt wird.

Die Differentialgleichungen (5) für die Bewegung eines schweren Punctes m auf der Fläche haben jetzt in dem Intervalle $a \leqq z \leqq b$ insofern einen andern Charakter wie früher in dem Intervall § 3, 2, als $f^2(z)$ nicht mehr eindeutig und $f'(z)$ nicht mehr überall von ∞ verschieden ist. Sie können aber auf eine der früheren analoge Form gebracht werden durch die Substitution

$$(27) \qquad z = \frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2}\cos u;$$

es wird dann:

$$\sqrt{q(z)} = \sqrt{(z - a)(b - z)}\sqrt{r(z)} = -\frac{a - b}{2}\sin u . \sqrt{r(z)}, \quad dz = -\frac{a - b}{2}\sin u\, du.$$

Dieses Abhängigkeitsverhältniss zwischen den Variabeln z und u ist derart, dass, während u alle möglichen reellen Werthe durchläuft, z immer zwischen a und b oscillirt. Es ist daher bei den gemachten Voraussetzungen:

$$(28)\quad f(z) = p\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u\right) - \frac{a-b}{2}\sin u \sqrt{r\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u\right)} = F(u)$$

eine eindeutige und stetige Function von u, die immer positiv und von 0 und ∞ verschieden ist. Ferner wird:

$$(29)\qquad 1 + f'^2(z) = \frac{q(z) + \left(p'(z)\sqrt{q(z)} + \frac{1}{2}q'(z)\right)^2}{(z-a)(b-z)r(z)} = \frac{G(u)}{(z-a)(b-z)},$$

wo $G(u)$ für alle reellen Werthe von u nicht nur eindeutig und stetig, sondern auch positiv und von 0 und ∞ verschieden ist. Da nämlich

$$(30)\qquad G(u) = [1 + f'^2(z)](z-a)(b-z),$$

so ist für alle Werthe von u, für die $a < z < b$, $G(u)$ positiv und von 0 verschieden; für solche Werthe von u aber, für die $z = a, b$ wird, ist

$$G(u) = \frac{1}{4}\frac{q'^2(z)}{r(z)}$$

ebenfalls positiv und von 0 verschieden. Da ferner für $a \leqq z \leqq b$ weder $r(z)$ verschwindet noch $q(z), p'(z), q'(z)$ ∞ werden können, so ist nach (29) $G(u)$ für alle reellen Werthe von u endlich.

Wenn aber $G(u)$ diese Eigenschaften hat, so wird in dem Differential:

$$\sqrt{1 + f'^2(z)}\,dz = \sqrt{G(u)}\,du$$

der Coefficient von du bei stetiger Bewegung von u niemals sein Vorzeichen wechseln und kann daher ohne Beschränkung demselben sein positiver Werth beigelegt werden.

Hiernach nehmen die analytischen Gleichungen der Bewegung des Punctes m auf der Ringfläche zunächst folgende unentwickelte Form an:

$$(31) \quad x = F(u).\sqrt{1-v}, \qquad y = F(u).\sqrt{v}, \qquad z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u,$$

$$(32) \quad \begin{cases} -\displaystyle\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{u_0}^u \frac{k\sqrt{G(u)}\,du}{F(u)\sqrt{R(u)}} = 0, \\ \displaystyle\int_{u_0}^u \frac{F(u)\sqrt{G(u)}.\,du}{\sqrt{R(u)}} = t, \end{cases}$$

worin:

$$(33) \quad R(u) = 2(gz+h)f^2(z) - k^2 = 2\left[g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u\right) + h\right]F^2(u) - k^2.$$

Man kann überdies für u in den Gleichungen (31) und (32) auch die Variable w einführen, indem man setzt:

$$(34) \qquad \cos u = \frac{1-w^2}{1+w^2}, \qquad \sin u = \frac{2w}{1+w^2}, \qquad du = \frac{2dw}{1+w^2},$$

worauf $F(u)$, $G(u)$, $R(u)$ eindeutige Functionen von w werden, etwa $F_1(w)$, $G_1(w)$, $R_1(w)$ und die Gleichungen (31) und (32) die Gestalt annehmen:

$$(31') \quad x = F_1(w).\sqrt{1-v}, \qquad y = F_1(w).\sqrt{v}, \qquad z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\,\frac{1-w^2}{1+w^2},$$

$$(32') \quad \begin{cases} -\displaystyle\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{w_0}^w \frac{2k\sqrt{G_1(w)}\,dw}{(1+w^2)F_1(w)\sqrt{R_1(w)}} = 0, \\ \displaystyle\int_{w_0}^w \frac{2F_1(w)\sqrt{G_1(w)}\,dw}{(1+w^2)\sqrt{R_1(w)}} = t; \end{cases}$$

u_0 und w_0 sind die der Zeit $t = 0$ entsprechenden Anfangswerthe von u und w.

Auf analoge Form würden sich die Bewegungsgleichungen für die nach oben offenen und nach unten geschlossenen Ringflächen mit theils zweifachen theils einfachen Horizontalschnitten bringen lassen; jedoch

bietet diese Untersuchung nichts wesentlich verschiedenes von der eben geführten dar.

§ 9. *Die beiden Normalformen der stabilen Bewegung auf einer Rotationsfläche mit zweifachen Horizontalschnitten.*

In den Formeln (31) sind x, y, z für alle reellen Werthe von u und alle v zwischen 0 und 1 eindeutige Functionen von u, $\sqrt{v}$, $\sqrt{1-v}$; ferner gilt in demselben Umfange von den Functionen:

$$g_{11} = -\frac{1}{2}, \qquad g_{12} = \frac{k\sqrt{G(u)}}{F(u)},$$

$$g_{21} = 0, \qquad g_{22} = F(u)\sqrt{G(u)}$$

in (32), dass sie eindeutig und endlich sind und ihr Vorzeichen niemals wechseln. Hat nun die Function $R(u)$ zwei Nullpuncte u_0 und u_1, sodass $R(u) = (u - u_0)(u_1 - u)r(u)$ in dem Intervalle zwischen u_0 und u_1 positiv und von 0 verschieden ist, so ist auch die Determinante:

$$D = -\frac{1}{2}\frac{F(u)\sqrt{G(u)}}{\sqrt{r(u)}}$$

in diesem Intervalle von 0 verschieden und constanten Vorzeichens. Es sind daher, wie früher, x, y eindeutige, bedingt periodische Functionen und z eine eindeutige periodische Function von t. Die Bewegung entspricht der Normalform des § 4.

Wird dagegen $R(u) = R_1(w)$ für keinen reellen Werth von w gleich 0 und ist für alle Werthe von w positiv und endlich, so bieten die Formeln (31′) und (32′) den Fall des Umkehrproblems § 1, II dar mit:

$$f_{a2} = R_1(w), \qquad D = -\frac{1}{2}\frac{F_1(w)\sqrt{G_1(w)}}{\sqrt{R_1(w)}},$$

$$\omega_{11} = \frac{\pi}{2}, \qquad \omega_{12} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2k\sqrt{G_1(w)}\,dw}{(1+w^2)F_1(w)\sqrt{R_1(w)}},$$

$$\omega_{21} = 0, \qquad \omega_{22} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2F_1(w)\sqrt{G_1(w)}\,dw}{(1+w^2)\sqrt{R_1(w)}}.$$

Es wird daher wieder z eine periodische Function von t mit der Periode $T = 2\omega_{22}$ und x, y bedingt periodische Functionen, die unter der Bedingung:

$$4m_1 \frac{\pi}{2} + 2m_2\omega_{12} = 0$$

die Periode $T = 2m_2\omega_{22}$ bekommen. Geometrisch kann indessen die entsprechende Bewegung als eine zweite Normalform der Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche betrachtet werden, welche sich von jener des § 4 durch das Fehlen der Wendekreise unterscheidet. Der Punct macht volle Umläufe um die Ringfläche sowohl im Sinne der Parallel- als im Sinne der geschlossenen Halbmeridiancurven.

Die Untersuchung der Form der Bewegung des Punctes reducirt sich nach dem Vorstehenden wiederum auf die Aufsuchung der Nullpuncte der Function:

$$R(u) = R_1(w) = 2(gz + h)f^2(z) - k^2,$$

also der Schnittkreise der gegebenen Rotationsfläche mit der Rotationsfläche (h, k) des § 5. Es gelten also unmittelbar die Sätze.

I. *Ragt die gegebene ringförmige Rotationsfläche mit einer Zone in den Raum unterhalb der Rotationsfläche* (h, k) *hinein und ist diese Zone von zwei Parallelkreisen begrenzt, in denen sich die beiden Rotationsflächen schneiden, ohne sich zu berühren, so findet in dieser Zone eine den Differentialgleichungen* (5) *entsprechende bedingt periodische Bewegung des Punctes* m *statt.*

Auch hier können mehrere bedingt periodische Zweige der Bewegung vorhanden sein und die früher (§ 6) erwähnten Grenzfälle der stabil und labil periodischen Bewegung auftreten.

II. *Liegt die gegebene ringförmige Rotationsfläche ganz unterhalb der Rotationsfläche* (h, k) *ohne mit ihr einen Punct gemein zu haben, so ist die den Differentialgleichungen* (5) *entsprechende Bewegung eine bedingt periodische Bewegung ohne Wendekreise mit zweierlei vollen Umläufen.*

In diesem Falle besteht die Bewegung naturgemäss nur aus einem Zweige. Der *Übergang von dieser Form der bedingt periodischen Bewegung zu einer solchen mit Wendekreisen* findet unter Vermittlung einer *asymptotischen* Bewegung statt, wenn die Ringfläche ganz unterhalb der Fläche (h, k) liegt, aber dieselbe in einem Parallelkreis berührt.

§ 10. *Beispiel des Kreisringes.*

Für die Ringfläche:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

sind die in § 8 mit $f(z)$, $p(z)$, $q(z)$, $r(z)$ bezeichneten Functionen

$$f(z) = a + \sqrt{b^2 - z^2}, \qquad p(z) = a, \qquad q(z) = (z + b)(b - z), \qquad r(z) = 1$$

und die dortigen Constanten a, b durch $-b$, b zu ersetzen. Die Bedingung (26) wird:

$$a > b.$$

Die Gleichungen der Bewegung lauten, wenn man statt des in § 8 eingeführten u noch $\pi - u$ setzt:

$$x = (a + b\sin u)\sqrt{1 - v}, \qquad y = (a + b\sin u)\sqrt{v}, \qquad z = b\cos u;$$

$$-\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{u_0}^u \frac{kb\,du}{(a + b\sin u)\sqrt{R(u)}} = 0,$$

$$\int_{u_0}^u \frac{b(a + b\sin u)\,du}{\sqrt{R(u)}} = t;$$

$$R(u) = 2(bg\cos u + h)(a + b\sin u)^2 - k^2.$$

Die Werthe $u = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ entsprechen bezüglich dem tiefsten, dem äussersten, dem höchsten und dem innersten Parallelkreis der Ringfläche, sodass der 1. und 2. *Quadrant in Bezug auf* u die positiv, der 3. und 4. die negativ gekrümmten Theile der Fläche umfasst.

Durch die Substitution (34) werden die Integrale mit der Variabeln u auf die algebraische Form gebracht; sie sind *hyperelliptisch vom Geschlecht* $p = 3$.

Die Discussion der Schnittcurven der Ringfläche mit der Rotationsfläche (h, k) ergiebt nun ohne Schwierigkeit: Wenn die Ringfläche von

der Rotationsfläche (h, k) geschnitten wird, was für $-bg < h < bg$ immer stattfindet und auch für $h > bg$ (dem Falle $h < -bg$ entspricht keine Bewegung) noch stattfinden kann, so giebt es jedenfalls unerreichbare Theile der Ringfläche. Es sind entweder 2 oder 4 Wendekreise vorhanden und besteht daher die Bewegung aus einem oder zwei Zweigen, welche bedingt periodische Bewegungen von der Normalform des § 4 sind.

Wenn dagegen die Ringfläche ganz unterhalb der Rotationsfläche (h, k) verläuft, so liegt die zweite Normalform der bedingt periodischen Bewegungen vor und macht der Punct m volle Umläufe im Sinne der Parallelkreise sowohl, wie im Sinne der Meridiankreise der Ringfläche.

Wenn das Zerfallen der Bewegung in 2 Zweige möglich ist (wie z. B. für die der Fig. 3 zu Grunde gelegte Annahme $a = b\sqrt{2}$, $h = \frac{3}{2}\frac{bg}{\sqrt{2}}$), so gestaltet sich der Übergang der einzelnen Formen ineinander folgendermaassen:

Zuerst wenn die Ringfläche ganz unterhalb der Rotationsfläche (h, k) liegt, (vgl. Fig. 3, 1) findet die *bedingt periodische Bewegung ohne Wendekreise* statt. Sobald alsdann die letztere Fläche die unter ihr liegende Ringfläche in einem Parallelkreise des 3. Quadranten berührt, löst sich die Bewegung in eine *asymptotische Form* auf, die dem fraglichen Parallelkreis immer näher kommt, ohne ihn je zu erreichen. Bei weiterer Abnahme von k schneidet die Fläche (h, k) bereits eine Zone unerreichbarer Puncte aus der Ringfläche aus, während die Bewegung auf der andern, unterhalb der Fläche (h, k) gelegenen Zone *bedingt periodisch mit 2 Wendekreisen* ist. Weiterhin berührt die Fläche (h, k), während sie noch immer den Ring in 2 Parallelkreisen schneidet, denselben gleichzeitig in einem 3. Parallelkreis der bisher der Bewegung zugänglichen Zone, sodass die Bewegung sich abermals in eine *asymptotische* auflöst. Bei 4 Schnittkreisen der beiden Flächen zerfällt hierauf die Bewegung in *zwei bedingt periodische Zweige* mit je 2 Wendekreisen. Die Zone des einen Zweiges liegt ganz im 3. Quadranten, die des anderen greift über den 1. Quadranten herum und nähert sich beiderseits der ersteren Zone. Bei abnehmendem k fallen die beiden Wendekreise der ganz im 3. Quadranten belegenen Zone zusammen (vgl. Fig. 3, 2) und die Bewegung besteht aus *einem stabil periodischen und einem bedingt periodischen Zweige.* Der erstere verschwindet alsdann und es bleibt, indem nur mehr zwei

Schnittkreise der beiden Flächen vorliegen nur *ein bedingt periodischer Zweig* (vgl. Fig. 3, 3), dessen beide Wendekreise sich mehr und mehr von verschiedenen Seiten her gegen den 1. Quadranten hinziehen. In diesem fallen sie schliesslich zusammen und eine *stabil periodische Durchlaufung* des betreffenden Parallelkreises, in welchem die Rotationsfläche (h, k) den ganz oberhalb liegenden Ring berührt, erscheint als letzte Grenzform der Bewegung.

Dorpat, im Februar 1888.

Staude. Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche.

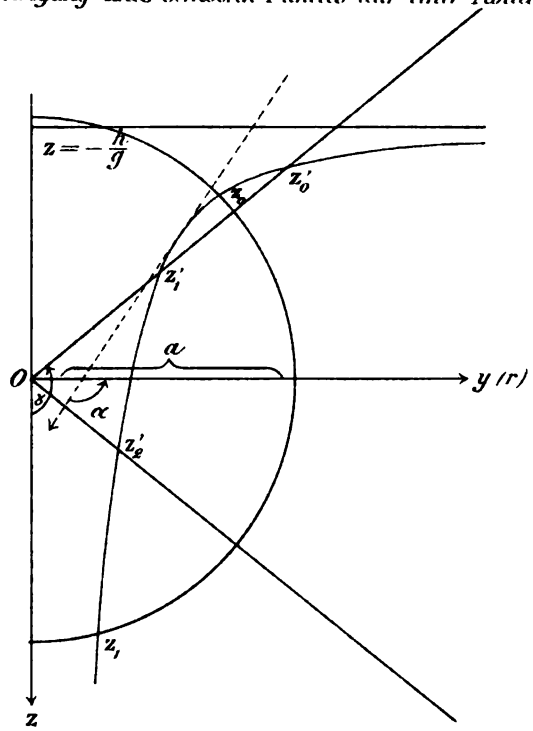


Fig. 1.

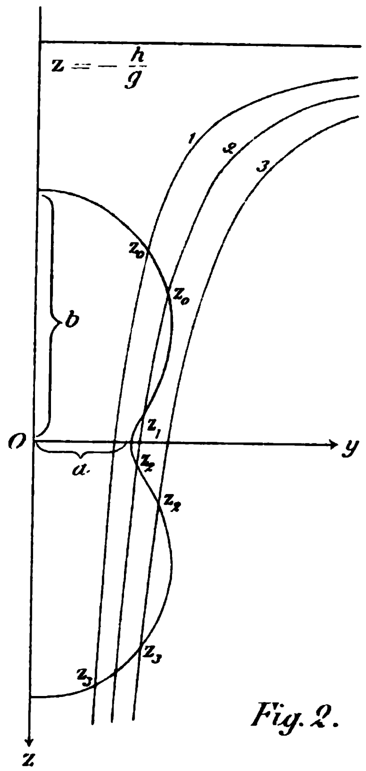


Fig. 2.

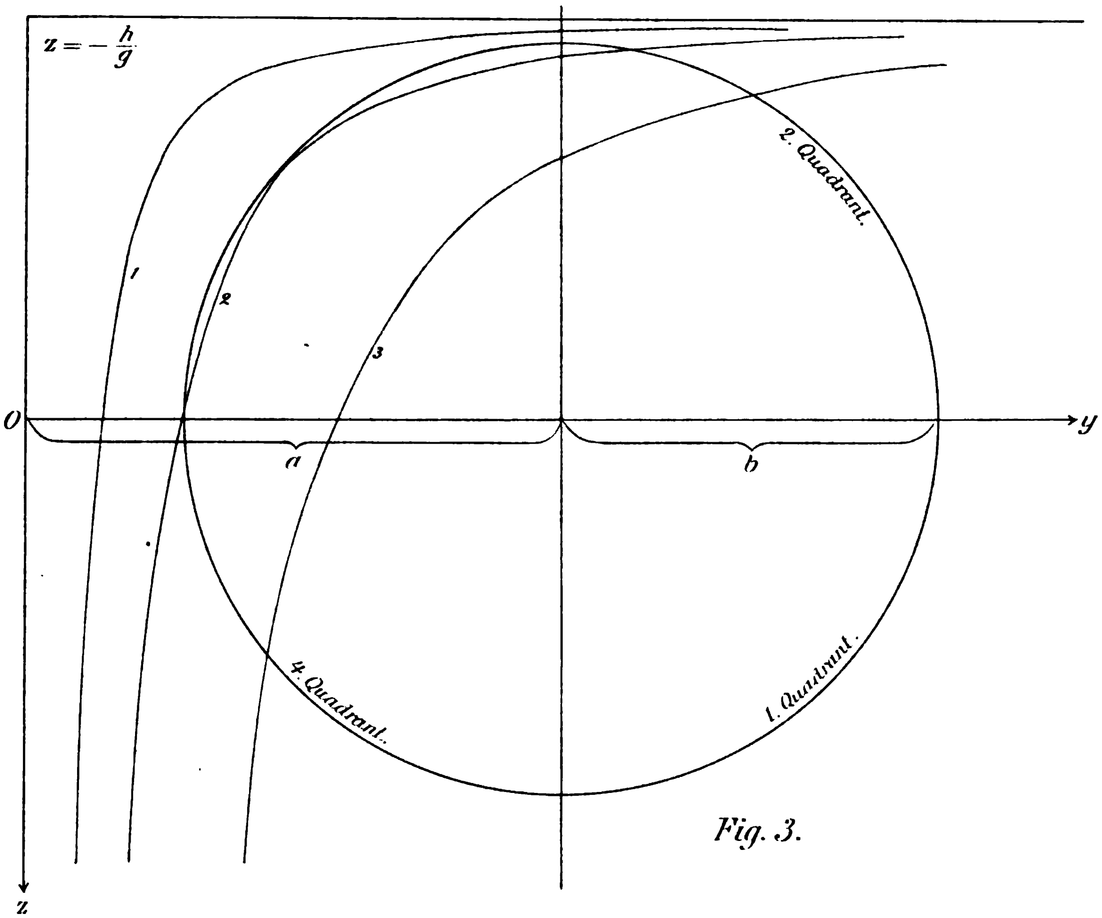


Fig. 3.

ZUR THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

(Zweite Abhandlung[1])

VON

H. WEBER

in MARBURG.

Nach längerer Unterbrechung setze ich meine in dieser Zeitschrift begonnenen Publicationen aus der Theorie der elliptischen Functionen fort. Ich beginne mit einigen Betrachtungen über die allgemeine Transformationstheorie, besonders die Modulargleichungen, welche den Zweck haben, die Formeln dieser Theorie unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt zu betrachten und dieselben teils zu erweitern, teils zu vereinfachen. Diese Untersuchungen berühren sich mit den Arbeiten, die in den letzten Jahren von F. KLEIN und einigen seiner Schüler veröffentlicht sind.[2] Im zweiten Teile der vorliegenden Arbeit werden diese Formeln angewandt auf die Berechnung der aus der complexen Multiplication entspringenden algebraischen Zahlen (der sogenannten singulären Moduln), mit Anwendung verschiedenartiger Methoden. Einige dieser algebraischen Zahlen finden sich in den einschlagenden Arbeiten von HERMITE,[3] JOUBERT,[4]

[1] Acta Mathematica, Bd. 6, S. 329. Die mit I bezeichneten Citate beziehen sich auf diese Abhandlung.

[2] Man vgl. die sehr dankenswerten Übersichten, die F. KLEIN in den Berichten der Sächsischen Gesellschaft d. Wissensch. (2 März 1885) und in den Mathematischen Annalen (Bd. 26) über diese Untersuchungen und ihren Zusammenhang gegeben hat. Von besonderem Interesse war mir die Dissertation von E. W. FIEDLER, die im Jahr 1885 der phil. Facultät der Universität Leipzig vorgelegt wurde, in welcher sich viele der von mir benutzten Formeln wenn auch in anderer Form finden.

[3] HERMITE, *sur la théorie des équations modulaires*, Paris 1859.

[4] JOUBERT, Comptes rendus 1860, t. 50.

Kronecker.[1] Die von mir angewandten Methoden, die alle bisher bekannten Fälle umfassen, vermehren dies Material bedeutend und geben die Resultate meist in überraschend einfacher Gestalt. Die Rechnungen lassen sich auf denselben Wegen noch weiter fortsetzen. Bezüglich dieser Rechnungen bemerke ich noch, dass dieselben, mit Ausnahme der in § 8 behandelten Fälle, nicht wie bei Hermite und Kronecker auf numerischen Rechnungen, sondern auf algebraischen Umformungen beruhen, dass aber trotzdem vielfach die numerische Rechnung, die bei der enormen Convergenz der in Betracht kommenden Reihen sehr leicht ist, teils zur Controlle der Richtigkeit, teils zur leichteren Auffindung rationaler Factoren mit Nutzen angewandt wird.

I. ABSCHNITT.

Zur Transformationstheorie.

§ 1. *Einführung der Functionen $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$.*

In der Abhandlung I, § 6, habe ich als absolute Invariante eines Systems doppelt periodischer Functionen mit den Perioden $1, \omega$ die Function

$$j(\omega) = 2^8 \frac{(1 - k^2 k'^2)^3}{k^4 k'^4} \tag{1}$$

eingeführt, deren Entwicklung nach steigenden Potenzen von q den folgenden Anfang hat

$$j(\omega) = q^{-2}(1 + 744 q^2 + \ldots). \tag{2}$$

Hierin ist, wenn ω das Periodenverhältniss bedeutet

$$q = e^{\pi i \omega}.$$

Von derjenigen Function, welche Dedekind (Journal für Mathematik, Bd. 83) die Valenz von ω nennt, die mit der von F. Klein als absolute

[1] Kronecker, Monatsberichte der Berliner Akademie, 26 Juni 1862.

Invariante $J(\omega)$ bezeichneten Function übereinstimmt, unterscheidet sie sich durch einen Zahlenfactor, so dass $j(\omega) = 27.64 J(\omega)$ ist. Der Grund, der mich zu dieser Abweichung von der sonst schon gebräuchlichen Bezeichnung, zu der ich mich ungern entschloss, bewog, war der, dass die der complexen Multiplication entsprechenden singulären Werte von $j(\omega)$ *ganze* algebraische Zahlen sind, was für $J(\omega)$ nicht der Fall ist. Derselbe Umstand hat mich auch zu den folgenden Einführungen bewogen, welche sich übrigens auch sonst als zweckmässig erweisen.

An Stelle der Invarianten g_2, g_3 (I, § 6) benutze ich die von ihnen durch Zahlenfactoren verschiedenen Functionen

$$(3)\qquad \begin{aligned} \gamma_2(\omega) &= 3\sqrt[3]{4}g_2(\omega) = \sqrt[3]{j(\omega)} &&= q^{-\frac{2}{3}}(1 + 248q^2 + \ldots), \\ \gamma_3(\omega) &= 54 g_3(\omega) = \sqrt{j - 27.64} &&= q^{-1}(1 - 492q^2 + \ldots), \end{aligned}$$

und an Stelle der HERMITE'schen Functionen $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$ (I, § 4) sollen drei Functionen $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ eingeführt werden, welche mit denselben in folgendem Zusammenhang stehen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\sqrt[6]{2}}{\chi(\omega)} &&= \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{kk'}} \\ f_1(\omega) &= \frac{\sqrt[6]{2}\,\psi(\omega)}{\chi(\omega)} &&= \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\frac{k'^2}{k}} \\ f_2(\omega) &= \frac{\sqrt[6]{2}\,\varphi(\omega)}{\chi(\omega)} &&= \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\frac{k^2}{k'}}. \end{aligned}$$

Diese drei Functionen lassen sich in folgender Weise durch die Function $\eta(\omega)$ darstellen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} f(\omega) &= e^{-\frac{\pi i}{24}}\frac{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)}, \\ f_1(\omega) &= \frac{\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)}, \\ f_2(\omega) &= \sqrt{2}\,\frac{\eta(2\omega)}{\eta(\omega)}. \end{aligned}$$

Führt man hier das unendliche Product

$$(6) \qquad \eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}} \prod_{1,\infty}^{\nu} (1 - q^{2\nu})$$

ein, so erhält man

$$f(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{1,\infty}^{\nu} (1 + q^{2\nu-1}),$$

$$(7) \qquad f_1(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{1,\infty}^{\nu} (1 - q^{2\nu-1}),$$

$$f_2(\omega) = \sqrt{2} q^{\frac{1}{12}} \prod_{1,\infty}^{\nu} (1 + q^{2\nu}),$$

woraus die Reihen:

$$f(\omega) = q^{-\frac{1}{24}}(1 + q + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + 2q^8 + 2q^9 + 2q^{10} + 2q^{11} + \ldots),$$

$$(8) \quad f_1(\omega) = q^{-\frac{1}{24}}(1 - q - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + 2q^8 - 2q^9 + 2q^{10} - 2q^{11} + \ldots),$$

$$f_2(\omega) = \sqrt{2} q^{\frac{1}{12}}(1 + q^2 + q^4 + 2q^6 + 2q^8 + 3q^{10} + \ldots).$$

Zwischen den drei Functionen $f(\omega), f_1(\omega), f_2(\omega)$ bestehen die aus (4) sich ergebenden beiden Relationen

$$(9) \qquad f(\omega) f_1(\omega) f_2(\omega) = \sqrt{2},$$

$$(10) \qquad f(\omega)^8 = f_1(\omega)^8 + f_2(\omega)^8.$$

Die Invariante $\gamma_2(\omega)$ lässt sich durch $f(\omega)$ in der Weise ausdrücken

$$(11) \qquad \gamma_2(\omega) = \frac{f^{24} - 16}{f^8},$$

so dass $f^8, -f_1^8, -f_2^8$ die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x^3 - x\gamma_2(\omega) - 16 = 0$$

sind, deren Discriminante $4\gamma_3(\omega)^2$ ist, woraus

$$(12) \qquad \gamma_3(\omega) = \frac{1}{2}[f(\omega)^8 + f_1(\omega)^8][f(\omega)^8 + f_2(\omega)^8][f_1(\omega)^8 - f_2(\omega)^8]$$

$$= \frac{[f(\omega)^{24} + 8][f_1(\omega)^8 - f_2(\omega)^8]}{f(\omega)^8}.$$

Mittels der Formeln (5) erhält man (nach I, § 5, 7, 8) die zur Transformation erster und zweiter Ordnung gehörigen Fundamentalformeln

$$(13)\qquad \begin{aligned} f(\omega+1) &= e^{-\frac{\pi i}{24}} f_1(\omega),\\ f_1(\omega+1) &= e^{-\frac{\pi i}{24}} f(\omega),\\ f_2(\omega+1) &= e^{\frac{\pi i}{12}} f_2(\omega). \end{aligned}$$

$$(14)\qquad \begin{aligned} f\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= f(\omega),\\ f_1\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= f_2(\omega),\\ f_2\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= f_1(\omega). \end{aligned}$$

$$(15)\qquad \begin{aligned} f_2(\omega)f_1(2\omega) &= \sqrt{2},\\ f_1(\omega)f_2\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \sqrt{2},\\ f(\omega)f_2\left(\frac{\omega+1}{2}\right) &= e^{\frac{\pi i}{24}}\sqrt{2},\\ f(\omega)f\left(\frac{\omega-1}{\omega+1}\right) &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ich führe noch die Formeln für die allgemeine lineare Transformation der Functionen f, f_1, f_2 an, die man aus den bekannten HERMITE'schen Formeln für die Transformation der Functionen φ, ψ, χ erhält, die sich aber auch (wie in I, § 5 angedeutet) leicht mittels der Transformation der Function $\eta(\omega)$ aus (5) herleiten lassen.[1] Ich gebe diese Formeln tabellarisch, indem in der ersten Colonne die nach dem Modul 2 reducierten

[1] Vgl. MOLIEN, *Über gewisse in der Theorie der elliptischen Functionen auftretende Einheitswurzeln.* Berichte der Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., 1885.

Transformationszahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stehen wonach sechs mögliche Fälle zu unterscheiden sind.

(16)

$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$	$f\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$	$f_1\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$	$f_2\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\rho\left(\frac{2}{\alpha\delta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta-\gamma\delta)}f(\omega)$	$\rho\left(\frac{2}{\delta}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f_1(\omega)$	$\rho\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f_2(\omega)$
$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\rho\left(\frac{2}{\gamma\beta}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta-\gamma\delta)}f(\omega)$	$\rho\left(\frac{2}{\gamma}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f_2(\omega)$	$\rho\left(\frac{2}{\beta}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f_1(\omega)$
$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$-\rho\left(\frac{2}{\delta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta+\gamma\delta)}f_2(\omega)$	$-\rho\left(\frac{2}{\delta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f_1(\omega)$	$-\rho e^{\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f(\omega)$
$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$-\rho\left(\frac{2}{\gamma}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta+\gamma\delta)}f_1(\omega)$	$-\rho\left(\frac{2}{\gamma}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f_2(\omega)$	$-\rho e^{-\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f(\omega)$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	$-\rho\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta+\gamma\delta)}f_1(\omega)$	$-\rho e^{-\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f(\omega)$	$-\rho\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f_2(\omega)$
$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	$-\rho\left(\frac{2}{\beta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta+\gamma\delta)}f_2(\omega)$	$-\rho e^{\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f(\omega)$	$-\rho\left(\frac{2}{\beta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f_1(\omega)$

$$\rho = e^{-\frac{2i\pi}{8}(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\delta-\alpha\beta^2\gamma)}. \tag{17}$$

Für die lineare Transformation von γ_2, γ_3 erhält man

$$\begin{aligned}\gamma_2\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) &= \rho\gamma_2(\omega),\\ \gamma_3\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) &= (-1)^{\alpha\beta+\gamma\delta+\beta\gamma}\gamma_3(\omega).\end{aligned} \tag{18}$$

Als Ergänzung der Sätze am Schluss von Abhandlung I, § 7, ergiebt sich noch als unmittelbare Folgerung jener Sätze (n° 1)

1.) *Wenn eine Function von ω, als Function von k^2 überall einen algebraischen Character hat, und durch die beiden Substitutionen*

$$(\omega, \omega+2), \left(\omega, -\frac{1}{\omega}\right)$$

ungeändert bleibt, so ist sie eine rationale Function von $f(\omega)^{24}$.

2.) *Bleibt eine solche Function ungeändert durch die Substitutionen*

$$(\omega, \omega + 2r), \left(\omega, -\frac{1}{\omega}\right)$$

worin r *ein Teiler von* 24 *und* $rr_1 = 24$ *ist, so ist sie eine rationale Function von* $f(\omega)^{r_1}$.

Denn bezeichnen wir eine solche Function mit $\varphi(\omega)$ und setzen

$$\varepsilon = e^{\frac{-2\pi i s r_1}{24}}$$

so ist nach 1.) für jedes ganzzahlige s

$$f(\omega)^{sr_1}\{\varphi(\omega) + \varepsilon\varphi(\omega + 2) + \varepsilon^2\varphi(\omega + 4) + \dots + \varepsilon^{r-1}\varphi[\omega + 2(r - 1)]\}$$

eine rationale Function von $f(\omega)^{24}$.

§ 2. *Die Transformation n^{ten} Grades.*

Ist n eine beliebige positive ganze Zahl und

$$n = ad \tag{1}$$

irgend eine Zerlegung derselben in zwei Factoren, ferner c eine nach dem Modul a genommene Zahl, so dass a, d, c keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, so sind die Grössen

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right) \tag{2}$$

deren Anzahl, wenn p die sämmtlichen in n aufgehenden von einander verschiedenen Primzahlen durchläuft

$$\nu = n\prod\left(1 + \frac{1}{p}\right) \tag{3}$$

ist, die Wurzeln einer Gleichung ν^{ten} Grades, deren Coëfficienten rationale Functionen von $j(\omega)$ sind, der *Invariantengleichung* (I, § 16).

Diese Thatsache ergiebt sich sehr einfach aus der Bemerkung, dass durch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} = (\omega, \omega + 1), \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = \left(\omega, \frac{-1}{\omega}\right), \tag{5}$$

die ν Grössen (2) nur unter einander vertauscht werden. Es ist nämlich

$$\begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \lambda, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & 0 \\ c', & d \end{pmatrix}, \tag{6}$$

wenn

$$c' = c + d - \lambda a, \tag{7}$$

und

$$\begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

wenn

$$\begin{aligned} \alpha a' + \beta c' &= 0, & \beta d' &= a, \\ \gamma a' + \delta c' &= -d, & \delta d' &= c. \end{aligned} \tag{9}$$

Hiernach ist d' als grösster gemeinschaftlicher Teiler von a und c, und dadurch wegen $a'd' = n$ auch a' bestimmt, und dann ergiebt sich c' aus der Congruenz

$$cc' \equiv -dd' \pmod{n}. \tag{10}$$

Aus (9) folgt sodann

$$\begin{aligned} \alpha d &= -c', & \beta d' &= a, & \beta d &= a', \\ -\gamma n &= cc' + dd', & \delta d' &= c, \end{aligned} \tag{11}$$

und d ist der grösste gemeinschaftliche Teiler von a', c'.

Hieraus schliesst man, dass die Grössen (2) durch die Substitutionen (4), (5) nur unter einander vertauscht, und die symmetrischen Functionen

derselben nicht geändert werden. Letztere sind daher rationale Functionen von $j(\omega)$ w. z. b. w.

Die Invariantengleichung ist irreducibel in dem Sinne, dass sie sich nicht in Factoren niedrigeren Grades zerlegen lässt, deren Coëfficienten rationale Functionen von $j(\omega)$ sind, wie man am einfachsten aus der folgenden Zusammensetzung von Transformationen n^{ter} Ordnung erkennt.

Man bestimme bei gegebenen a, c, d die Zahl x so, dass

$$\alpha = ax + c, \qquad \beta = d$$

ohne gemeinschaftlichen Teiler sind, und dann γ, δ so dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Es ist dann

$$(12) \qquad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & , 1 \\ d\gamma - c\delta, & a\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix},$$

und daraus folgt, dass durch die Substitution

$$\left(\omega, \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right),$$

welche $j(\omega)$ ungeändert lässt, $j(n\omega)$ in

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

übergeht. Wenn also eine rationale Function von u und $j(\omega)$ für $u = j(n\omega)$ verschwindet, so verschwindet dieselbe auch für die sämmtlichen Grössen (2), und da letztere von einander verschieden sind, so ist damit die Irreducibilität bewiesen.

Wenn nun irgend ein System von ν Functionen von ω vorliegt, entsprechend den ν Zahlensystemen a, c, d, die wir, da bei festgehaltenem n durch a die Zahl d mitbestimmt ist, mit

$$\Phi_{a,c}$$

bezeichnen, welche ebenso wie die Functionen (2) durch die Substitutionen (4), (5) in $\Phi_{a',c'}$ permutiert werden, so sind dies gleichfalls die Wurzeln einer Gleichung ν^{ten} Grades, welche rational von $j(\omega)$ abhängt, und es lässt sich $\Phi_{a,c}$ rational durch

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right) \text{ und } j(\omega)$$

ausdrücken. Letzteres folgt in bekannter Weise daraus, dass für jedes ganzzahlige r die Summe

$$\Sigma \Phi_{a,c}\, j\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)^r$$

durch die Substitutionen (4), (5) ungeändert bleibt, und daher eine rationale Function von $j(\omega)$ ist.

Die Werte von $\Phi_{a,c}$ sind entweder alle von einander verschieden und dann ist die betreffende Gleichung irreducibel, oder sie zerfallen in Gruppen von gleich viel unter einander gleichen.

Indem wir diese Transformationsprincipien auf die Functionen f, f_1, f_2 anwenden, setzen wir n als ungerade voraus, und nehmen was alsdann freisteht

$$c \equiv 0 \pmod{16}, \tag{13}$$

und wenn n nicht durch 3 teilbar ist

$$c \equiv 0 \pmod{48} \tag{14}$$

an, was natürlich auch für die aus (7), (10) bestimmten Zahlen c' gelten soll.

Wird zur Abkürzung

$$\begin{gathered} f(\omega) = u, \qquad f_1(\omega) = u_1, \qquad f_2(\omega) = u_2, \\ f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right) = v, \qquad \left(\frac{2}{a}\right) f_1\left(\frac{c+d\omega}{a}\right) = v_1, \qquad \left(\frac{2}{d}\right) f_2\left(\frac{c+d\omega}{a}\right) = v_2 \end{gathered} \tag{15}$$

gesetzt, so erhält man mit Benutzung der linearen Transformationsformeln § 1 (16), wenn man auf die Änderungen des Zahlensystems a, d, c, wie sie durch (7), (9), (10) characterisiert sind, in der Bezeichnung keine Rücksicht nimmt, folgende zusammengehörige Vertauschungen:

$$\begin{array}{llll} \omega & ; \; u, \; u_1, \; u_2 & ; \; v, \; v_1, \; v_2, \\ -\frac{1}{\omega} & ; \; u, \; u_2, \; u_1 & ; \; \rho v, \; \rho v_2, \; \rho v_1, \\ \omega + 1 & ; \; e^{-\frac{\pi i}{24}} u_1, \; e^{-\frac{\pi i}{24}} u, \; e^{\frac{\pi i}{12}} u_2 & ; \; \sigma e^{-\frac{n\pi i}{24}} v_1, \; \sigma e^{-\frac{n\pi i}{24}} v, \; \sigma e^{\frac{n\pi i}{12}} v_2, \end{array} \tag{16}$$

worin ρ, σ dritte Einheitswurzeln sind, welche, *falls n nicht durch 3 teilbar ist, den Wert 1 haben.*

Hieraus schliessen wir nun durch eine Wiederholung der letzten Substitution (16), gestützt auf den Satz am Schlusse des § 1, dass die drei Reihen von je ν Grössen

$$(17)\qquad f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right),\ \left(\frac{2}{a}\right)f_1\left(\frac{c+d\omega}{a}\right),\ \left(\frac{2}{d}\right)f_2\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)$$

falls n nicht durch 3 teilbar ist, die Wurzeln je einer Gleichung ν^{ten} Grades sind, deren Coëfficienten rational von $f(\omega)$ resp. $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ abhängen. Ist der Transformationsgrad n aber durch 3 teilbar, so kommt diese Eigenschaft den Cuben der Grössen (17) zu. Ebenso ergiebt sich, wenn r ein Divisor von 24 ist, eine solche Gleichung für

$$f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)^r,$$

deren Coëfficienten rational von $f(\omega)^r$ abhängen. Diese Gleichungen wollen wir die SCHLÄFLI'schen Modulargleichungen nennen. (SCHLÄFLI, Journal für Mathematik, Bd. 72.)

§ 3. *Princip zur Aufstellung von Transformationsgleichungen.*

Wir betrachten im Folgenden, immer unter Voraussetzung eines ungeraden n, rationale Functionen $\Phi_{a,c}$ der sechs Grössen

$$(1)\qquad f(\omega),\ f_1(\omega),\ f_2(\omega),\ f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right),\ \left(\frac{2}{a}\right)f_1\left(\frac{c+d\omega}{a}\right),\ \left(\frac{2}{d}\right)f_2\left(\frac{c+d\omega}{a}\right),$$

welche durch die Substitutionen

$$(2)\qquad \left(\omega\,,\ -\frac{1}{\omega}\right),\ (\omega\,,\ \omega+1)$$

in einander übergehen, und demnach Wurzeln von Transformationsgleichungen sind, welche rational von $j(\omega)$ abhängen.

Diese Gleichungen sind, wie oben gezeigt, entweder irreducibel oder Potenzen von irreducibeln Gleichungen.

Sind die $\Phi_{a,c}$ *ganze* rationale Functionen der Grössen (1) oder enthalten sie im Nenner nur Potenzen dieser Grössen (1), so wird keine von

ihnen für einen *endlichen* Wert von $j(\omega)$ unendlich, und dieselben sind also *ganze algebraische* Functionen von $j(\omega)$, d. h. wenn in der Transformationsgleichung, deren Wurzeln die $\Phi_{a,c}$ sind, der Coëfficient der höchsten Potenz der Unbekannten $= 1$ ist, so sind die übrigen Coëfficienten dieser Gleichung *ganze* rationale Functionen von $j(\omega)$.

Richtet man nun die Functionen $\Phi_{a,c}$ durch geeignete Bestimmung gewisser Constanten so ein, dass sie für $q = 0$ endlich bleiben, so werden dieselben auch für ein unendliches $j(\omega)$ alle endlich bleiben, die Coëfficienten jener Gleichung werden mithin constant und *die Functionen $\Phi_{a,c}$ selbst sind alle einer und derselben Constanten gleich.*

Auf diese Weise ist man dann zur Aufstellung einer Transformationsgleichung gelangt, wenn auch nicht in expliciter Form.

Bezüglich der Bildung solcher Functionen $\Phi_{a,c}$ gelten die folgenden Bemerkungen.

1.) Hat man zwei dieser Functionen Φ, die wir in der Folge immer mit A, B bezeichnen, so ist jede ganze rationale Function von A, B ebenfalls eine solche Function Φ, und man kann die gesuchte Modulargleichung in Gestalt einer rationalen Gleichung zwischen A, B aufstellen. Denn da A, B algebraische Functionen von einer Variablen, $j(\omega)$, sind, so lässt sich durch Elimination von $j(\omega)$ immer eine solche Gleichung zwischen A, B herleiten. Damit aber diese Gleichung eine wirkliche Transformationsgleichung, nicht eine Identität sei, ist selbstverständlich erforderlich, dass aus den Functionen A, B sich nicht die sämmtlichen Variablen (1), wenn man sie als unabhängig oder nur durch die zwischen den Functionen f, f_1, f_2 bestehenden Relationen verbunden betrachtet, eliminieren lassen.

2.) Wenn n keinen quadratischen Teiler hat, so hat man nur dafür zu sorgen, dass die Functionen $\Phi_{a,0}$ für $q = 0$ endlich bleiben, denn daraus folgt durch Vermehrung von ω um eine ganze Zahl die Endlichkeit der übrigen.

3.) Ist n eine Primzahl, und hat die Function $\Phi_{a,c}$ die Eigenschaft durch Vertauschung von

$$f(\omega), \qquad f_1(\omega), \qquad f_2(\omega)$$

mit

$$f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \ \left(\frac{2}{a}\right) f_1\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \ \left(\frac{2}{d}\right) f_2\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)$$

ungeändert zu bleiben, so genügt der Nachweis der Endlichkeit von $\Phi_{1,0}$, woraus durch Vertauschung von ω mit $\omega:n$ die Endlichkeit von $\Phi_{n,0}$, und daraus nach 1. die der übrigen folgt.

4.) Es ist nicht immer erforderlich, dass die in n° 1.) erwähnten Functionensysteme A, B durch die Substitutionen (2) vollständig ungeändert bleiben. Dieselben können auch Einheitswurzeln als Factoren annehmen, wenn nur solche Producte $A^h B^k$ benutzt werden, in welchen diese Einheitswurzeln dieselben sind. Man erhält alsdann ein Functionensystem $\Phi_{a,c}$ in der Form

$$\Sigma M_{h,k} A^h B^k,$$

welches die Eigenschaft hat, dass eine Potenz desselben durch die Substitutionen (2) ungeändert bleibt, worauf man die obigen Schlüsse ungeändert anwenden kann. Die weiter unten folgenden Beispiele werden dies Verfahren klar legen.

§ 4. *Die Schläfli'schen Modulargleichungen.*

Wenn die Transformationsgleichung, welcher die Functionen $\Phi_{a,c}$ genügen, nicht von $j(\omega)$, sondern von $f(\omega)$ rational abhängen, wie bei den SCHLÄFLI'schen Modulargleichungen, so ist das im vorigen Paragraphen entwickelte Princip nicht unmittelbar anwendbar. Wenn es in diesem Falle auch gelungen ist, die Functionen $\Phi_{a,c}$ so zu bestimmen, dass sie für $q = 0$ endlich bleiben, so folgt daraus noch nicht, dass die Coëfficienten der Transformationsgleichung für $\Phi_{a,c}$ constant sind, da dieselben eine Potenz von $f(\omega)$ im Nenner enthalten können. Man kann aber durch einen kleinen Zusatz auch in diesem Fall unser Princip anwendbar machen. Es geht nämlich (nach § 1, 15) durch die Transformation zweiter Ordnung

$$\left(\omega\,,\,\frac{\omega-1}{\omega+1}\right) \tag{1}$$

$f(\omega)$ in $\sqrt{2}:f(\omega)$ über. Wenn man daher die Functionen $\Phi_{a,c}$ so bestimmt, dass sie durch die Vertauschung (1) nur unter einander ver-

tauscht werden, so haben die Coëfficienten der Transformationsgleichung, deren Wurzeln diese sind, die Eigenschaft, durch die Vertauschung

$$\left(f(\omega),\ \frac{\sqrt{2}}{f(\omega)}\right) \tag{2}$$

sich nicht zu ändern, und sind also *ganze rationale* Functionen von

$$f(\omega)+\frac{\sqrt{2}}{f(\omega)}.$$

Bleiben diese nun für $q = 0$, also für $f(\omega) = \infty$ endlich, so müssen sie constant sein und alles ist wie in dem vorigen Fall.

Um Functionen $\Phi_{a,c}$ wie die hier geforderten zu bilden, suchen wir zunächst für ein gegebenes Zahlensystem a, c, d die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a', c', d'$ so zu bestimmen, dass

$$\begin{pmatrix} a, 0 \\ c, d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, 1 \\ -1, 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, 1 \\ -1, 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a', 0 \\ c', d' \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{4}$$

Dieser Ansatz führt zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= c'(\alpha+\beta) + a'(\alpha-\beta), & a &= d'(\alpha+\beta), \\ c - d &= c'(\gamma+\delta) + a'(\gamma-\delta), & c + d &= d'(\gamma+\delta). \end{aligned} \tag{5}$$

Hierdurch ist zunächst d' bestimmt als der grösste gemeinschaftliche Teiler von a und $c + d$, und aus $n = a'd'$ ergiebt sich a'.

Man erhält dann aus (5)

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{a}{d'}, & \alpha - \beta &= \frac{a(d'-c')}{n}, \\ \gamma + \delta &= \frac{c+d}{d'}, & \gamma - \delta &= \frac{c(d'-c') - d(d'+c')}{n}, \end{aligned} \tag{6}$$

woraus für c' die beiden Congruenzen folgen:

$$c'\frac{d+c}{d'} \equiv c - d, \quad c'\frac{a}{d'} \equiv a \pmod{a'}, \tag{7}$$

welche mit einander verträglich sind und c' nach dem modul a' vollständig bestimmen. Ausserdem soll, wie immer, c' durch 16, und wenn n nicht durch 3 teilbar ist, durch 48 teilbar sein.

Aus den Formeln (6) ergiebt sich, dass entweder α, δ gerade, β, γ ungerade oder α, δ ungerade, β, γ gerade sind, und im ersten Fall $\beta\gamma \equiv n \pmod 8$, im zweiten $\gamma\delta \equiv n \pmod 8$, ferner in beiden Fällen $\alpha\beta - \gamma\delta \equiv 0 \pmod{16}$, und wenn n nicht durch 3 teilbar ist,

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta^2\gamma \equiv 0 \pmod 2.$$

Hiernach ergeben sich nach § 1 (16) folgende zusammengehörige Vertauschungen

$$(8)\qquad \begin{array}{lll} \omega, & f(\omega), & f\left(\dfrac{c+d\omega}{a}\right), \\[2ex] \dfrac{\omega-1}{\omega+1}, & \dfrac{\sqrt{2}}{f(\omega)}, & \rho\left(\dfrac{2}{n}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{f\left(\dfrac{c+d\omega}{a}\right)}, \end{array}$$

worin, wie oben, ρ eine dritte Einheitswurzel bedeutet, welche, falls n nicht durch 3 teilbar ist, den Wert 1 hat.

Definieren wir hiernach die beiden Functionen

$$(9)\qquad \begin{aligned} A &= \left(\frac{f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)}{f(\omega)}\right)^r + \left(\frac{f(\omega)}{f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)}\right)^r, \\ B &= \left[f(\omega)f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)\right]^s + \left(\frac{2}{n}\right)^{r+s}\frac{2^s}{\left[f(\omega)f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)\right]^s}, \end{aligned}$$

worin r, s ganze Zahlen sind, so ergiebt sich, wenn r_1 als Divisor von 24 so bestimmt wird, dass

$$(n-1)rr_1 \equiv 0, \qquad (n+1)sr_1 \equiv 0 \pmod{12},$$

nach § 2 (16), das folgende System von Vertauschungen, (wobei auf die Änderungen der Zahlen a, c, d nicht Rücksicht genommen ist)

$$(10)\qquad \begin{array}{lll} \omega, & A, & B, \\[1ex] -\dfrac{1}{\omega}, & A, & B, \\[1ex] \omega + 2r_1, & (-1)^{\frac{(n-1)rr_1}{12}}A, & (-1)^{\frac{(n+1)sr_1}{12}}B, \\[1ex] \dfrac{\omega-1}{\omega+1}, & \left(\dfrac{2}{n}\right)^r A, & \left(\dfrac{2}{n}\right)^r B, \end{array}$$

und diese Functionen sind also zur Anwendung des im vorigen Paragraphen dargelegten Princips geeignet.

Ist n eine Primzahl so genügt nach den Bemerkungen des vorigen Paragraphen die Betrachtung des Falles $a = 1$, für welchen man die Entwicklungen hat

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
A &= q^{-\frac{(n-1)r}{24}} \prod^{\nu} \left(\frac{1 + q^{n(2\nu-1)}}{1 + q^{2\nu-1}}\right)^r + q^{\frac{(n-1)r}{24}} \prod^{\nu} \left(\frac{1 + q^{2\nu-1}}{1 + q^{n(2\nu-1)}}\right)^r, \\
B &= q^{-\frac{(n+1)s}{24}} \prod (1 + q^{2\nu-1})^s (1 + q^{n(2\nu-1)})^s + \left(\frac{2}{n}\right)^{r+s} \frac{2^s q^{\frac{(n+1)s}{24}}}{\prod (1 + q^{2\nu-1})^s (1 + q^{n(2\nu-1)})^s}.
\end{aligned}
$$

Die Wahl der Zahlen r, s ist an sich willkürlich. Für kleinere Zahlen r, s wird man im Allgemeinen einfachere Resultate zu erwarten haben. Indessen ist die zweckmässigste Wahl nicht $s = 1$, $r = 1$, sondern die, bei welcher

$$
\frac{(n - 1)r}{24}, \qquad \frac{(n + 1)s}{24},
$$

welches die Exponenten der höchsten Potenz von q^{-1} in den Entwicklungen (11) sind, Brüche mit demselben Nenner, und zugleich r, s möglichst klein werden. Eine andere Wahl würde gewisse Potenzerhebungen nötig machen. Ausserdem müssen, für ein durch 3 teilbares n, auch r, s durch 3 teilbar sein.

Um die Anwendung des Princips im einfachsten Fall etwas ausführlicher darzulegen, sei $n = 3$, also $r = 6$, $s = 3$, und

$$
A = q^{-\frac{1}{2}} - 5q^{\frac{1}{2}} + \ldots, \qquad B = q^{-\frac{1}{2}} - 5q^{\frac{1}{2}} - \ldots,
$$

woraus, da $A - B$ keine negativen Potenzen von q enthält:

$$
A - B = 0
$$

als Modulargleichung folgt.

Auf diese Weise findet man folgende Formeln, worin

$$
v = f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), \qquad u = f(\omega)
$$

gesetzt ist.

I. $n = 3.\qquad A = \left(\frac{u}{v}\right)^6 + \left(\frac{v}{u}\right)^6,\qquad B = u^3v^3 - \frac{8}{u^3v^3};$

$$A - B = 0.$$

$n = 5.\qquad A = \left(\frac{u}{v}\right)^3 + \left(\frac{v}{u}\right)^3,\qquad B = u^2v^2 - \frac{4}{u^2v^2};$

$$A - B = 0.$$

$n = 7.\qquad A = \left(\frac{u}{v}\right)^4 + \left(\frac{v}{u}\right)^4,\qquad B = u^3v^3 + \frac{8}{u^3v^3};$

$$A - B + 7 = 0.$$

$n = 11.\qquad A = \left(\frac{u}{v}\right)^6 + \left(\frac{v}{u}\right)^6,\qquad B = uv - \frac{2}{uv};$

$$A - B^5 + B^3 + 2B = 0.$$

$n = 13.\qquad A = \frac{u}{v} + \frac{v}{u},\qquad B = u^6v^6 - \frac{64}{u^6v^6};$

$$A^7 + 6A^5 + A^3 - 20A - B = 0.$$

$n = 17.\qquad A = \left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{v}{u}\right)^2,\qquad B = u^4v^4 + \frac{16}{u^4v^4};$

$$A^3 - B^2 + 17AB - 34A^2 + 34B + 116A + 440 = 0.$$

$n = 19.\qquad A = \left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{v}{u}\right)^2,\qquad B = u^3v^3 - \frac{8}{u^3v^3};$

$$A^5 - B^3 + 19AB^2 - 95A^2B + 109A^3 + 128B - 128A = 0.\text{[1]}$$

---

[1] Die bei Berechnung dieser Formeln benutzten Reihenentwicklungen, die man behufs Verification derselben nur einzusetzen hat, sind, soweit sie gebraucht werden, folgende:

$n = 3.\qquad A = B = q^{-\frac{1}{2}}(1 - 5q \ldots)$

$n = 5.\qquad A = B = q^{-\frac{1}{2}}(1 - 2q \ldots)$

$n = 7.\qquad A = q^{-1}(1 - 4q \ldots)$

$\qquad\qquad B = q^{-1}(1 + 11q \ldots)$

$n = 11.\qquad A = q^{-\frac{5}{2}}(1 - 6q + 21q^2 \ldots)$

$\qquad\qquad B = q^{-\frac{1}{2}}(1 - q + 2q^2 \ldots)$

$n = 13.\qquad A = q^{-\frac{1}{2}}(1 + 2q^2 - 2q^3 \ldots)$

$\qquad\qquad B = q^{-\frac{7}{2}}(1 + 6q + 15q^2 + 26q^3 \ldots)$

Aus diesem ersten System leitet man ein zweites und drittes her für die Functionen f_1, f_2, indem man ω durch $\omega + 1$ und darauf ω durch $-1:\omega$ ersetzt (§ 2, 13). Diese beiden Systeme haben dieselbe Form, nur dass einmal

$$u_1 = f_1(\omega), \qquad v_1 = \left(\frac{2}{a}\right) f_1\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

das andere mal

$$u_1 = f_2(\omega), \qquad v_1 = \left(\frac{2}{d}\right) f_2\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

zu setzen ist.

II. $n = 3.$ $\qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^6 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^6, \qquad B_1 = u_1^3 v_1^3 + \frac{8}{u_1^3 v_1^3};$

$$A_1 + B_1 = 0.$$

$n = 5.$ $\qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^3 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^3, \qquad B_1 = u_1^2 v_1^2 + \frac{4}{u_1^2 v_1^2};$

$$A_1 + B_1 = 0.$$

$n = 7.$ $\qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^4 + \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^4, \qquad B_1 = u_1^3 v_1^3 + \frac{8}{u_1^3 v_1^3};$

$$A_1 - B_1 - 7 = 0.$$

$n = 11.$ $\qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^6 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^6, \qquad B_1 = u_1 v_1 + \frac{2}{u_1 v_1};$

$$A_1 + B_1^5 + B_1^2 - 2B_1 = 0.$$

$n = 13.$ $\qquad A_1 = \frac{u_1}{v_1} - \frac{v_1}{u_1}, \qquad B_1 = u_1^6 v_1^6 + \frac{64}{u_1^6 v_1^6};$

$$A_1^7 - 6A_1^5 + A_1^3 + 20A_1 + B_1 = 0.$$

$n = 17.$ $\qquad A = q^{-2}(1 - 3q + 6q^2 - 13q^3 + 25q^4 - 39q^5 + 76q^6 \ldots)$

$\qquad B = q^{-3}(1 + 4q + 6q^2 + 8q^3 + 17q^4 + 28q^5 + 54q^6 \ldots)$

$n = 19.$ $\qquad A = q^{-\frac{3}{2}}(1 - 2q + 3q^2 - 5q^3 + 11q^4 - 13q^5 + 24q^6 - 28q^7 \ldots)$

$\qquad B = q^{-\frac{3}{2}}(1 + 3q + 3q^2 + 4q^3 + 9q^4 + 4q^5 + 39q^6 - 27q^7 \ldots).$

$$n = 17. \qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^8 + \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^8, \qquad B_1 = u_1^4 v_1^4 + \frac{16}{u_1^4 v_1^4};$$

$$A_1^3 - B_1^2 - 17 A_1 B_1 - 34 A_1^2 - 34 B_1 + 116 A_1 + 440 = 0.$$

$$n = 19. \qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^3 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^3, \qquad B_1 = u_1^3 v_1^3 + \frac{8}{u_1^3 v_1^3};$$

$$A_1^5 + B_1^3 - 19 A_1 B_1^2 + 95 A_1^2 B_1 - 109 A_1^3 + 128 B_1 - 128 A_1 = 0.$$

§ 5. *Die irrationalen Modulargleichungen.*

Noch einfacher gestaltet sich die Anwendung unseres Princips (§ 2) bei den folgenden Annahmen.

Wir setzen wie oben

$$(1) \qquad \begin{array}{lll} u = f(\omega), & u_1 = f_1(\omega), & u_2 = f_2(\omega), \\ v = f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), & v_1 = \left(\frac{2}{a}\right) f_1\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), & v_2 = \left(\frac{2}{d}\right) f_2\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), \end{array}$$

so dass sich aus § 2 (16) die Vertauschungen ergeben

$$(2) \qquad \begin{array}{llll} \omega, & uv, & u_1 v_1, & u_2 v_2, \\ -\frac{1}{\omega}, & uv, & u_2 v_2, & u_1 v_1, \\ \omega + 1, & e^{-\frac{(n+1)\pi i}{24}} u_1 v_1, & e^{-\frac{(n+1)\pi i}{24}} uv, & e^{\frac{(n+1)\pi i}{12}} u_2 v_2. \end{array}$$

Nimmt man also

$$(3) \qquad n + 1 \equiv 0 \pmod 8$$

an und setzt:

$$(4) \qquad \begin{aligned} 2A &= uv + (-1)^{\frac{n+1}{8}} (u_1 v_1 + u_2 v_2), \\ B &= uvu_1 v_1 + uvu_2 v_2 + (-1)^{\frac{n+1}{8}} u_1 v_1 u_2 v_2 \\ &= \frac{2}{u_2 v_2} + \frac{2}{u_1 v_1} + (-1)^{\frac{n+1}{8}} \frac{2}{uv}, \end{aligned}$$

so gehen aus (2) die Vertauschungen hervor

$$
(5)\qquad \begin{array}{lll}
\omega, & A, & B, \\
-\frac{1}{\omega}, & A, & B, \\
\omega + 1, & e^{\frac{\pi i(n+1)}{12}} A, & e^{-\frac{\pi i(n+1)}{12}} B.
\end{array}
$$

Unter der Voraussetzung dass n eine Primzahl ist, hat man also nach § 3 aus A, B ganze rationale Functionen zusammenzusetzen, welche unter der Annahme $a = 1$, $d = n$, $c = 0$ für $q = 0$ nicht unendlich werden, welche nur solche Glieder $A^h B^k$ enthalten, in welchen $(n+1)(h-k)$ bei der Division mit 24 einen und denselben Rest lassen, und diese Functionen Constanten gleich zu setzen, deren Wert sich aus $q = 0$ ergiebt. Auf diese Weise erhält man durch sehr einfache Rechnung[1]

$$
(6)\qquad \begin{array}{ll}
n = 7, & A = 0, \\
n = 23, & A = 1, \\
n = 31, & (A^2 - B)^2 - A = 0, \\
n = 47, & A^2 - A - B = 2, \\
n = 71, & A^3 - 4A^2 + 2A - B = 1.
\end{array}
$$

Ist n eine zusammengesetzte Zahl, so bestehen gleichfalls solche Gleichungen zwischen A und B, zu deren Ableitung aber nicht die Betrachtung des einen Transformationsfalles $(a = 1)$ ausreicht; und die demgemäss auch weniger einfach ausfallen. Wir führen nur die Formel an:

$$
(7)\qquad n = 15, \qquad A^3 - AB + 1 = 0.
$$

[1] Man benutzt dazu die für $n > 7$ richtigen Entwicklungen

$$
\begin{aligned}
uv &= q^{-\frac{n+1}{24}}(1 + q + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + 2q^8 \ldots) \\
u_1 v_1 &= q^{-\frac{n+1}{24}}(1 - q - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + 2q^8 \ldots) \\
u_2 v_2 &= 2q^{\frac{n+1}{12}}(1 + q^2 + q^4 + 2q^6 + 2q^8 + \ldots).
\end{aligned}
$$

Für grössere zusammengesetzte Zahlen werden sich weiterhin einfachere Formeln ergeben.

Ist $n \equiv 3 \pmod 8$ so sind den Modulargleichungen die Functionen

$$(8)\qquad \begin{aligned} 4A &= u^2v^2 - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2, \\ B &= u^2v^2u_1^2v_1^2 + u^2v^2u_2^2v_2^2 - u_1^2v_1^2u_2^2v_2^2 \end{aligned}$$

zu Grunde zu legen, für welche sich die Vertauschungen ergeben

$$(9)\qquad \begin{array}{lll} \omega, & A, & B, \\ -\frac{1}{\omega}, & A, & B, \\ \omega + 1, & e^{\frac{(n+1)\pi i}{6}}A, & e^{-\frac{(n+1)\pi i}{6}}B, \end{array}$$

und man findet wie oben

$$(10)\qquad \begin{array}{ll} n = 3, & A = 0, \\ n = 11, & A = 1, \\ n = 19, & A^5 - 7A^2 - B = 0. \end{array}$$

Ist $n \equiv 1 \pmod 4$ so muss man, um zu analogen Resultaten zu kommen

$$\begin{aligned} 8A &= u^4v^4 - u_1^4v_1^4 - u_2^4v_2^4, \\ B &= u^4v^4u_1^4v_1^4 + u^4v^4u_2^4v_2^4 - u_1^4v_1^4u_2^4v_2^4 \end{aligned}$$

setzen, was aber nur für den ersten Fall $n = 5$ zu einer einfachen Formel führt

$$(11)\qquad n = 5, \qquad A = 1.\text{[1]}$$

---

[1] Die in diesem Paragraphen enthaltenen Formeln finden sich teils in der in der Einleitung erwähnten Dissertation von E. FIEDLER, andere, wie die für $n = 47$, 71 lassen sich aus den dortigen, minder einfachen herleiten.

§ 6. *Zusammengesetzte Transformationsgrade.*

Ist n eine zusammengesetzte (ungerade) Zahl und

$$n = n'n'' \tag{1}$$

eine Zerlegung derselben in zwei Factoren n', n'' die zu einander relativ prim sind, so gehört zu jeder Transformation n^{ten} Grades

$$\begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix} \tag{2}$$

je eine und nur eine Transformation der Grade n', n''

$$\begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c'', & d'' \end{pmatrix}, \tag{3}$$

welche durch folgende Bedingungen bestimmt sind

$$\left\{\begin{array}{ccc} ad = n, & a'd' = n', & a''d'' = n'', \\ & a'a'' = a, \quad d'd'' = d, & \\ d''c' = c \pmod{a'}, & & d'c'' \equiv c \pmod{a''}. \end{array}\right. \tag{4}$$

Nach (4) sind d', d'' bestimmt als die grössten gemeinschaftlichen Teiler von d, n' und von d, n''. Bildet man die zusammengesetzten Transformationen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1, & 0 \\ c_1, & d_1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1', & 0 \\ c_1', & d_1' \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c'', & d'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha'', & \beta'' \\ \gamma'', & \delta'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1'', & 0 \\ c_1'', & d_1'' \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \lambda, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & 0 \\ c_2, & d \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \lambda', & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a', & 0 \\ c_2', & d' \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c'', & d'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \lambda'', & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c_2'', & d'' \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6}$$

so ergiebt sich aus den Formeln (6) bis (11) § 2 leicht, dass auch die Transformationen

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} a_1, 0 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1', 0 \\ c_1', d_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1'', 0 \\ c_1'', d_1'' \end{pmatrix}$$

und

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} a, 0 \\ c_2, d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a', 0 \\ c_2', d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'', 0 \\ c_2'', d'' \end{pmatrix}$$

sich nach den Formeln (4) entsprechen,[1] und daraus schliesst man wie in § 2 dass die Invarianten

$$j\left(\frac{c' + d'\omega}{a'}\right), j\left(\frac{c'' + d''\omega}{a''}\right)$$

---

[1] Für die Zusammensetzungen (5) ergiebt sich nämlich nach § 2 dass

d_1	der	grösste	gemeinsame	Teiler	von	a	und	c,
d	»	»	»	»	»	a_1	»	c_1,
d_1'	»	»	»	»	»	a'	»	c',
d'	»	»	»	»	»	a_1'	»	c_1',

ferner

$$cc_1 \equiv -dd_1 \pmod{n}, \qquad c'c_1' \equiv -d'd_1' \pmod{n'},$$

$$c\frac{c_1}{d} \equiv -d_1 \pmod{a}$$

und da nach (4)

$$c \equiv d''c' \pmod{a'} \quad \text{und} \quad a = a'a'', \qquad d = d'd'' \quad \text{ist}$$

$$c'\frac{c_1}{d'} \equiv -d_1 \pmod{a'} \quad \text{oder} \quad c'c_1 \equiv -d'd_1 \pmod{n'},$$

also

$$c'(c_1 - d_1''c_1') \equiv 0 \pmod{n'}$$

und

$$a'(c_1 - d_1''c_1') \equiv 0 \pmod{n'},$$

weil c_1 und c_1' durch d' teilbar sind. Da nun d_1' der grösste gemeinschaftliche Teiler von a', c' und $n' = d_1'a_1'$ ist, so folgt hieraus, in Übereinstimmung mit (4)

$$c_1 \equiv d_1''c_1' \pmod{a_1'}.$$

Für die Zusammensetzung (6) ergiebt sich das Gleiche noch einfacher aus den Congruenzen (§ 2, 7)

$$c_2 \equiv c + d \pmod{a}, \qquad c_2' \equiv c' + d' \pmod{a'}, \qquad d''c_2' \equiv c_2 \pmod{a'}.$$

rational ausdrückbar sind durch

$$j\left(\frac{c+d\omega}{a}\right),\ j(\omega).$$

Für die Anwendung auf die Functionen f, f_1, f_2 ist noch eine Bemerkung beizufügen, welche sich auf den Fall bezieht, dass n durch 3 teilbar ist. In diesem Fall ist von den beiden Zahlen n', n'' eine, nehmen wir an n'', durch 3 teilbar. Es kann also dann c' durch 48 teilbar vorausgesetzt werden und die Zusammengehörigkeit zweier Zahlen c', c'' soll noch näher dadurch bestimmt werden, dass an Stelle der letzten Congruenz (4) die folgende tritt:

$$d'c'' \equiv c \pmod{3a''}. \tag{9}$$

Ist diese Congruenz, wie in (4) angenommen ist, für den Modul a'' befriedigt, so kann man dieselbe für den Modul $3a''$ befriedigen, indem man zu c'' ein Vielfaches von a'' hinzufügt.

Unter dieser Voraussetzung ergeben sich für die in den Transformationen (5), (6) vorkommenden Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ nach § 2 (9), (7) noch folgende Congruenzen:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha \equiv \alpha'' d' d_1', & \beta \equiv \beta' a' d_1' \\ \gamma \equiv \gamma' a' d_1', & \delta \equiv \delta' d' d_1' \end{array}\right\} \pmod 3, \tag{10}$$
$$\lambda \equiv n'\lambda'' \pmod 3.$$

Wenden wir nun die Bezeichnung u, v in demselben Sinne an wie in (15) § 2 und geben den Buchstaben v', v'' die entsprechende Bedeutung für die Zahlen n', n'', welche v für die Zahl n hat, (wobei jedoch stets die Zusammengehörigkeit nach den Congruenzen (4), (9) aufrecht erhalten bleibt) so erhält man die folgenden einander entsprechenden Vertauschungen:

$$\begin{array}{llllllll}
\omega & ; & u, & u_1, & u_2; & v, & v_1, & v_2, \\
-\frac{1}{\omega} & ; & u, & u_2, & u_1; & \rho v, & \rho v_2, & \rho v_1, \\
\omega+1 & ; & e^{-\frac{\pi i}{24}} u_1, & e^{-\frac{\pi i}{24}} u, & e^{\frac{\pi i}{12}} u_2; & \sigma e^{-\frac{n\pi i}{24}} v_1, & \sigma e^{-\frac{n\pi i}{24}} v, & \sigma e^{\frac{n\pi i}{12}} v_2, \\
\omega & ; & v', & v_1', & v_2'; & v'', & v_1'', & v_2'', \\
-\frac{1}{\omega} & ; & v', & v_2', & v_1'; & \rho^{n'} v'', & \rho^{n'} v_2'', & \rho^{n'} v_1'', \\
\omega+1 & ; & e^{-\frac{n'\pi i}{24}} v_1', & e^{-\frac{n'\pi i}{24}} v', & e^{\frac{n'\pi i}{12}} v_2'; & \sigma^{n'} e^{-\frac{n''\pi i}{24}} v_1'', & \sigma^{n'} e^{-\frac{n''\pi i}{24}} v'', & \sigma^{n'} e^{\frac{n''\pi i}{12}} v_2'',
\end{array} \tag{11}$$

worin ρ, σ dritte Einheitswurzeln sind, welche, falls n nicht durch 3 teilbar ist, den Wert 1 haben.

Auf Grund dieser Betrachtungen können wir auf zweierlei Arten zur Bildung von Modulargleichungen für zusammengesetzte Transformationsgrade gelangen.

1.) Ist

$$(n'+1)(n''+1) = 8\mu \equiv 0 \pmod 8, \tag{12}$$

so setzen wir

$$U = uvv'v'', \qquad U_1 = u_1 v_1 v_1' v_1'', \qquad U_2 = u_2 v_2 v_2' v_2'', \tag{13}$$

$$\begin{aligned} 2A &= U + (-1)^n (U_1 + U_2), \\ B &= UU_1 + UU_2 + (-1)^n U_1 U_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Für die letzteren Functionen ergeben sich dann aus (11) die einander entsprechenden Vertauschungen:

$$\begin{array}{ccc} \omega, & A, & B, \\ -\frac{1}{\omega}, & \rho^{n'+1}A, & \rho^{-(n'+1)}B, \\ \omega+1, & \sigma^{n'+1}e^{\frac{2\mu\pi i}{8}}A, & \sigma^{-(n'+1)}e^{-\frac{2\mu\pi i}{8}}B. \end{array} \tag{15}$$

Sind die in (15) vorkommenden dritten Einheitswurzeln $= 1$, was eintritt, wenn n durch 3 nicht teilbar und wenigstens einer seiner Factoren den Rest 2 hat, oder wenn n'' durch 3 teilbar, n' den Rest 2 hat, so ist jede rationale Function von A, B Wurzel einer Invariantengleichung. In den anderen Fällen kommt dieselbe Eigenschaft dem Cubus einer solchen rationalen Function von A, B zu, bei welcher die Differenzen der Exponenten von A und B in allen Gliedern bei der Teilung mit 3 denselben Rest lassen.

Nach § 3 haben wir also solche ganze rationale Functionen von A, B zu bilden, deren sämmtliche Werte für $q = 0$ endlich bleiben, und diese Constanten gleich zu setzen. Sind aber n', n'' zwei Primzahlen, so genügt es auch hier, wenn der erste von diesen Werten, derjenige, für welchen

$$U = f(\omega)f(n'\omega)f(n''\omega)f(n'n''\omega)$$

ist, keine negativen Potenzen von q enthält, weil man aus diesem die übrigen ableiten kann, indem man ω ersetzt durch

$$(16)\qquad \frac{\omega}{n},\ \frac{\omega}{n'},\ \frac{\omega}{n''}$$

und dann ω noch um ganze Zahlen vermehrt.

Durch sehr einfache Rechnung ergeben sich die folgenden Beispiele:

$$(17)\qquad \begin{array}{ll} n = 15, & A = 1, \\ n = 21, & (A^2 - B)^2 - A = 0, \\ n = 33, & A^2 - B - A = 4, \\ n = 35, & A^2 - B - A = 2, \\ n = 55, & A^3 - B - 4A^2 - A + 4 = 0. \end{array}$$

2.) Ist

$$(18)\qquad (n' - 1)(n'' - 1) = 8\mu \equiv 0 \pmod 8,$$

so setzen wir

$$(19)\qquad \begin{aligned} A &= \frac{uv}{v'v''} + (-1)^{\mu}\left(\frac{u_1v_1}{v_1'v_1''} + \frac{u_2v_2}{v_2'v_2''}\right), \\ B &= \frac{v'v''}{uv} + (-1)^{\mu}\left(\frac{v_1'v_1''}{u_1v_1} + \frac{v_2'v_2''}{u_2v_2}\right), \end{aligned}$$

wofür sich wieder die Vertauschungen ergeben

$$(20)\qquad \begin{array}{ccc} \omega, & A, & B, \\ -\frac{1}{\omega}, & \rho^{1-n'}A, & \rho^{n'-1}B, \\ \omega + 1, & \sigma^{1-n'}e^{-\frac{2\mu\pi i}{3}}A, & \sigma^{n'-1}e^{\frac{2\mu\pi i}{3}}B. \end{array}$$

Auf diese Functionen lässt sich dasselbe Verfahren anwenden wie auf die in 1.) betrachteten, wenn man noch die Beschränkung hinzufügt, dass man nur symmetrische Functionen von A, B, d. h. rationale Functionen von AB, $A + B$ benutzt, weil nur dann aus dem einen Wert einer solchen

Function die sämmtlichen übrigen durch die Vertauschungen (16) hervorgehen. Hier ergeben sich die folgenden Beispiele

$$
\begin{aligned}
& n = 15, && AB + 1 = 0, \\
(21)\qquad & n = 35, && 2(A+B) - AB = 5, \\
& n = 39, && 2(A+B) - AB = 3.
\end{aligned}
$$

Auch wenn n mehr als zwei Primfactoren enthält, behalten diese Schlüsse mit den nötigen Modificationen ihre Gültigkeit. Ich führe das Beispiel $n = 105$ an, für welches man zu setzen hat:

$$A = \frac{f(3\omega)f(5\omega)f(7\omega)f(105\omega)}{f(\omega)f(15\omega)f(21\omega)f(35\omega)} + \frac{f_1(3\omega)f_1(5\omega)f_1(7\omega)f_1(105\omega)}{f_1(\omega)f_1(15\omega)f_1(21\omega)f_1(35\omega)}$$

$$+ \frac{f_2(3\omega)f_2(5\omega)f_2(7\omega)f_2(105\omega)}{f_2(\omega)f_2(15\omega)f_2(21\omega)f_2(35\omega)},$$

$$B = \frac{f(\omega)f(15\omega)f(21\omega)f(35\omega)}{f(3\omega)f(5\omega)f(7\omega)f(105\omega)} + \frac{f_1(\omega)f_1(15\omega)f_1(21\omega)f_1(35\omega)}{f_1(3\omega)f_1(5\omega)f_1(7\omega)f_1(105\omega)}$$

$$+ \frac{f_2(\omega)f_2(15\omega)f_2(21\omega)f_2(35\omega)}{f_2(3\omega)f_2(5\omega)f_2(7\omega)f_2(105\omega)},$$

$$n = 105;$$

$$A^2B^2 - 4(A+B)^3 + 10AB(A+B) + 4(A+B)^2 + 10AB + 14(A+B) + 5 = 0.$$

II. ABSCHNITT.

Anwendungen auf die complexe Multiplication.

§ 7. *Die singulären Werte von $f(\omega)$.*

Wir setzen nun in die Function $f(\omega)$ für ω einen der complexen Multiplication entsprechenden singulären Wert, d. h. die Wurzel einer quadratischen ganzzahligen Gleichung mit negativer Determinante

$$(1)\qquad A\omega^2 + 2B\omega + C = 0,$$

wenn (A, B, C) eine eigentlich primitive quadratische Form der Determinante $-m$, also $A, 2B, C$ ohne gemeinsamen Teiler und

$$(2) \qquad AC - B^2 = m.$$

Nach der Abhandlung I, § 18, ist alsdann

$$(3) \qquad j(\omega) = \frac{(f(\omega)^{24} - 16)^3}{f(\omega)^{24}}$$

eine ganze algebraische Zahl, welche ungeändert bleibt, wenn die Gleichung (1) durch eine äquivalente ersetzt wird, nämlich die Wurzel einer ganzzahligen Gleichung

$$(4) \qquad H(u) = 0,$$

deren Grad gleich ist der Anzahl h der Classen eigentlich primitiver quadratischer Formen der Determinante $-m$.

Es soll nun nachgewiesen werden, dass bei passender Auswahl des Repräsentanten der Classe (1) *dieselbe Eigenschaft den Grössen* $f(\omega)^{24}$, *und wenn* m *durch* 3 *nicht teilbar ist auch* $f(\omega)^8$ *zukommt.*

Die sämmtlichen einander äquivalenten Gleichungen (1), die einer Formenclasse entsprechen, zerfallen nach folgenden Kennzeichen in drei Unterabteilungen

$$(5) \quad m \equiv 1 \pmod 2. \qquad \begin{array}{llll} \text{I.} & A \equiv 1, & B \equiv 0, & C \equiv 1, \\ \text{II.} & A \equiv 1, & B \equiv 1, & C \equiv 0, \pmod 2 \\ \text{III.} & A \equiv 0, & B \equiv 1, & C \equiv 1; \end{array}$$

$$(6) \quad m \equiv 0 \pmod 2. \qquad \begin{array}{llll} \text{I.} & A \equiv 1, & B \equiv 1, & C \equiv 1, \\ \text{II.} & A \equiv 1, & B \equiv 0, & C \equiv 0, \pmod 2 \\ \text{III.} & A \equiv 0, & B \equiv 0, & C \equiv 1. \end{array}$$

Nehmen wir an, (1) gehöre zur ersten dieser Unterabteilungen, so bleibt diese Eigenschaft erhalten, wenn ω ersetzt wird durch

$$\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega},$$

falls

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix} \pmod 2$$

während falls

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \pmod 2$$

(1) aus der Abteilung I in den beiden ersten Fällen nach II, in den beiden letzten nach III gelangt.

Die Function $f(\omega)^{24}$ bleibt aber gleichfalls ungeändert durch die Substitutionen (7), während sie durch die Substitutionen (8) resp. in $-f_1(\omega)^{24}$, $-f_2(\omega)^{24}$ übergeht.

Es ist nun früher bewiesen (§ 2 und Abh. I, § 16), dass die ν Grössen

$$(9) \qquad f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)^r,$$

wenn r ein Teiler von 24, der, falls $n = ad$ durch 3 teilbar ist, selbst durch 3 teilbar sein muss, (bei variablem ω) die Wurzeln einer Transformationsgleichung ν^{ten} Grades sind

$$(10) \qquad \Phi_n\left[f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)^r, f(\omega)^r\right] = 0,$$

und hierin wollen wir $r = 8$, und wenn n durch 3 teilbar ist $= 24$ annehmen.

Damit

$$x = f(\omega)^r$$

die Gleichung

$$(11) \qquad \Phi_n(x, x) = 0$$

befriedige, ist notwendig und hinreichend, dass wenigstens für eine der ν Grössen (9) die Bedingung erfüllt sei

$$(12) \qquad f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)^r = f(\omega)^r,$$

und dafür ist erforderlich und hinreichend (Abh. I, § 6), dass die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sich so bestimmen lassen, dass

$$\frac{c + d\omega}{a} = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{13}$$

dass (nach § 1, 16)

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \equiv \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix} \pmod 2, \tag{14}$$

dass ferner, wenn $r = 8$ ist,

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta^2\gamma \equiv 0 \pmod 3. \tag{15}$$

Genügt nun ω der quadratischen Gleichung (1) so ergiebt sich durch Vergleichung mit (13), wenn x einen unbestimmten ganzzahligen Factor bedeutet:

$$\beta d = Ax,$$
$$\alpha c - \gamma a = Cx,$$
$$\alpha d + \beta c - \delta a = 2Bx.$$

Setzt man also noch

$$-\alpha d + \beta c - \delta a = 2y,$$

so folgt:

$$\beta d = Ax, \qquad \beta c - \delta a = Bx + y,$$
$$\alpha c - \gamma a = Cx, \qquad \alpha d = Bx - y,$$
$$n = mx^2 + y^2. \tag{16}$$

Nimmt man n, A ohne gemeinsamen Teiler an, so muss $d = 1$ sein, und man erhält

$$\begin{aligned} \alpha &= Bx - y, & \beta &= Ax, \\ n\gamma &= -Cx + c(Bx - y), & n\delta &= cAx - Bx - y \end{aligned} \tag{17}$$

woraus man ersieht, dass x, y ohne gemeinsamen Teiler sind; übrigens können bei gegebenem m die Zahlen n, x, y der Bedingung (16) gemäss beliebig sein.

Wir machen nun, je nach dem Verhalten von m gegen den Modul 6 die folgenden Annahmen, worin sich die Werte von x, y als notwendig ergeben:

$$\begin{array}{llll}
m \equiv 0, & n = m + 9 \equiv 3 \pmod 6, & x = 1, & y = \pm 3, \\
m \equiv 3, & n = m \equiv 3 \pmod 6, & x = 1, & y = 0, \\
m \equiv 1, & n = m + 16 \equiv -1 \pmod 6, & x = 1, & y = \pm 4, \\
m \equiv 2, & n = m + 9 \equiv -1 \pmod 6, & x = 1, & y = \pm 3, \\
m \equiv 4, & n = m + 1 \equiv -1 \pmod 6, & x = 1, & y = \pm 1, \\
m \equiv 5, & n = m \equiv -1 \pmod 6, & x = 1, & y = 0.
\end{array}$$

Hieraus erkennt man, dass *nur unter der Voraussetzung* (5), (6) I die Zahlen (17) der Bedingung (14) (und zwar der zweiten) genügen.

Da also hiernach von den drei Wurzeln der Gleichung (3)

$$j(\omega) = \frac{(x-16)^3}{x}$$

eine und nur eine der Gleichung (11) (für $r = 24$) genügt, so folgt, wenn wir des kürzeren Ausdrucks halber den in Abhandlung I, § 18, eingeführten Namen »*Classeninvariante*« von $j(\omega)$ auf jede *rationale Function* von $j(\omega)$ übertragen, durch welche auch $j(\omega)$ rational darstellbar ist:

$f(\omega)^{24}$ ist eine Classeninvariante.

Ist m durch 3 unteilbar, so erhält, nachdem (5), (6) I festgesetzt ist, $f(\omega)^8$ durch die lineare Transformation $(\omega, \omega + 2\lambda)$ noch drei verschiedene Werte, welche wenn A durch 3 nicht teilbar vorausgesetzt wird, dadurch unterschieden werden können, dass

$$(18) \qquad B \equiv 0, 1, 2 \pmod 3;$$

von diesen genügt aber *nur der der ersten Annahme entsprechende* Wert der Bedingung (11).

Es genügt also von den drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - f(\omega)^{24} = 0$$

eine und nur eine der Gleichung (11) (für $r = 8$), und daraus folgt:

Ist m nicht durch 3 teilbar, so ist $f(\omega)^8$ eine Classeninvariante.

Beispiele, wie sie weiter unten folgen, lehren dass in vielen Fällen dieselbe Eigenschaft noch niedrigeren Potenzen von $f(\omega)$ zukommt.[1]

Die Hauptform der Determinante $-m$, $(1, 0, m)$ gehört nur bei ungeradem m in die Unterabteilung I und daher wird nur in diesem Fall $f(\sqrt{-m})^{24}$ oder $f(\sqrt{-m})^8$ Classeninvariante sein. Bei geradem m gehört $(1, 1, m+1)$ oder $(1, 3, m+9)$ zu I und in diesem Fall sind also die Classeninvarianten

$$f(1 + \sqrt{-m})^{24} = -f_1(\sqrt{-m})^{24},$$

oder

$$f(3 + \sqrt{-m})^8 = -f_1(\sqrt{-m})^8.$$

§ 8. *Die Classeninvariante $\gamma_2(\omega)$.*

Aus den soeben bewiesenen Eigenschaften der Zahlen $f(\omega)$ folgt, dass, wenn m nicht durch 3 teilbar ist, auch

$$(1) \qquad \gamma_2(\omega) = \frac{f(\omega)^{24} - 16}{f(\omega)^8}$$

eine Classeninvariante ist, wenn an der Voraussetzung des vorigen Paragraphen, dass $B \equiv 0 \pmod 3$ sei, festgehalten wird. Es lässt sich dies auch auf demselben Wege direct beweisen, da auch zwischen den Functionen

$$(2) \qquad \gamma_2\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), \ \gamma_2(\omega)$$

falls n durch 3 nicht teilbar und c durch 3 teilbar ist, eine Transformationsgleichung besteht.

Dieser directe Weg ist deshalb wichtig, weil er sich auch auf die Classen der zweiten Art anwenden lässt. Genügt nämlich ω einer Gleichung zweiter Art

$$(3) \qquad A\omega^2 + B\omega + C = 0,$$

[1] Es lässt sich ähnlich wie oben zeigen, dass, wenn m nicht durch 8 teilbar ist, $f(\omega)^4$ oder $f(\omega)^{12}$ Classeninvariante ist.

worin B ungerade ist, so wird

$$\gamma_2\left(\frac{c + d\omega}{a}\right) = \gamma_2(\omega) \tag{4}$$

dann und nur dann erfüllt sein, wenn

$$\frac{c + d\omega}{a} = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{5}$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta^2\gamma \equiv 0 \pmod 3. \tag{6}$$

Setzt man also, wie oben

$$\begin{gathered} \alpha = \frac{1}{2}(Bx - y), \qquad \beta = Ax, \\ n\gamma = - Cx + \frac{1}{2}c(Bx - y), \qquad n\delta = cAx - \frac{1}{2}(Bx + y), \\ 4n = mx^2 + y^2, \end{gathered} \tag{7}$$

nimmt A durch 3 unteilbar an und setzt

wenn $m \equiv +1 \pmod 3$, $n = m + 4 \equiv -1 \pmod 3$, $x = 2$, $y = \pm 4$,

wenn $m \equiv -1 \pmod 3$, $n = m \quad \equiv -1 \pmod 3$, $x = 2$, $y = 0$,

so folgt wieder, dass die Bedingung (6) nur unter der Voraussetzung

$$B \equiv 0 \pmod 3$$

befriedigt ist, woraus man wie oben schliesst, dass $\gamma_2(\omega)$ einer ganzzahligen Gleichung genügt, deren Grad h' gleich ist der Anzahl der Formenclassen zweiter Art der Determinante $-m$, da diese Eigenschaft nach Abh. I, § 18, für $\gamma_2(\omega)^3$ feststeht.

Diese Bemerkung führt uns zur Aufstellung von Classengleichungen in einigen interessanten Fällen.

Die Determinanten

$$-11, -19, -43, -67, -163$$

haben die Eigenschaft, dass für jede derselben eine Classe der zweiten und drei Classen der ersten Art existieren, dass also die Classeninvarianten

zweiter Art, $\gamma_2(\omega)$, *rationale ganze* Zahlen sind.[1] Indem wir die beiden ersten -11, -19 einer anderen Betrachtung vorbehalten, suchen wir diese ganzen Zahlen für $m = 43, 67, 163$ zu bestimmen. Wir haben also

$$\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-43}}{2}\right), \quad \gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-67}}{2}\right), \quad \gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-163}}{2}\right)$$

zu berechnen.

Hermite hat in der oben citierten Arbeit »*Sur la théorie des équations modulaires*» dieselbe Betrachtung auf die von ihm mit α bezeichnete Grösse angewandt, welche nach unserer Bezeichnung mit

$$-2^{-8} \cdot \gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-m}}{2}\right)^3$$

übereinstimmt, und aus seinem Resultat für $m = 43$ folgt:

$$-\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-44}}{2}\right) = 960 = 64 \cdot 15. \tag{8}$$

Für die beiden grösseren Zahlen $m = 67$, $m = 163$ lässt sich die Rechnung in einfachster Weise aus der Entwicklung § 2 (3) führen, indem man mit vollständig hinreichender Genauigkeit

$$-\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-m}}{2}\right) = e^{\frac{\pi\sqrt{m}}{3}}$$

setzen und diese Zahl mit siebenstelligen Logarithmen berechnen kann.[2]

Man erhält

$$-\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-67}}{2}\right) = 5280 = 32 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11, \tag{9}$$

$$-\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-163}}{2}\right) = 640320 = 2^6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 667. \tag{10}$$

Die Einfachheit dieser Resultate zeigt sich aber erst, wenn man zu den Functionen $f(\omega)$ übergeht, wobei es keinen wesentlichen Unterschied macht, ob man Formen erster oder zweiter Art zu Grunde legt.

---

[1] Nach der auf Induction gegründeten Vermuthung von Gauss (Disq. Ar. art. 303) sind diese 5 Determinanten die einzigen, welchen diese Eigenschaft zukommt.

[2] Auch für $m = 43$ ergiebt dies Verfahren den Wert $959,98\ldots$ also wie oben 960.

Die cubische Gleichung

$$y^3 - \gamma_2(\omega) y - 16 = 0$$

hat nämlich nach § 1 (11) die Wurzeln

$$f(\omega)^8, \; -f_1(\omega)^8, \; -f_2(\omega)^8.$$

Es ist aber nach § 1, (15), (13)

$$-f_2\left(\frac{-3+\sqrt{-m}}{2}\right)^8 = \frac{16}{f(\sqrt{-m})^8},$$

und wenn daher

$$x = f(\sqrt{-m}) \tag{11}$$

gesetzt wird, so ist x^8 Wurzel der cubischen Gleichung

$$x^{24} + \gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-m}}{2}\right) x^{16} - 2^8 = 0 \tag{12}$$

und zwar die einzige reelle positive Wurzel dieser Gleichung.

Die Gleichung (12) lässt sich aber nun für die Werte (8), (9), (10) von γ_2 in acht rationale Factoren (in Bezug auf x) spalten und man erhält so:

$$\begin{array}{lll} m = 43, & x^3 - 2x - 2 = 0, & \text{Discriminante } -4.43, \\ m = 67, & x^3 - 2x^2 - 2x - 2 = 0,^{1} & \text{Discriminante } -4.67, \\ m = 163, & x^3 - 6x^2 + 4x - 2 = 0, & \text{Discriminante } -4.163. \end{array} \tag{13}$$

Wir wollen die Resultate der beiden letzten Paragraphen noch auf ein anderes Beispiel anwenden, welches ebenfalls eine gewisse allgemeinere Bedeutung hat, auf die Determinante -58. Für diese Determinante existiren zwei Geschlechter quadratischer Formen und in jedem Geschlecht eine Classe. Nach Abhandlung I, § 21 lässt sich also jede Classeninvariante für diese Determinante rational durch $\sqrt{29}$ ausdrücken.[2]

[1] Diese Gleichung lässt sich auch leicht auf algebraischem Wege aus der Modulargleichung für den Transformationsgrad 71 herleiten.

[2] Dass $\sqrt{29}$, nicht $\sqrt{2}$ zu adjungieren ist, zeigt die dortige Formel (17), in welcher $m' = 2$, $m'' = 29$ zu setzen ist. Da in der Teilgleichung i nicht vorkommen kann, so muss zugleich $\sqrt{2}$ heraus fallen.

Nimmt man als Repräsentanten der beiden Classen (1, 0, 58), (2, 0, 29), so kommen diese in den Gruppen II, III (§ 7, 6) vor so dass

$$f_1(\sqrt{-58})^8, \; f_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-58}\right)^8$$

als die beiden Classeninvarianten zu betrachten sind. Es ist daher

$$(14) \qquad \begin{aligned} f_1(\sqrt{-58})^8 &= a + b\sqrt{29}, \\ f_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-58}\right)^8 &= a - b\sqrt{29}, \end{aligned}$$

$$(15) \qquad a^2 - 29b^2 = 16 \qquad (\S\ 1,\ 15)$$

und a, b sind ganze (positive [1]) Zahlen.

Aus (14) folgt aber

$$2a = f_1(\sqrt{-58})^8 + f_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-58}\right)^8$$

wonach der Wert von $2a$ mit hinlänglicher Genauigkeit durch das erste Glied der Entwicklung

$$e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{58}}$$

dargestellt ist. Es ergiebt sich so

$$a = 2 . 727, \qquad b = 2 . 135$$

also

$$f_1(\sqrt{-58})^8 = 2(727 + 135\sqrt{29})$$

[1] Aus der Formel (I, § 7, 2)

$$dk^2 = \pi i \vartheta_{00}^4 k^2 k'^2 d\omega$$

folgt, dass wenn $-i\omega$ reell ist, k^2 mit wachsendem $-i\omega$ abnimmt. Es ist also

$$f_1(\omega)^{24} - f_2(\omega)^{24} = \frac{(1 - 2k^2)(1 - k^2k'^2)}{k^2k'^2}$$

positiv, also $f_1(\omega) > f_2(\omega)$ sobald $-i\omega > 1$ und da $f_1(\omega)^{24} = 2^4k'^4 : k^2$ mit wachsendem $-i\omega$ wächst während $f_2(\omega)^{24} = 2^4k^4 : k'^2$ abnimmt, so ist $f_1(\omega) > f_2\left(\frac{1}{2}\omega\right)$ sobald $-i\omega$ den Wert überschritten hat, für welchen $f_1(\omega) = f_2\left(\frac{1}{2}\omega\right)$ ist, d. h. den Wert $\sqrt{2}$.

woraus sich die vierte Wurzel ziehen lässt:

(16) $$\sqrt{2}f_1(\sqrt{-58})^2 = 5 + \sqrt{29}.$$

§ 9. *Berechnung von Classeninvarianten aus der Transformation erster und zweiter Ordnung.*

Wir benutzen nun die Principien des ersten Abschnitts zur Berechnung von Classeninvarianten, und gehen dabei aus von den Formeln des § 1.

Man erhält zunächst für $m = 1$ und $m = 3$ die beiden Gleichungen

$$\omega = -\frac{1}{\omega}, \qquad \omega = -\frac{1}{\omega + 1}$$

woraus nach (13), (14), (9), (10) § 1 folgt

(1) $$m = 1, \qquad f(i) = \sqrt[4]{2}, \qquad f_1(i) = f_2(i) = \sqrt[8]{2},$$

(2) $$m = 3, \qquad f\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right) = f_1\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)e^{-\frac{\pi i}{24}}$$

$$= f_2\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)e^{\frac{\pi i}{24}} = \sqrt[8]{2},$$

und nach § 1 (15)

(3) $$f(\sqrt{-3}) = \sqrt[3]{2}.$$

Aus der Transformation 2ter Ordnung erhält man die Fälle $m = 2$, $m = 7$:

$$\omega = -\frac{2}{\omega}, \qquad \omega = -\frac{2}{\omega + 1},$$

(4) $$m = 2, \qquad f_1(\sqrt{-2}) = \sqrt[4]{2},$$

(5) $$m = 7, \qquad f(\sqrt{-7}) = \sqrt{2}, \qquad f\left(\frac{3 + \sqrt{-7}}{4}\right) = 1;$$

und durch eine zweimalige Anwendung $m = 15$. Setzt man nämlich

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{-15}}{2}, \qquad \frac{\omega - 1}{2} = -\frac{2}{\omega},$$

(6) $$f(\sqrt{-15})f_2(\omega)e^{-\frac{\pi i}{24}} = \sqrt{2}$$

so folgt

$$f\left(\frac{\omega-1}{2}\right)=f\left(\frac{\omega}{2}\right),\qquad f(\omega)f_1\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi i}{24}},$$

$$f_1\left(\frac{\omega-1}{2}\right)=f_2\left(\frac{\omega}{2}\right),\qquad f_1(\omega)f_2\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{2},$$

$$f_2\left(\frac{\omega-1}{2}\right)=f_1\left(\frac{\omega}{2}\right),\qquad f_2(\omega)f\left(\frac{\omega}{2}\right)=e^{\frac{\pi i}{24}}.$$

Eliminiert man aus letzterem System $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $f_1\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $f_2\left(\frac{\omega}{2}\right)$ mittels § 1, (9), (10), so ergiebt sich

$$f_2^{48}+47f_2^{24}+1=0$$

und daraus nach (6)

$$(7)\qquad m=15;\qquad f(\sqrt{-15})^3=\sqrt{2}(1+\sqrt{5}).$$

Beachtet man, dass von den drei Functionen f^8, f_1^8, f_2^8 nach § 1, (9), (10), zwei durch die dritte mit Hilfe einer quadratischen Gleichung ausgedrückt werden, so lässt sich aus einer bekannten Classeninvariante für die Determinante $-m$ die für die Determinante $-4m$ herleiten, indem man sich, je nachdem m gerade oder ungerade ist, einer der beiden Formeln bedient:

$$(8)\qquad 2f_1(2\omega)^8=f_1(\omega)^4[f_1(\omega)^{12}+\sqrt{f_1(\omega)^{24}+64}],$$

$$(9)\qquad 2f_1(2\omega)^8=f(\omega)^4[f(\omega)^{12}+\sqrt{f(\omega)^{24}-64}].$$

Auf diese Weise findet man aus (1), (4), (5), (7) die folgenden Resultate:

$$(10)\qquad m=4,\qquad f_1(\sqrt{-4})^8=8.$$

$$(11)\qquad m=16,\qquad f_1(\sqrt{-16})^8=8\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^2.$$

$$(12)\qquad m=8,\qquad f_1(\sqrt{-8})^8=8(1+\sqrt{2}).$$

$$(13)\qquad m=32,\qquad f_1(\sqrt{-32})^8=8x,$$

$$x^2-8(1+\sqrt{2})^2x-2(1+\sqrt{2})=0.$$

(14) $m = 12$, $f_1(\sqrt{-12})^4 = 2\sqrt[6]{2}(1 + \sqrt{3})$.

(15) $m = 28$, $f_1(\sqrt{-28})^4 = 2\sqrt{2}(3 + \sqrt{7})$.

(16) $m = 60$, $f_1(\sqrt{-60})^4 = \sqrt{2}\sqrt[8]{2(1 + \sqrt{5})^2}(2 + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$.

§ 10. *Anwendung der Schläfli'schen Modulargleichungen zur Berechnung von Classeninvarianten.*

Die SCHLÄFLI'schen Modulargleichungen lassen sich in verschiedener Weise zur Aufstellung von Classeninvarianten benutzen. Das nächstliegende ist, dass man einen der bereits bekannten Werte von $f(\sqrt{-m})$ oder $f_1(\sqrt{-m})$ für u oder u_1 in diese Gleichungen einsetzt, wodurch man eine Gleichung für $f(\sqrt{-mn^2})$ oder $f_1(\sqrt{-mn^2})$ erhält, die man noch von überflüssigen Factoren, die sich leicht finden lassen, zu befreien hat.

Auf diese Weise ergiebt sich

(1) $m = 9$, $f(\sqrt{-9})^3 = \sqrt[4]{2}(1 + \sqrt{3})$.

(2) $m = 25$, $f(\sqrt{-25}) = \sqrt[4]{2}^3(1 + \sqrt{5})$.

(3) $m = 49$, $\sqrt[4]{2}f(\sqrt{-49}) = x$,

$$x^2 - (1 + \sqrt{7})x + 1 = 0.$$

(4) $m = 18$, $f_1(\sqrt{-18})^3 = \sqrt[4]{2}(2 + \sqrt{6})$.

(5) $m = 50$, $\sqrt[4]{2}^3 f_1(\sqrt{-50}) = x + \frac{2\sqrt{5}}{x^2 - 1}$,

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0. \qquad \text{Discr.} \; -4 \cdot 50.[1]$$

[1] Die Classengleichung ist hier vom 6^{ten} Grade und lässt sich durch Adjunction von $\sqrt{5}$ in zwei cubische Factoren zerlegen, die man aus obiger Formel leicht durch Elimination ableiten kann. Dass hier, wie in mehreren der folgenden Beispiele die Classeninvariante rational dargestellt ist durch $\sqrt{5}$ und die (einzige reelle) Wurzel einer rationalen cubischen Gleichung ist eine Eigentümlichkeit, die mit der ABEL'schen Natur der Classengleichungen zusammenhängt, worauf ich bei einer nächsten Gelegenheit zurückzukommen hoffe. Diese rationalen cubischen Gleichungen entsprechen den GAUSS'schen Perioden-Gleichungen in der Kreisteilung.

(6) $m = 27, \qquad f(\sqrt{-27})^3 = 2x,$

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0. \qquad \text{Discr.} \; -4.27.$$

(7) $m = 75, \qquad \sqrt[3]{2}f(\sqrt{-75}) = x,$

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 4 = 4\sqrt{5}x.$$

(8) $m = 36, \qquad f_1(\sqrt{-36})^3 = \sqrt[8]{8}x,$

$$x^2 - 4x - 2 = 2\sqrt{3}(x + 1).$$

(9) $m = 100, \qquad x = \sqrt[8]{2}f_1(\sqrt{-100}).$

$$x^2 - x - 1 = \sqrt{5}(x + 1).$$

(10) $m = 63, \qquad f(\sqrt{-63})^3 = \sqrt{2}^3 x,$

$$x^4 - 8x^3 + x + 1 = 0.$$

$$\sqrt{7}(x^2 - x + 1) = \sqrt{3}(x^2 + 3x - 1).$$

(11) $m = 175, \qquad f(\sqrt{-175}) = \sqrt{2}x,$

$$x^6 - 4x^5 + x + 1,$$

$$2x^3 - 4x^2 + x - 3 = \sqrt{5}(2x^2 - x + 1).$$

Wenn man sodann in den SCHLÄFLI'schen Modulargleichungen für den n^{ten} Transformationsgrad $\omega = \sqrt{-n}$ setzt, so wird

$$f(\omega) = f\left(\frac{\omega}{n}\right) = f(\sqrt{-n})$$

und man hat $u = v$ und mithin $A = 2$ zu setzen. Auch hier findet man leicht die abzusondernden Factoren.

(12) $m = 5, \qquad f(\sqrt{-5})^4 = 1 + \sqrt{5}.$

(13) $m = 11, \qquad f(\sqrt{-11}) = x,$

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0. \qquad \text{Discr.} \; -4.11.$$

(14) $m = 13, \qquad f(\sqrt{-13})^4 = 3 + \sqrt{13}.$

(15) $$m = 17, \qquad f(\sqrt{-17})^2 = \sqrt{2}x,$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

(16) $$m = 19, \qquad f(\sqrt{-19}) = x,$$

$$x^3 - 2x - 2 = 0. \qquad \text{Discr.} \; -4.19.$$

Ein drittes Verfahren, die SCHLÄFLI'schen Gleichungen unserer Aufgabe nutzbar zu machen, ist das folgende:

Setzen wir in der zum Transformationsgrad n gehörigen Modulargleichung für ω die Wurzel der quadratischen Gleichung

(17) $$2\omega^2 + 2r\omega + n = 0,$$

worin r eine ganze Zahl bedeutet, also

(18) $$2\omega + 2r = -\frac{n}{\omega},$$

$$\omega = \frac{-r + \sqrt{-m}}{2},$$

(19) $$m = 2n - r^2,$$

so ist (nach § 1, 15)

(20) $$f_2(\omega)f_1(2\omega + 2r) = e^{-\frac{r\pi i}{12}}\sqrt{2},$$

also nach (18)

(21) $$f_2(\omega)f_2\left(\frac{\omega}{n}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{r\pi i}{12}}.$$

(22) $$f_2(\omega) = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{r\pi i}{24}}}{f(\sqrt{-m})}, \quad r \text{ ungerade},$$

$$= \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{r\pi i}{24}}}{f_1(\sqrt{-m})}, \quad r \text{ gerade}.$$

Demnach hat man in dem zweiten System § 4 zu setzen

$$(23)\qquad u_1 v_1 = \sqrt{2}\, e^{-\frac{r\pi i}{12}},$$

$$(24)\qquad u_1 = \frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{r\pi i}{24}}}{x}, \qquad v_1 = e^{-\frac{r\pi i}{24}} x,$$

$$x = f(\sqrt{-m}),\ f_1(\sqrt{-m})$$

je nachdem r und damit zugleich m ungerade oder gerade ist.

Nach (19) ergeben sich für m folgende Werte

$n = 3,$	$m = 6, 5, 2,$
$n = 5,$	$m = 10, 9, 6, 1,$
$n = 7,$	$m = 14, 13, 10, 5,$
$n = 11,$	$m = 22, 21, 18, 13, 6,$
$n = 13,$	$m = 26, 25, 22, 17, 10, 1,$
$n = 17,$	$m = 34, 33, 30, 25, 18, 9,$
$n = 19,$	$m = 38, 37, 34, 29, 22, 13, 2.$

Wir leiten aus dieser Quelle nur die Formeln für die in dem Obigen noch nicht enthaltenen Fälle her, wobei die schon bekannten oder mehrfach auftretenden Werte zur Erleichterung der Auffindung der Factoren dienen.

$$(25)\qquad m = 6, \qquad f_1(\sqrt{-6})^6 = 4 + 2\sqrt{2},$$

$$(26)\qquad m = 10, \qquad \sqrt{2}\, f_1(\sqrt{-10})^2 = 1 + \sqrt{5}.$$

$$(27)\qquad m = 14, \qquad f_1(\sqrt{-14})^2 = \sqrt{2}\, x,$$

$$x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{2}.$$

$$(28)\qquad m = 21, \qquad 2 f(\sqrt{-21})^{12} = (\sqrt{3} + \sqrt{7})^3 (3 + \sqrt{7})^2.$$

$$(29)\qquad m = 22, \qquad f_1(\sqrt{-22})^2 = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}).$$

(30) $m = 26,\qquad f_1(\sqrt{-26})^2 = x + \frac{2\sqrt{13}}{x^2 - 3},$

$$x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0. \qquad \text{Discr.} - 16.26.$$

(31) $m = 30,\qquad f_1(\sqrt{-30})^6 = 2\sqrt{2}(3 + \sqrt{10})(2 + \sqrt{5}).$

(32) $m = 33,\qquad \sqrt{2}f(\sqrt{-33})^6 = (3 + \sqrt{11})(1 + \sqrt{3})^3.$

(33) $m = 34,\qquad f_1(\sqrt{-34})^2 = \sqrt{2}x,$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}.$$

(34) $m = 29,\qquad f(\sqrt{-29})^4 = 2x,$

$$2x^3 - 9x^2 - 8x - 5 = \sqrt{29}(x + 1)^2.$$

(35) $m = 37,\qquad f(\sqrt{-37})^4 = 12 + 2\sqrt{37}.$

(36) $m = 38,\qquad f_1(\sqrt{-38})^4 = \sqrt{2}x,$

$$(x^3 - 8x^2 + 16x - 8) = \sqrt{2}(8x^2 - 8x + 6).$$

Die gefundenen Resultate lassen sich wieder mit der Transformation zweiter Ordnung verbinden, und man erhält so z. B. noch aus (12), (14), (25)

(37) $m = 20,\qquad f_1(\sqrt{-20})^4 = 2\sqrt{2}x,$

$$x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(2x + 1).$$

(38) $m = 52,\qquad f_1(\sqrt{-52})^4 = 2\sqrt{2}x,$

$$x^2 - 2(4 + \sqrt{13})x - \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 0.$$

(39) $m = 24,\qquad f_1(\sqrt{-24})^{24} = 2^9(1 + \sqrt{2})^2(2 + \sqrt{3})^3(\sqrt{2} + \sqrt{3})^4.$

Endlich lassen sich auch noch zwei der SCHLÄFLI'schen Modulargleichungen mit einander combinieren und durch Elimination neue Resultate herleiten. Wir geben zwei verschiedene Beispiele der Combination

der Modulargleichungen für den 5^{ten} und den 11^{ten} Transformationsgrad mit sich selbst, wodurch wir die Classeninvarianten für die Determinanten -41, -105 erhalten, von denen die erste zwei Geschlechter mit je vier Classen, die zweite acht Geschlechter mit je einer Classe hat, und welche beide als erste ihrer Art von Interesse sind.

Nehmen wir zunächst

$$(40) \qquad 10\omega^2 + 6\omega + 5 = 0, \qquad 10\omega = -3 + \sqrt{-41},$$

$$f_2\left(\frac{\omega}{5}\right) = f_1[2(5\omega+3)] = e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{\sqrt{2}}{f_2(5\omega)},$$

$$f_2\left(\frac{\omega}{5}\right) = f_1(10\omega+6) = e^{-\frac{\pi i}{8}} f(\sqrt{-41}), \qquad f_2(5\omega) = e^{-\frac{\pi i}{8}} \frac{\sqrt{2}}{f(\sqrt{-41})}.$$

Hiernach ergeben sich aus der Modulargleichung für den 5^{ten} Grad (§ 4, II) zwei Gleichungen, die sich mit Benutzung der Bezeichnung

$$f(\sqrt{-41}) = f(\omega) e^{\frac{5\pi i}{8}} \eta, \qquad f(\sqrt{-41}) f(\omega) e^{\frac{5\pi i}{8}} = \sqrt{2}\xi,$$

so schreiben lassen:

$$\xi^3 + \frac{1}{\xi^3} + 2\left(\eta^2 - \frac{1}{\eta^2}\right) = 0,$$

$$\eta^3 + \frac{1}{\eta^3} + 2\left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2}\right) = 0.$$

Durch Addition und Subtraction erhält man hieraus zwei Gleichungen, welche nach Beseitigung des Factors $\xi - \eta$ (der zu den Determinanten -1, -25 gehört) nur noch von $\xi + \eta$ und $\xi\eta$ abhängen.

Die Elimination von $\xi + \eta$ liefert, wenn wir

$$\sqrt{2}\xi\eta = \sqrt{2}x = f(\sqrt{-41})^2, \qquad x + \frac{1}{x} = z$$

setzen, die Gleichung

$$0 = z^6 - 9z^5 + 20z^4 + 6z^3 - 19z^2 - 17z - 6$$

$$= (z^2 - 4z - 3)(z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 3z + 2).$$

Der erste Factor, der als zur Determinante -49 gehörig, von vorn herein bekannt ist, wird abgeworfen, und der zweite liefert die gesuchte Glei-

chung, welche in Bezug auf x vom 8^{ten} Grade ist, und sich durch Adjunction von $\sqrt{41}$ zerlegen lässt. Man erhält so

$$(41) \qquad m = 41, \qquad 2z^2 - 5z + 7 = \sqrt{41}(z - 1).$$

Es genüge zweitens ω der Gleichung

$$(42) \qquad 11\omega^2 + 8\omega + 11 = 0,$$

also

$$11\omega + 8 = -\frac{11}{\omega}, \qquad 11\omega = -4 + \sqrt{-105}.$$

Demnach, wenn

$$f(\sqrt{-105}) = x$$

gesetzt wird

$$f(11\omega) = e^{\frac{\pi i}{6}}x, \qquad f\left(\frac{\omega}{11}\right) = e^{-\frac{\pi i}{6}}x,$$

und diese beiden Grössen sind, wenn $u = f(\omega)$ ist, Wurzeln der Modulargleichung für den 11^{ten} Transformationsgrad. (§ 4, I.)

Setzt man $ux = \xi$, $x:u = \eta$ so folgt

$$A = -\left(\eta^6 + \frac{1}{\eta^6}\right), \qquad B = e^{\pm\frac{\pi i}{6}}\xi - \frac{2e^{\mp\frac{\pi i}{6}}}{\xi},$$

so dass man durch Benutzung beider Zeichen für ξ, η zwei Gleichungen erhält. Durch Elimination von A und Fortheben des Factors

$$\xi + \frac{2}{\xi}$$

findet sich

$$\xi^4 + \frac{16}{\xi^4} - 24\left(\xi^2 + \frac{4}{\xi^2}\right) + 92 = 0,$$

woraus

$$\xi^2 = (2 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{5}) = \frac{(1 + \sqrt{3})^2(1 + \sqrt{5})^2}{4}.$$

Für η findet man sodann

$$\eta^6 + \frac{1}{\eta^6} = 660 + 168\sqrt{15},$$

woraus leicht folgt:

(43) $m = 105, \quad 64\sqrt{2}f(\sqrt{-105})^6 = (1+\sqrt{3})^3(1+\sqrt{5})^3(\sqrt{3}+\sqrt{7})^3(\sqrt{5}+\sqrt{7})$.

Die Richtigkeit der Vorzeichen ergiebt sich durch die Vergleichung der numerischen Werte.

§ 11. *Anwendung der irrationalen Modulargleichungen zur Berechnung von Classeninvarianten.*

Genau in derselben Weise lassen sich die in § 5, § 6 abgeleiteten irrationalen Formen der Modulargleichungen anwenden und führen zum Teil in ausserordentlich einfacher Weise zum Ziele. Wenn wir zunächst in den Formeln (4) § 5 $\omega = \sqrt{-n}$ setzen, so wird

$$2A = f(\omega)^2 + (-1)^{\frac{n+1}{8}} \frac{2\sqrt{2}}{f(\omega)}, \qquad B = 2\sqrt{2}f(\omega) + (-1)^{\frac{n+1}{8}} \frac{2}{f(\omega)^2}$$

oder für

$$f(\omega) = \sqrt{2}x,$$

$$A = \frac{x^3 + (-1)^{\frac{n+1}{8}}}{x}, \qquad B = \frac{4x^3 + (-1)^{\frac{n+1}{8}}}{x^2},$$

und dies ist in die Formeln (6) § 5 einzusetzen. Für $n = 31$ erhält man zunächst eine Gleichung 3^{ten} Grades in x^3, aus der sich durch Factorenzerfällung eine einfachere für x selbst herleiten lässt. Bei $n = 47$, $n = 71$ hat man bezügl. die Factoren x, $(x+1)^2$ abzusondern und findet so:

(1) $n = 23, \quad f(\sqrt{-23}) = \sqrt{2}x, \quad x^3 - x - 1 = 0.$

(2) $n = 31, \quad f(\sqrt{-31}) = \sqrt{2}x, \quad x^3 - x^2 - 1 = 0.$

(3) $n = 47, \quad f(\sqrt{-47}) = \sqrt{2}x, \quad x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0.$

(4) $n = 71, \quad f(\sqrt{-71}) = \sqrt{2}x, \quad x^7 - 2x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0.$

Ebenso lässt sich auch das dritte Verfahren des vorigen Paragraphen hier anwenden, indem man von den Formeln (17), (18), (19) Gebrauch macht. Man erhält aber dann nicht unmittelbar Gleichungen für eine

der Functionen f selbst, sondern Relationen zwischen mehreren derselben, aus denen die einfachen Gleichungen erst durch Elimination herzustellen sind. Aus der für $n = 23$ gültigen Modulargleichung erhält man so z. B., wenn ω der Gleichung genügt:

$$2\omega^2 + 2r\omega + 23 = 0,$$

$$f(\omega)f(2\omega + 2r) - f_1(\omega)f_2(2\omega + 2r) = 2 + \sqrt{2}e^{-\frac{r\pi i}{12}},$$

und die Rechnung für $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$ ergiebt

(5) $\quad m = 42, \qquad 2\sqrt{2}f_1(\sqrt{-42})^6 = (2\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{7})^3.$

(6) $\quad m = 45, \qquad f(\sqrt{-45})^{12} = 8(2 + \sqrt{5})^3(4 + \sqrt{15})^2.$

(7) $\quad m = 46, \qquad f_1(\sqrt{-46})^2 = \sqrt{2}x,$

$$x + \frac{1}{x} = 3 + \sqrt{2}.$$

In ähnlicher Weise findet man aus der Modulargleichung für $n = 19$ (§ 5, 10) eine einfachere Form der Darstellung für $m = 38$. Setzt man

$$4x = f(\sqrt{-38})^2 f\left(\sqrt{\frac{-19}{2}}\right)^2 - f_2(\sqrt{-38})^2 f_1\left(\sqrt{\frac{-19}{2}}\right)^2 - 2$$

so ergiebt sich

$$A = x, \qquad B = 8x + 6$$

und, nach Absonderung des Factors $x^2 + x + 3$:

(8) $\quad x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0, \qquad \text{Discr.} \; -4 \cdot 38,$

während $f_1(\sqrt{-38})^2$ sich so durch x ausdrücken lässt:

(9) $\quad \sqrt{2}f_1(\sqrt{-38})^2 = x + 1 - \sqrt{2}\frac{x-3}{x-2}.$[1]

Es sollen endlich noch für $m = 35, 39, 55$ die Modulargleichungen (17), (21), § 6, verwendet werden. Setzen wir

$$x = f(\sqrt{-35}), \qquad x' = f\left(\sqrt{\frac{-7}{5}}\right), \qquad xx' = y, \qquad \frac{x^2 + x'^2}{xx'} = z,$$

[1] Man vgl. die Anmerkung zu § 10 (5).

so ergiebt sich aus (17), (21)

$$(10) \qquad y^3 - 2y^2 - 4 = 0. \qquad \text{Discr.} - 16.35.$$

$$(11) \qquad z^3 + z^2 - 5z - 7 = 0. \qquad \text{Discr.} - 4.35.$$

Die zweite dieser Gleichungen geht in die erste über durch die Substitution

$$(12) \qquad y = z^2 - 3,$$

wodurch, da die Gleichungen beide nur eine reelle Wurzel haben, y rational durch z ausgedrückt ist.

Ebenso ist

$$(13) \qquad 2(z + 1) = y^2,$$

wonach man nach Adjunction von $\sqrt{5}$ auch x rational durch y ausdrücken kann:

$$4f(\sqrt{-35}) = y^2 + \frac{4\sqrt{5}}{y+2}.$$ [1]

Für $m = 39$ ergiebt die Gleichung (21) § 6, wenn

$$x = f(\sqrt{-39}), \qquad x' = f\left(\sqrt{\frac{-3}{13}}\right), \qquad \frac{x^2 + x'^2}{xx'} = z, \qquad x^3x'^3 = y$$

gesetzt wird, nach Abwerfung des Factors $z + 2$

$$(15) \qquad z^2 - z - 3 = 0, \qquad z = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Die Gleichung für xx' erhält man aus der Transformation 3^{ter} Ordnung: (§ 4, I, mit Benutzung von 15)

$$\frac{x^{12} + x'^{12}}{x^6x'^6} + \frac{8}{y} - y = 0,$$

woraus

$$y = 4(3 + \sqrt{13}).$$

---

[1] Aus dem 71^{ten} Transformationsgrad erhält man direct für $x = f(\sqrt{-35})$ die Gleichung $x^3 - 2 = (1 + \sqrt{5})(x^2 - x)$.

Setzt man schliesslich

(16) $$f(\sqrt{-39})^3 = \sqrt{2}^3 x$$

so ergiebt sich für x die quadratische Gleichung:

(17) $$x^2 - \frac{3+\sqrt{13}}{2}(x+1) = 0.$$

Für $m = 55$ setzen wir

$$f(\sqrt{-55}) f\left(\sqrt{\frac{-11}{5}}\right) = z$$

und erhalten aus (17), § 6

$$A = \frac{z^3 - 4}{2z}, \qquad B = \frac{4(z^3-4)}{z^2},$$

$$0 = z^9 - 8z^7 - 12z^6 - 4z^5 + 32z^4 + 80z^3 + 16z^2 - 96z - 64$$
$$= (z^2 - 2z - 4)(z^2 - 2)^2(z^3 + 2z^2 + 4z + 4).$$

Der letzte Factor (der zur Determinante -11 gehört) hat hier keine positive Wurzel, und da z^2 nicht $= 2$ ist, so muss

$$z^2 - 2z - 4 = 0, \qquad z = 1 + \sqrt{5}$$

sein. Setzt man

(18) $$\sqrt{2}x = f(\sqrt{-55}), \qquad \sqrt{2}x' = f\left(\sqrt{\frac{-11}{5}}\right)$$

so liefert noch die Transformation fünfter Ordnung

$$x^6 + x'^6 = \frac{43 + 19\sqrt{5}}{2}$$

und daraus

$$x^2 + x'^2 = 2 + \sqrt{5}, \qquad x - x' = 1,$$

also

(19) $$x^2 - x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

§ 12. *Die Multiplicatorgleichungen.*

In der Abhandlung I, § 15, sind aus dem Teilungsproblem der elliptischen Functionen zwei Arten von Transformationsgleichungen abgeleitet, die sich dadurch unterscheiden, dass die Wurzeln der einen aus geraden, die der anderen aus ungeraden elliptischen Functionen der Periodenteile zusammengesetzt sind. Die ersten heissen *Modulargleichungen,* die anderen *Multiplicatorgleichungen.*

Die letzteren gestatten eine wesentliche Vereinfachung im Falle eines quadratischen Transformationsgrades.[1] Diese Multiplicatorgleichungen, welche in umfassender Weise von Kiepert studiert sind,[2] zeigen in ihren Zahlencoëfficienten nicht die Einfachheit wie die Schläfli'schen oder die irrationalen Modulargleichungen, so dass diese für die practischen Rechnungen, die sich auf die complexe Multiplication beziehen, geeigneter sind. Nur in dem Fall eines quadratischen Transformationsgrades ist in Vergleich zur Höhe des Transformationsgrades die Einfachheit der Multiplicatorgleichung eine genügende um mit Vorteil hier verwandt zu werden. Ich gehe hier um so lieber auf das Beispiel des 25^{ten} Transformationsgrades ein, weil dasselbe eine unmittelbare Anwendung der allgemeinen Methode liefert, durch welche ich im § 21 der Abhandlung I die Zerfällung der Classengleichungen in Factoren nachgewiesen habe.

Nach § 16 der Abhandlung I sind die ν Grössen

$$(1)\qquad \left(\frac{c}{e}\right) i^{\frac{a-1}{2}} \sqrt{d}\, \frac{\eta\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)}{\eta(\omega)} = t,$$

falls $ad = n$ eine durch 2 und 3 nicht teilbare Quadratzahl, $c \equiv 0 \pmod{24}$ und e der grösste gemeinschaftliche Teiler von a, d ist, die Wurzeln

[1] Diese Vereinfachung der Multiplicatorgleichung im Falle eines quadratischen Transformationsgrades hat zuerst Joubert nachgewiesen: *Sur les équations, qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques*, Paris 1876.

[2] Besonders in der Abhandlung *Über die Transformation der elliptischen Functionen*, Mathematische Annalen, Bd. 26.

einer Gleichung ν^{ten} Grades, welche rational von $j(\omega)$ abhängt. Ist $n = 25$ so lässt sich dieser Gleichung die folgende einfache Form geben [1]

$$j(\omega) = \frac{(\chi^2 + 10\chi + 5)^3}{\chi}, \tag{2}$$

wenn zur Abkürzung

$$\chi = t^5 + 5t^4 + 15t^3 + 25t^2 + 25 \tag{3}$$

$$= t^3\left\{\left(t + \frac{5}{t}\right)^2 + 5\left(t + \frac{5}{t}\right) + 5\right\}$$

gesetzt wird.

Es sei nun r eine ungerade Zahl und ω Wurzel der quadratischen Gleichung (zweiter Art)

$$\omega^2 + r\omega + 25 = 0, \tag{4}$$

$$\omega = \frac{-r + \sqrt{-m}}{2}, \qquad m = 100 - r^2, \tag{5}$$

so ist, wenn c aus der Congruenz

$$c \equiv r \pmod{25}, \qquad c - r \equiv -25r \pmod{24} \tag{6}$$

bestimmt wird,

$$\frac{c + \omega}{25} = \frac{c - r}{25} - \frac{1}{\omega} \tag{7}$$

und es wird daher für den Wert (5) von ω eine Wurzel der Gleichung (2)

$$t = \frac{\eta\left(\dfrac{c - r}{25} - \dfrac{1}{\omega}\right)}{\eta(\omega)} = e^{-\frac{\pi i}{12}r}\sqrt{-i\omega} \tag{8}$$

worin die $\sqrt{-i\omega}$ mit positivem reellen Teil zu nehmen ist. (Abh. I, § 5.)

---

[1] Vgl. I. Gierster, *Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad,* Math. Annalen, Bd. 14 und Kiepert l. c.

Wir betrachten die Werte $r = 1, 3, 7$ und erhalten

$$r = 1, \qquad m = 99, \qquad t = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi i}{8}} (3 + i\sqrt{11}),$$

$$r = 3, \qquad m = 91, \qquad t = \frac{1}{2} (\sqrt{13} - i\sqrt{7}),$$

$$r = 7, \qquad m = 51, \qquad t = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi i}{8}} (\sqrt{17} - i\sqrt{3})$$

und hiernach lässt sich aus (2) $j(\omega)$ berechnen, welches für $r = 3$ ein Cubus wird.

Auf diese Weise berechnet man ziemlich einfach die folgenden Zahlen

$$\gamma_2\left(\frac{-3 + \sqrt{-91}}{2}\right) = -48(227 + 63\sqrt{13}),$$

$$(9) \qquad j\left(\frac{-7 + \sqrt{-51}}{2}\right) = -2^{14}.27(6263 + 1519\sqrt{17}),$$

$$j\left(\frac{-1 + \sqrt{-99}}{2}\right) = -2^{12}(4591804316 + 799330532\sqrt{33}).$$

Von diesen Werten gelangt man zu den viel einfacheren Gleichungen für die Grössen $f(\sqrt{-m})$ in derselben Weise wie in § 8.

Es ist nämlich nach § 1

$$f_2\left(\frac{-r + \sqrt{-m}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{r\pi i}{24}}}{f(\sqrt{-m})},$$

$$\gamma_2\left(\frac{-r + \sqrt{-m}}{2}\right) e^{-\frac{r\pi i}{3}} = \frac{f(\sqrt{-m})^{24} - 16^2}{f(\sqrt{-m})^{16}}.$$

Setzt man also für $r = 3$

$$f(\sqrt{-m}) = x$$

so ergiebt sich für x die Gleichung

$$(10) \qquad x^{24} + \gamma_2(\omega) x^{16} - 16^2 = 0;$$

und wenn man für $r = 7, 1$

$$f(\sqrt{-m})^3 = 2x$$

setzt, so folgt für diese beiden Fälle:

$$(11) \qquad x^{24} - [3 - 2^{-8}j(\omega)]x^{16} + 3x^8 - 1 = 0$$

und in (10) und (11) hat man für $\gamma_2(\omega)$ und $j(\omega)$ die Werte (9) einzusetzen. Jede dieser Gleichungen lässt sich aber successive in zwei in Bezug auf x^4, x^2, x rationale cubische Gleichungen zerfällen wie man leicht findet und noch leichter nachträglich verificiert. Man erhält so die Classengleichungen:

$$m = 51, \qquad f(\sqrt{-51})^3 = 2x,$$
$$x^3 - (4 + \sqrt{17})x^2 - x - 1 = 0.$$

$$m = 91, \qquad f(\sqrt{-91}) = x,$$
$$x^3 - 2x^2 - (1 + \sqrt{13})x - 2 = 0.$$

$$m = 99, \qquad f(\sqrt{-99})^3 = 2x,$$
$$x^3 - (13 + 2\sqrt{33})x^2 - (4 + \sqrt{33})x - 1 = 0.$$

§ 12. *Zusammenstellung.*

Zur bequemeren Übersicht sollen hier noch einmal die die complexe Multiplication betreffenden Resultate zusammengestellt werden, und zwar geordnet nach der von GAUSS gegebenen Einteilung (Disq. ar. art. 303; vgl. auch die in Bd. 2 von GAUSS Werken aus dem Nachlass herausgegebene Tafel der Classenzahlen), so dass die römische Ziffer die Anzahl der Genera, die arabische Ziffer die Anzahl der in einem Genus enthaltenen Classen quadratischer Formen von der Determinante $-m$ angiebt. Die Fälle $m = 40, 48, 72, 88, 112, 232$, die nach den Formeln (8), (9), § 9, aus den Fällen $m = 10, 12, 18, 22, 28, 58$ leicht zu berechnen sind, welchen die Classification IV, 1 zukommt, sind hier noch beigefügt. Es ist bemerkenswert, dass die Fälle I, 1; I, 3; II, 1 erschöpft sind, wenigstens wenn die von GAUSS (Disq. ar. l. c.) auf eine weitgehende Induction gegründete Vermuthung richtig ist.[1]

[1] Vgl. auch JOUBERT, Comptes rendus, t. 50, 1860.

$$\text{I, 1.}\qquad \begin{aligned} f(\sqrt{-1}) &= \sqrt[4]{2},\\ f_1(\sqrt{-2}) &= \sqrt[4]{2},\\ f(\sqrt{-3}) &= \sqrt[3]{2},\\ f_1(\sqrt{-4}) &= \sqrt[8]{8},\\ f(\sqrt{-7}) &= \sqrt{2}.\end{aligned}$$

$$\text{I, 3.}\qquad \begin{aligned} f(\sqrt{-11}) &= x, & x^3 - 2x^2 + 2x - 2 &= 0,\\ f(\sqrt{-19}) &= x, & x^3 - 2x - 2 &= 0,\\ f(\sqrt{-23}) &= \sqrt{2}x, & x^3 - x - 1 &= 0,\\ f(\sqrt{-27})^3 &= 2x, & x^3 - 3x^2 - 3x - 1 &= 0,\\ f(\sqrt{-31}) &= \sqrt{2}x, & x^3 - x^2 - 1 &= 0,\\ f(\sqrt{-43}) &= x, & x^3 - 2x - 2 &= 0,\\ f(\sqrt{-67}) &= x, & x^3 - 2x^2 - 2x - 2 &= 0,\\ f(\sqrt{-163}) &= x, & x^3 - 6x^2 + 4x - 2 &= 0.\end{aligned}$$

$$\text{I, 5.}\qquad f(\sqrt{-47}) = \sqrt{2}x, \qquad x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0.$$

$$\text{I, 7.}\qquad f(\sqrt{-71}) = \sqrt{2}x, \qquad x^7 - 2x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0.$$

$$\text{II, 1.}\qquad \begin{aligned} f(\sqrt{-5})^4 &= 1 + \sqrt{5},\\ f_1(\sqrt{-6})^6 &= 4 + 2\sqrt{2},\\ f_1(\sqrt{-8})^8 &= 8(1 + \sqrt{2}),\\ f(\sqrt{-9})^3 &= \sqrt[4]{2}(1 + \sqrt{3}),\\ \sqrt{2}f_1(\sqrt{-10})^2 &= 1 + \sqrt{5},\\ f_1(\sqrt{-12})^4 &= 2\sqrt[6]{2}(1 + \sqrt{3}),\\ f(\sqrt{-13})^4 &= 3 + \sqrt{13},\\ f(\sqrt{-15})^3 &= \sqrt{2}(1 + \sqrt{5}),\\ f_1(\sqrt{-16})^4 &= 2\sqrt[4]{8}(1 + \sqrt{2}),\end{aligned}$$

$$f_1(\sqrt{-18})^3 = \sqrt[4]{2}(2+\sqrt{6}),$$
$$f_1(\sqrt{-22})^2 = \sqrt{2}(1+\sqrt{2}),$$
$$\sqrt[4]{8}f(\sqrt{-25}) = (1+\sqrt{5}),$$
$$f_1(\sqrt{-28})^4 = 2\sqrt{2}(3+\sqrt{7}),$$
$$f(\sqrt{-37})^4 = 2(6+\sqrt{37}),$$
$$\sqrt{2}f_1(\sqrt{-58})^2 = 5+\sqrt{29}.$$

II, 2.

$$f_1(\sqrt{-14})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x+\frac{1}{x} = 1+\sqrt{2},$$
$$f(\sqrt{-17})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x+\frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{17}}{2},$$
$$f_1(\sqrt{-20})^4 = 2\sqrt{2}x, \qquad x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(2x+1),$$
$$f_1(\sqrt{-32})^8 = 8x, \qquad x^2 - 8(1+\sqrt{2})^2x - 2(1+\sqrt{2}) = 0,$$
$$f_1(\sqrt{-34})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x+\frac{1}{x} = \frac{3+\sqrt{17}}{2},$$
$$f_1(\sqrt{-36})^3 = \sqrt[8]{8}x, \qquad x^2 - 4x - 2 = 2\sqrt{3}(x+1),$$
$$f(\sqrt{-39})^3 = \sqrt{8}x, \qquad x^2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}(x+1),$$
$$f_1(\sqrt{-46})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x+\frac{1}{x} = 3+\sqrt{2},$$
$$f(\sqrt{-49})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x+\frac{1}{x} = 2+\sqrt{7}$$

oder

$$\sqrt[4]{2}f(\sqrt{-49}) = x, \qquad x+\frac{2}{x} = 1+\sqrt{7},$$
$$f_1(\sqrt{-52})^4 = 2\sqrt{2}x, \qquad x^2 - 2(4+\sqrt{13})x - \frac{3+\sqrt{13}}{2} = 0,$$
$$f(\sqrt{-55}) = \sqrt{2}x, \qquad x^2 - x = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$
$$f(\sqrt{-63})^8 = \sqrt{8}x, \qquad \sqrt{7}(x^2-x+1) = \sqrt{3}(x^2+3x-1),$$
$$\sqrt[8]{2}f_1(\sqrt{-100}) = x, \qquad x^2 - x - 1 = \sqrt{5}(x+1).$$

II, 3. $\sqrt{2}f_1(\sqrt{-26})^2 = x + \frac{2\sqrt{13}}{x^2-3}, \quad x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0,$

oder

$$f_1(\sqrt{-26})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x^3 - x^2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}(x+1),$$

$$f(\sqrt{-29})^4 = 2x, \qquad 2x^3 - 9x^2 - 8x - 5 = \sqrt{29}(x+1)^2,$$

$$4f(\sqrt{-35}) = x^2 + \frac{4\sqrt{5}}{x+2}, \qquad x^3 - 2x^2 - 4 = 0,$$

oder

$$f(\sqrt{-35}) = x, \qquad x^3 - 2 = (1+\sqrt{5})(x^2 - x),$$

$$f_1(\sqrt{-38})^4 = \sqrt{2}x, \qquad x^3 - 8x^2 + 16x - 8 = \sqrt{2}(8x^2 - 8x + 6),$$

oder

$$\sqrt{2}f_1(\sqrt{-38})^2 = x + 1 - \sqrt{2}\frac{x-3}{x-2}, \qquad x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0,$$

$$\sqrt[4]{8}f_1(\sqrt{-50}) = x + \frac{2\sqrt{5}}{x^2-1}, \qquad x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0,$$

oder

$$f_1(\sqrt{-50}) = \sqrt[4]{2}x, \qquad x^3 - x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(x+1),$$

$$f(\sqrt{-51})^3 = 2x, \qquad x^3 - 4x^2 - x - 1 = \sqrt{17}x^2,$$

$$\sqrt[8]{2}f(\sqrt{-75}) = x, \qquad x^3 - 2x^2 - 2x - 4 = 4\sqrt{5}x,$$

$$f(\sqrt{-91}) = x, \qquad x^3 - 2x^2 - x - 2 = \sqrt{13}x,$$

$$f(\sqrt{-99})^3 = 2x, \qquad x^3 - 13x^2 - 4x - 1 = \sqrt{33}(2x^2 + x),$$

$$f(\sqrt{-175}) = \sqrt{2}x, \qquad 2x^3 - 4x^2 + x - 3 = \sqrt{5}(2x^2 - x + 1).$$

II, 4. $f(\sqrt{-41})^2 = \sqrt{2}x, \qquad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{5+\sqrt{41}}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{7+\sqrt{41}}{2} = 0.$

IV, 1. $2f(\sqrt{-21})^{12} = (\sqrt{3} + \sqrt{7})^3(3 + \sqrt{7})^2,$

$$f_1(\sqrt{-24})^{24} = 2^9(1+\sqrt{2})^2(2+\sqrt{3})^3(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3,$$

$$f_1(\sqrt{-30})^6 = 2\sqrt{2}(3 + \sqrt{10})(2 + \sqrt{5}),$$

$$\sqrt{2}f(\sqrt{-33})^6 = (3 + \sqrt{11})(1 + \sqrt{3})^3,$$

$$f_1(\sqrt{-40})^8 = \sqrt{2}(1 + \sqrt{5})^2(1 + \sqrt{2})^2(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}),$$

$$2\sqrt{2}f_1(\sqrt{-42})^6 = (2\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{7})^3,$$

$$f(\sqrt{-45})^{12} = 2(2 + \sqrt{5})^3(\sqrt{3} + \sqrt{5})^4,$$

$$f_1(\sqrt{-48})^8 = 8\sqrt[6]{2}(1 + \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2(1 + \sqrt{2})^2,$$

$$f_1(\sqrt{-60})^{12} = 4\sqrt{2}(1 + \sqrt{5})^2(2 + \sqrt{3})^3(\sqrt{3} + \sqrt{5})^3,$$

$$f_1(\sqrt{-72})^{24} = 128(2 + \sqrt{6})^4(1 + \sqrt{2})^9(2 + \sqrt{3})^6.$$

IV, 1. $$f_1(\sqrt{-88})^8 = 4(1 + \sqrt{2})^2(3 + \sqrt{11})^2(7\sqrt{2} + 3\sqrt{11}),$$

$$f_1(\sqrt{-112})^8 = 8\sqrt{2}(3 + \sqrt{7})(1 + \sqrt{2})^4(2\sqrt{2} + \sqrt{7})^2,$$

$$f_1(\sqrt{-232})^8 = 2(5 + \sqrt{29})^2(1 + \sqrt{2})^6(99 + 13\sqrt{58}).$$

VIII, 1. $$\sqrt{2}^{13}f(\sqrt{-105})^6 = (1 + \sqrt{3})^3(1 + \sqrt{5})^3(\sqrt{3} + \sqrt{7})^3(\sqrt{5} + \sqrt{7}).$$

Marburg in April 1888.

Berichtigungen.

Das Theorem 2.) Seite 339 muss als unrichtig wegfallen. Auf die Resultate ist dieser Irrtum ohne Einfluss. Aus der Tafel (16) Seite 342 schliesst man, allein auf das Theorem 1.) § 1 gestützt, dass die Grössen $v:u^n$, oder wenn n durch 3 teilbar ist, deren Cuben, Wurzeln einer Transformationsgleichung sind, deren Coëfficienten rational aus u^{24} abhängen. Die Schlüsse auf Seite 347 werden nur in soweit berührt, als $r_1 = 1$

und r und s daher so bestimmt werden müssen, dass $(n-1)r$, $(n+1)s$ durch 12 teilbar sind, wie es auf Seite 348 ff. wirklich geschehen ist.

Seite 371. Formel (2) ist zu lesen

$$\sqrt[4]{8}f(\sqrt{-25}) = 1 + \sqrt{5},$$

Formel (3) zweite Zeile

$$x^2 - (1 + \sqrt{7})x + 2 = 0.$$

Seite 375. Formel (30)

$$\sqrt{2}f_1(\sqrt{-26})^2 = x + \frac{2\sqrt{13}}{x^2 - 3}.$$

BEMERKUNG ÜBER DIEJENIGEN FLÄCHEN

BEI DENEN DIE

DIFFERENZ DER HAUPTKRÜMMUNGSRADIEN CONSTANT IST

VON

R. v. LILIENTHAL
in BONN.

Im 59ten Bande des Journals für Mathematik hat Herr Weingarten den Satz aufgestellt und bewiesen, dass die dem Hauptkrümmungshalbmesser ρ_1 entsprechenden Krümmungsmittelpunktsflächen derjenigen Flächen, bei denen der Hauptkrümmungshalbmesser ρ_2 durch dieselbe Function von ρ_1 ausgedrückt wird, sämmtlich auf eine unter ihnen befindliche Rotationsfläche abwickelbar sind. Speciell sind die Krümmungsmittelpunktsflächen der Minimalflächen auf die Rotationsfläche jeder Kettenlinienevolute abwickelbar.

Der letzteren Bemerkung lässt sich die folgende an die Seite stellen. Die dem Hauptkrümmungshalbmesser ρ_1 entsprechenden Krümmungsmittelpunktsflächen sämmtlicher Flächen, bei denen $\rho_1 - \rho_2$ constant ist, sind auf die Rotationsfläche der Tractrix abwickelbar und besitzen somit ein constantes negatives Krümmungsmass. Dasselbe hat den Werth

$$\frac{-1}{c^2},$$

wenn $\rho_1 - \rho_2 = c$. Die Rotationsfläche der Tractrix selbst ist Krümmungsmittelpunktsfläche von einer Rotationsfläche, die sich durch geeignete Bestimmung der willkührlichen Constanten aus den Formeln des Herrn Lipschitz (Acta Mathematica, Bd. 10, S. 136, (16)) ergiebt.

Es sei zunächst gestattet den allgemeinen Satz des Herrn WEINGARTEN mit den Mitteln zu beweisen, die im 30ten Bande der Mathematischen Annalen, p. 1 u. folg. entwickelt sind. Man erhält für das Quadrat des Linearelements ds_1 der zu ρ_1 gehörenden Krümmungsmittelpunktsfläche die Gleichung:

$$ds_1^2 = (\rho_1 - \rho_2)^2[\sqrt{L}\sin\sigma dp + \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)dq]^2 + d\rho_1^2.$$

Unter der Voraussetzung

$$\rho_2 = f(\rho_1)$$

lässt sich nun, wenn ρ_1 als unabhängige Variable genommen und gleich p gesetzt wird, ein Factor λ in der Weise bestimmen, dass

$$\lambda(\rho_1 - \rho_2)[\sqrt{L}\sin\sigma dp + \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)dq]$$

ein vollständiges Differential wird.

Die hierzu erforderliche Differentialgleichung nimmt unter Berücksichtigung der Beziehung (l. c., p. 10, (6)):

$$(\rho_1 - \rho_2)\left\{\frac{\partial\sqrt{L}\sin\sigma}{\partial q} - \frac{\partial\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)}{\partial p}\right\} = \frac{\partial\rho_2}{\partial q}\sqrt{L}\sin\sigma - \frac{\partial\rho_2}{\partial p}\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)$$

die Form an:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial q}(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{L}\sin\sigma - \frac{\partial\lambda}{\partial p}(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)$$
$$+ \frac{\partial\rho_1}{\partial q}\lambda\sqrt{L}\sin\sigma - \frac{\partial\rho_1}{\partial p}\lambda\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi) = 0.$$

Wird nun λ blos als Function von $p = \rho_1$ betrachtet, so folgt:

$$\lambda = e^{-\int\frac{d\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} + \text{Const.}},$$

und man kann setzen:

$$e^{-\int\frac{d\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}}(\rho_1 - \rho_2)[\sqrt{L}\sin\sigma dp + \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)dq] = dq_1,$$

so dass:

$$ds_1^2 = e^{2\int \frac{d\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}} dq_1^2 + d\rho_1^2$$

wird, woraus die Behauptung des Herrn WEINGARTEN unmittelbar erhellt.

Nimmt man nun im betrachteten Falle $\rho_1 - \rho_2$ gleich c und schreibt statt q_1 wieder q, so ergiebt sich:

$$ds_1^2 = e^{\frac{2\rho_1}{c}} dq^2 + d\rho_1^2.$$

Wir suchen jetzt diejenige Rotationsfläche auf, bei welcher das Quadrat des Linearelements die letztgefundene Form hat. Sind

$$\xi = p\cos q, \qquad \eta = p\sin q, \qquad \zeta = f(p)$$

die Coordinaten einer Rotationsfläche, ds das Linearelement der letzteren, so wird:

$$ds^2 = [1 + f'(p)^2]dp^2 + p^2dq^2.$$

Daher sind p und $f(p)$ so als Functionen von ρ_1 zu bestimmen, dass:

$$p^2 = e^{\frac{2\rho_1}{c}}, \qquad [1 + f'(p)^2]dp^2 = d\rho_1^2$$

wird.

Nimmt man

$$p = e^{\frac{\rho_1}{c}},$$

so folgt:

$$f(p) = \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}} - \rho_1 + c\log\left(c - \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}}\right),$$

und:

$$\xi = e^{\frac{\rho_1}{c}}\cos q, \qquad \eta = e^{\frac{\rho_1}{c}}\sin q,$$

$$\zeta = \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}} - \rho_1 + c\log\left(c - \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}}\right).$$

Diese Gleichungen zeigen, dass wir es mit der Umdrehungsfläche der Tractrix zu thun haben. Das Krümmungsmass dieser Fläche ist $\frac{-1}{c^2}$.

Bezeichnen wir mit x, y, z die Coordinaten einer Fläche, für welche die in Rede stehende Rotationsfläche eine Evolute ist, so finden sich x, y, z leicht mit Hülfe eines von Herrn WEINGARTEN in Journal für Mathematik, Bd. **62**, S. 62 aufgestellten Formelsystems in der Form:

$$x = e^{\frac{\rho_1}{c}} \frac{c - \rho_1}{c} \cos q, \qquad y = e^{\frac{\rho_1}{c}} \frac{c - \rho_1}{c} \sin q,$$

$$z = \frac{c - \rho_1}{c} \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}} - \rho_1 + c \log\left(c - \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}}\right).$$

Diese Rotationsfläche, bei der nun

$$\rho_1 - \rho_2 = c$$

wird, ist unter den von Herrn LIPSCHITZ (Acta Mathematica, Bd. **10**, S. 136, (16)) angegebenen Rotationsflächen mit der genannten Eigenschaft enthalten, was sich mit Hülfe der Substitution:

$$\varphi = q, \qquad \sin\vartheta = \frac{1}{c} e^{\frac{\rho_1}{c}}, \qquad \log\frac{1}{c} + \mathfrak{A} = -1$$

sofort ergiebt.

Münster i/W. den 1 September 1887.

SUR L'INTÉGRATION ALGÉBRIQUE DES DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES

PAR

J. PTASZYCKI

à S:t PÉTERSBOURG.

1. Le travail actuel a pour objet la solution du problème suivant:

Exprimer l'intégrale $\int y dx$, y étant liée à x par une équation algébrique, au moyen d'une fonction algébrique de x ou s'assurer que cette intégrale n'est pas algébrique.

Le premier pas vers la résolution de ce problème a fait ABEL, en démontrant que, si l'intégrale $\int y dx$ est une fonction algébrique de x, elle s'exprime rationellement au moyen de x et de y.

En s'appuyant sur cette proposition, LIOUVILLE a résolu complètement le problème (Journal de l'Ecole Polytechnique, 22[e] cahier; Journal de Mathématiques, t. **3**).

Depuis, plusieurs autres géomètres ont étudié la question. Je citerai BRIOT et BOUQUET (*Théorie des fonctions elliptiques*), MM. ZEUTHEN (Comptes rendus, 1880), RAFFY (Annales de l'Ecole normale, 1883; 1885) et HUMBERT (Acta mathematica, 1887).

Toutes les solutions du problème, proposées jusqu'à présent, ramènent la question à la recherche de quelques polynômes entiers par la méthode des coefficients indéterminés.

Ici je vais établir un théorème qui permet de résoudre la question

par une voie différente.[1] Ce théorème fournit aussi un nouveau moyen de suivre la méthode des coefficients indéterminés.

2. Théorème. *Soit P un polynôme entier en x; z une fonction de x, définie par l'équation irréductible à coefficients entiers*

$$z^n + \varphi_1(x)z^{n-1} + \varphi_2(x)z^{n-2} + \ldots = 0.$$

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les n déterminations de la fonction z; Δ le discriminant de l'équation en z. Soit enfin

$$\Delta = D^2 E,$$

où D est un polynôme entier, E un polynome entier qui n'a pas de facteurs linéaires multiples.

Si l'intégrale $\int \frac{z}{P} dx$ est algébrique, on peut poser

$$\int \frac{z}{P} dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

$Y, X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ étant des polynômes entiers en x, définis de la manière suivante:

1° *Y est le produit du polynôme D par le plus grand commun diviseur du polynôme P et de sa dérivée $\frac{dP}{dx}$;*

2° *$X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ satisfont aux équations:*

$$X_i = \frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \ldots z_1^{i-1} & \int \frac{z_1}{P} dx & z_1^{i+1} \ldots z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 \ldots z_2^{i-1} & \int \frac{z_2}{P} dx & z_2^{i+1} \ldots z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_n & z_n^2 \ldots z_n^{i-1} & \int \frac{z_n}{P} dx & z_n^{i+1} \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (i=0,1,2,\ldots,n-1)$$

---

[1] En 1881, j'ai traité la question de cette manière, pour une classe assez étendue de fonctions algébriques, dans mon Mémoire intitulé *Sur l'intégration sous forme finie* (S:t Pétersbourg). Dans le cas où la fonction y est égale à la racine d'une fonction rationnelle, cette méthode se réduit au procédé de M. Tchébycheff. Je dois à l'obligeante communication de l'illustre géomètre la connaissance de son procédé. Maintenant au sujet dudit procédé on peut consulter *Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris* par M. Hermite (2ème ed.; p. 20).

3. Démonstration. Soit $\int \frac{z}{P} dx$ l'intégrale algébrique. L'intégrale sera de la forme (n° 1)

$$(1) \qquad \int \frac{z}{P} dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z + \frac{X_2}{Y_2} z^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z^{n-1},$$

X_0, Y_0; X_1, Y_1; ... désignant des polynômes entiers en x; on peut supposer que la fraction $\frac{X_i}{Y_i}$ soit irréductible.

On tire de l'égalité (1) les n équations

$$\int \frac{z_1}{P} dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_1 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_1^{n-1},$$

$$\int \frac{z_2}{P} dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_2^{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int \frac{z_n}{P} dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_n + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_n^{n-1}.$$

Remarquons que ces équations montrent que l'intégrale

$$(2) \qquad \int \frac{z_k}{P} dx, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

sera représentée, dans le voisinage de chaque point a, par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - a$; au commencement de la série il n'y a qu'un nombre limité de termes à exposants négatifs.

En résolvant nos équations par rapport aux coefficients $\frac{X_0}{Y_0}$, $\frac{X_1}{Y_1}$, ..., on obtient la formule

$$(3) \qquad \frac{X_i}{Y_i} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \ldots z_1^{i-1} & \int \frac{z_1}{P} dx & z_1^{i+1} \ldots z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 \ldots z_2^{i-1} & \int \frac{z_2}{P} dx & z_2^{i+1} \ldots z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_n & z_n^2 \ldots z_n^{i-1} & \int \frac{z_n}{P} dx & z_n^{i+1} \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Nous allons maintenant mettre cette formule sous une autre forme.

Dans ce but, je remarque que les éléments du déterminant qui figure dans la formule (3), excepté ceux de la i-ième colonne, restent finis pour toutes les valeurs finies de x. Quant à l'élément (2) de la i-ième colonne, on sait que les seules valeurs finies de x qui puissent le rendre infini sont les racines du polynôme P. Soit

$$P = (x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_l)^{\alpha_l}.$$

On voit sans peine que pour $x = a$ l'intégrale (2) sera finie ou infiniment grande d'un ordre égal au plus à celui de $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}$.

Le déterminant considéré se réduit donc à

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}},$$

$f(x)$ étant une fonction qui reste finie pour toutes les valeurs finies de x. Rappelons que le radical $\sqrt{J}$ qui figure dans la formule (3) est égal à $D\sqrt{E}$, où E désigne un polynôme qui n'a pas de facteurs linéaires multiples.

D'après cela, de la formule (3) on déduit que

$$\frac{X_i}{Y_i} = \frac{f(x)}{D.(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}.\sqrt{E}}.$$

On en conclut, en ayant égard aux propriétés des fonctions X_i, Y_i, $f(x)$, E, que le polynôme Y_i doit diviser le polynôme

$$Y = D.(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}.$$

Par conséquent, dans l'égalité (1) on peut poser

$$Y_i = Y; \qquad (i=0,1,2,\dots,n-1)$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Portant la valeur de Y_i dans la formule (3), on obtient l'expression du polynôme X_i qui établit la seconde partie du théorème énoncé.

4. Application. En vertu de notre théorème, on peut procéder de de la manière suivante pour résoudre le problème proposé (n° 1).

On met la fonction à intégrer y sous la forme $\frac{z}{P}$ et le discriminant de l'équation en z sous la forme $\Delta = D^2E$.

On forme le produit du polynôme D par le plus grand commun diviseur du polynôme P et de sa dérivée $\frac{dP}{dx}$; on déterminera ainsi le polynôme Y.

Puis, on développe suivant les puissances décroissantes de x les n expressions

$$\frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \ldots z_1^{i-1} & \int \frac{z_1}{P}dx & z_1^{i+1} \ldots z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 \ldots z_2^{i-1} & \int \frac{z_2}{P}dx & z_2^{i+1} \ldots z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 \ldots z_n^{i-1} & \int \frac{z_n}{P}dx & z_n^{i+1} \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

dans lesquelles $z_1, z_2, \ldots, z_n$ désignent les n déterminations de z; les parties entières dans les développements fourniront respectivement les polynômes $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$.

Les coefficients de ces polynômes contiendront, en général, n constantes inconnues $c_1, c_2, \ldots, c_n$; c_k représente la constante arbitraire de l'intégrale $\int \frac{z_k}{P}dx$.

L'une de ces constantes peut être choisie arbitrairement; on déterminera les autres par la condition que l'égalité

$$\frac{d}{dx}\left[\int \frac{z}{P}dx - \frac{X_0 + X_1z + X_2z^2 + \ldots + X_{n-1}z^{n-1}}{Y}\right] = 0$$

doit avoir lieu identiquement.

Les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant déterminées, la fonction

$$\frac{X_0 + X_1z + \ldots + X_{n-1}z^{n-1}}{Y}$$

présentera la valeur de l'intégrale $\int \frac{z}{P}dx$. Si ces constantes ne satisfont

pas à la condition indiquée, on concluera que notre intégrale n'est pas algébrique.

Remarque. Il peut arriver que l'impossibilité de l'intégration algébrique se manifeste avant que nos opérations soient menées à bout. L'intégrale $\int \frac{z}{P} dx$ n'est pas algébrique: 1° si le développement de la fonction $\frac{z_i}{P}$ contient un terme en x^{-1} (n° 3); 2° si, dans le développement de l'expression qui fournit le polynôme X_i, les puissances fractionnaires et positives de x ne s'evanouissent pour aucune valeur de $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

5. La seconde partie de notre théorème indique encore le moyen suivant de déterminer les polynômes $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$.

A l'aide de l'expression de X_i, on calcule les limites supérieures des degrés de ces polynômes et l'on cherche ensuite à déterminer leurs coefficients de manière à vérifier l'égalité du n° 4.

Remarque. Si l'on suit cette seconde marche, on n'aura à effectuer que les seules opérations arithmétiques pour résoudre le problème proposé (n° 1).

Prix Oscar II.

Mémoires présentés au concours.

Le concours pour le prix fondé par S. M. le roi OSCAR II a été clos le 1[r] juin de cette année. Nous mentionnons ci-après et dans l'ordre où ils sont parvenus, les mémoires destinés au concours qui ont été adressés au Rédacteur en chef de ce journal, à Stockholm:

1. *Mémoire sur l'équation trinôme de degré impair* $x^m \pm x = r$.

Épigraphe: Les trois nombres harmoniques élémentaires sont 2, 3 et 5.

2. *Nuova Teoria dei Massimi e Minimi degli Integrali definiti.*

Épigraphe: Opinionum commenta delet dies; naturæ judicia confirmat.
(Cic. Nat. D.)

3. *Allgemeine Entwicklung der Functionen.*

Épigraphe: Sich selbst zu loben ist ein Fehler,
Doch jeder thut's, der etwas Gutes thut.
(Westöstlicher Divan von Göthe.)

L'auteur y a joint une traduction française:

Développement général des fonctions

avec l'épigraphe: Tu ne fais pas bien en te louant toi-même
Mais tu te loues toi-même en faisant bien.
(D'après Goethe.)

4. *Les Fonctions Pseudo- et Hyper-Bernoulliennes et leurs premières applications.* — Contribution élémentaire à l'intégration des équations différentielles.

Épigraphe: Venient qui sine offensa, sine gratia, judicent.
(Senèque.)

5. *Über die Bewegungen in einem System von Massepunkten mit Kräften der Form* $-\frac{1}{r^2}$.

Épigraphe: Ἁπλοῦς ὁ λόγος τῆς ἀληθείας ἔφυ.
(Euripides.)

6. *Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'un nombre quelconque de fonctions de plusieurs variables indépendantes.*

Épigraphe: Accipe jussis
carmina cepta tuis.

7. *Über die Integration der Differentialgleichungen, welche die Bewegungen eines Systems von Puncten bestimmen.*

Épigraphe: Nur schrittweise gelangt man zum Ziel.

Avec une traduction française, intitulée:

Sur l'intégration des équations différentielles qui déterminent les mouvements d'un système de points matériels,

et portant l'épigraphe: Pour parvenir au sommet, il faut marcher pas à pas.

8. *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.*

Épigraphe: Nous devons l'unique science
Que l'homme puisse conquérir
Aux chercheurs dont la patience
En a laissé les fruits mûrir.
(Sully-Prudhomme, Le Bonheur.)

Avec un Supplément.

9. *Sur le Problème des trois Corps et les Équations de la Dynamique.*

Épigraphe: Nunquam præscriptos transibunt sidera fines.

10. *Sur le Problème des trois Corps.*

Épigraphe: — — — — — — — Coelumque tueri
Jussit et erectos ad sidera tollere vultus.
(Ovide.)

11. *Über die Bewegung der Himmelskörper im widerstehenden Mittel.*

Épigraphe: Per aspera ad astra.

12. *Recherches sur la formule sommatoire d'Euler.*

Épigraphe: Utinam ne nimis erraverim.

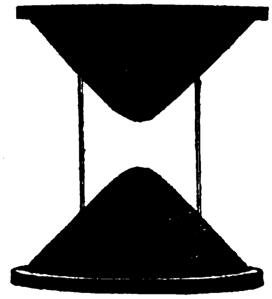
Juin 1888.

MITTAG-LEFFLER.

L. Brill à Darmstadt, Éditeur de modèles pour l'enseignement des Mathématiques supérieures.

Modèles

en plâtre, en fils de soie tendus sur des tiges métalliques, en fils métalliques, en feuilles minces de laiton etc.



Les modèles de la 1^{re}, 2^{e}, 3^{e}, 5^{e}, 6^{e}, 8^{e} série et la plupart de ceux de la 10^{e} et de la 14^{e} série sont faits d'après les originaux faits à l'Institut mathématique de l'École Technique supérieure de Munich sous la direction de MM. les professeurs *Brill, Klein* et *Dyck*.

A l'exception de la 7^{e} et de la 9^{e} série, tous les numéros se vendent séparément. La plus grande partie des modèles sont accompagnés d'un *texte explicatif*.

Les prix sont donnés en monnaie allemande; les frais de l'emballage et du transport n'y sont pas compris.

Modèles en carton des surfaces du second ordre

construits d'après les indications de M. **A. Brill,**
professeur à l'Université de Tubingue.

Produits par la réunion de deux systèmes de sections planes figurées en papier-carton coloré.

1. et 2. Ellipsoïde. 3. et 4. Hyperboloïde à une et à deux nappes. 5. et 6. Paraboloïde elliptique et hyperbolique. 7. Cône.

Prix de la série entière 16 M.

3 **supports** différents pour dresser les modèles, prix M. 1.50, M. 2.— et M. 1.—.

Première série.

I. Surface de révolution de la tractrice avec des lignes géodésiques et asymptotiques. II. et III. Surfaces des centres du paraboloïde elliptique et de l'hyperboloïde à une nappe. IV. Ellipsoïde de révolution avec des lignes géodésiques. V. Ellipsoïde à axes inégaux avec des lignes géodésiques passant par les ombilics.

Prix de la série entière 60 M.

Deuxième série.

VI. 3 modèles de la surface de Kummer. VII. Surface du 3^{e} ordre à 4 points coniques réels avec les lignes asymptotiques. VIII. 3 surfaces de révolution à courbure moyenne constante avec des lignes géodésiques. IX. Surface de révolution à courbure constante négative (type conique) avec des lignes géodésiques et asymptotiques. X. Même surface (type de l'hyperboloïde) avec des lignes géodésiques parallèles et des cercles géodésiques. XI. Trajectoire d'un point pesant sur une sphère.

Prix de la série entière 120 M.

Troisième série.

Modèles en plâtre des surfaces du second ordre

avec la représentation des lignes de courbure, des génératrices rectilignes etc.

par M. **R. Diesel** à Munich.

Sur les modèles du 1^{er} groupe on n'a indiqué que les sections principales.

Série entière 100 M., 1^{er} groupe (7 modèles) 35 M., 2^{d} groupe (11 modèles) 75 M.

Quatrième série.

Modèles en fils de soie des surfaces réglées du second ordre

(les fils de soie sont tendus sur des tiges en laiton).

1. Hyperboloïde invariable. 2. et 3. Hyperboloïdes variables de forme. 4. Paraboloïde hyperbolique invariable. 5. Paraboloïde hyperbolique variable.

Cette série forme un supplément important à la série des modèles en carton et à la 3^{e} série (modèles en plâtre des surfaces du 2^{d} ordre).

Série entière 270 M.

Cinquième série.

XII. Représentation de la fonction elliptique $\varphi = \mathrm{am}(u, k)$. XIII. 3 surfaces de révolution à courbure constante positive avec des lignes géodésiques. XIV. Hélicoïde à courbure constante négative. XVI. Quatre types de la cyclide. XVII. Chaînette sur la sphère. XVIII. Enveloppe des lignes géodésiques sur l'ellipsoïde de révolution.

Série entière 100 M.

Sixième série.

XIX. Les courbes gauches du 3^{e} ordre sur un cylindre du 2^{d} ordre. — 1. Surface de l'onde pour des cristaux à deux axes optiques (2 nappes). 2. L'ellipsoïde correspondant. 3. Surface de l'onde pour les cristaux à un axe. 4. Surface de l'onde pour les cristaux à deux axes, en octants séparés, avec les lignes sphériques et ellipsoïdiques sur les deux nappes et huit ombilics. 5. Cône circulaire avec des sections elliptiques, hyperboliques et paraboliques, variable.

Série entière 60 M.

Septième série.

Modèles des surfaces du troisième ordre.

Les formes différentes des surfaces du 3^{e} ordre avec les courbes paraboliques et les plus importantes de leurs surfaces Hessiennes,

par M. **Carl Rodenberg,**

professeur à l'École Technique supérieure de Hanovre.

La série complète se compose de 27 modèles. Les nos 1—15 forment le 1^{er} groupe, les nos 16—26 le 2^{d} groupe.

Prix de la série entière 300 M., du 1^{er} groupe 140 M., du 2^{d} groupe 160 M.

Huitième série.

XX. Surface à courbure constante négative et à lignes de courbure planes. XXI. Surface minima du 9^{e} ordre. XXII. Surface du 12^{e} ordre. XXIII. Perspectives-relief du cube, de la sphère, du cône et du cylindre creux. XXIV. Surface hélicoïdale engendrée par le mouvement d'une sphère. XXV a. Hélicoïde gauche applicable sur l'alysséide. b. et c. Alysséide en feuille mince de laiton et en plâtre. XXVI a. Hélicoïde applicable sur l'ellipsoïde de révolution.

Série entière 125 M.

Neuvième série.

Modèles de surfaces du quatrième ordre

d'après M. **Kummer,** professeur à l'Université de Berlin.

Copies d'après les originaux dans les collections du Séminaire mathématique de l'Université de Berlin, dont M. Kummer à parlé dans les »Monatsberichte« de l'Académie de Berlin, années 1862, 1866, 1872.

1—6. Six types de surfaces du 4^{e} ordre, touchées par 4 plans suivant des cercles, entre autres la surface romaine de Steiner. On y a joint les Notes de M. Kummer extraites des »Monatsberichte«. 7 et 8. Deux modèles de la cyclide de Dupin. 9. Surface du 4^{e} ordre à droite double.

Prix 120 M.

Dixième série.

Supplément I.

1. Charpentes en fils métalliques pour la représentation de surfaces minima à l'aide d'une dissolution de savon, 13 nos (avec une instruction). 2. Deux modèles sur la construction de l'ellipsoïde par un fil flexible, d'après M. Staude. 3. Ellipsoïde à axes inégaux, décomposable le long d'une section circulaire. 4. Modèle d'une surface du 4^{e} ordre à droites doubles qui se coupent. 5. Supplément aux cyclides de Dupin (5^{e} série, n° XVI). Cyclide parabolique à deux points doubles imaginaires. 6. 5^{e} série, n° XIII. Portion de surface à courbure constante positive en feuille mince de laiton, pour montrer la déformation de surfaces applicables l'une sur l'autre. 7. Supplément aux surfaces d'onde de la 6^{e} série (au n° 3). Surface de l'onde d'un cristal à un axe et à réfraction double positive. 8. 8^{e} série, n° XXV. Modèle en feuille mince de laiton de l'alysséide, qui peut être déformé en une hélicoïde gauche.

Supplément II.

XXVIII. Trois types de cyclides. XXIX. Surface du 8^{e} ordre. XXX. 12 types de surfaces de révolution. XXXI. Corps pour la détermination expérimentale de la courbe parabolique, des lignes de courbure et asymptotiques. XXXII. Enveloppe des lignes géodésiques passant par un point. XXXIII. Ellipsoïde à axes inégaux. XXXIV. Deux portions d'une surface à courbure constante négative en feuille mince de laiton.

Série entière 135 M.; Supplément I 45 M., Supplément II 90 M

(A suivre, voir dernière page.)

Ausgegeben den 31. August 1888. — Paru le 31 août 1888.

Inhaltsverzeichniss. Table des matières.

Durch die gesteigerten Herstellungskosten waren wir gezwungen, in dem Preise der Acta Mathematica eine Erhöhung eintreten zu lassen, wenn nicht die Ausstattung der Zeitschrift beeinträchtigt werden sollte.

Der Subscriptionspreis ist vom 11:ten Bande ab auf M. 15.— = Francs 18.75 festgesetzt.

Berlin. ***MAYER & MÜLLER.***

Les frais de publication des Acta Mathematica ayant augmenté, nous nous voyons dans la nécessité d'élever le prix de l'abonnement, pour éviter des changements dans le Journal.

Le prix de l'abonnement sera donc, à partir du 11me tome, fixé à 18.75 francs = 15 marcs.

Paris. ***A. HERMANN.***

Preis des Bandes: 15 Mark. — Prix par volume: 18,75 francs.